Лекция 3

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Решение задачи определения **напряженно-деформированного состояния (НДС)** сооружения состоит из следующих частей:

− определение напряжений;

− определение опорных реакций и внутренних усилий;

− определение перемещений и деформаций.

При этом должны быть известны геометрические размеры и формы элементов сооружения, физические характеристики материала, внешняя нагрузка и особенности ее воздействия.

Расчет статически определимых систем является самой простой задачей, решаемой в строительной механике.

Статически определимой системой (СОС) называется система, внутренние усилия которой можно определять только из уравнений статики.

Особенности СОС:

− их внутренние усилия не зависят от упругих характеристик материала, форм сечений и площадей элементов;

− воздействие температуры, осадки опор, неточность изготовления элементов не вызывают внутренних усилий;

− если нет внешних нагрузок, все внутренние усилия равны нулю.

1. Определение опорных реакций

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, а в них возникают опорные реакции.

При определении опорных реакций используется ***принцип освобождения от связей***: ***всякое тело можно освободить от связей, заменив их реакциями***.

После этого из уравнений равновесия можно определять величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы пишутся в трех формах:

1) $\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma M_A = 0$

(ΣX и ΣY – суммы проекций сил на взаимно-пересекающиеся оси x и *y*, ΣM_A – сумма моментов всех сил относительно любой точка *A*);

2) $\Sigma X = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0$

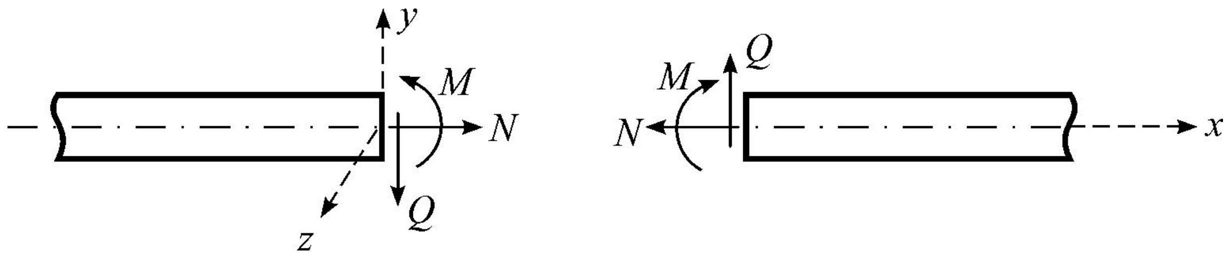
(точки *A* и *B* не должны лежать на одном перпендикуляре к оси x);

3) $\Sigma M_A = 0, \qquad \Sigma M_B = 0, \quad \Sigma M_C = 0$

(точки *A, B, C* не должны лежать на одной прямой).

2. Внутренние усилия стержневой системы

В элементах плоской стержневой системы возникают три внутренних усилия:



N − продольная сила,
Q − поперечная сила,
M − изгибающий момент.

Внутренние усилия вычисляются по формулам:

$$M = \sum_{лев} M_{iz} = -\sum_{пр} M_{jz}, \quad Q = \sum_{лев} P_{iy} = -\sum_{пр} P_{jy}, \quad N = \sum_{лев} P_{ix} = -\sum_{пр} P_{jx}.$$

В строительной механике используется следующее ***правило знаков внутренних усилий:***

1) эпюра М изображается на стороне растянутого волокна. Ее знак обычно не устанавливается;

2) поперечная сила положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательна, если вращает элемент против часовой стрелки;

3) продольная сила положительна, если растягивает элемент, и отрицательна, если сжимает его.

Между Q и M существует дифференциальная зависимость (формула Журавского):

$$Q = \frac{dM}{dx} = \pm tg\,\varphi.$$

Для определения знака *Q* по *M* ось эпюры M нужно повернуть до совпадения с ее касательной. Если поворот будет по часовой стрелке, Q берется со знаком «+», а если против часовой стрелки, то со знаком «–».

Эпюры поперечных сил Q и продольных сил N можно изображать на любой стороне от оси стержня со своими знаком.

Но эпюру изгибающего момента M нужно обязательно изображать на стороне растянутого волокна.

3. Методы определения внутренних усилий

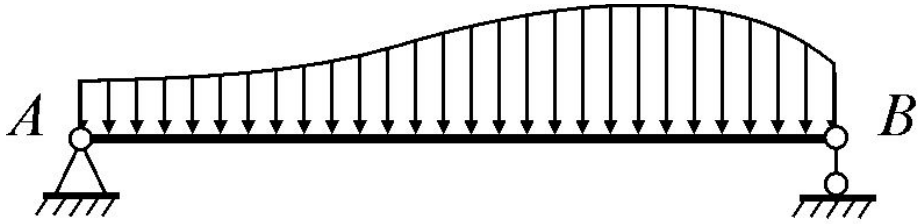
Внутренние усилия определяются методами простых сечений, совместных сечений, вырезания узла и замены связей.

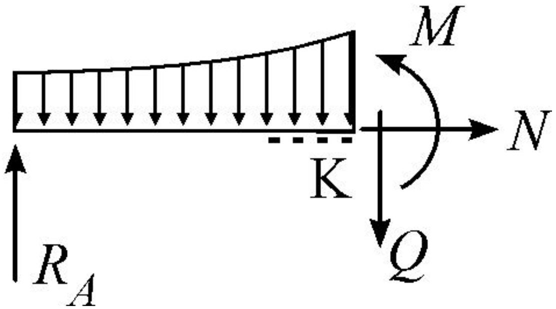
3.1. Метод простых сечений

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу и определять его из уравнений статики (равновесия):

Алгоритм метода простых сечений:

1) поделить систему на участки;
2) выбрать участок и провести поперечное сечение;
3) выбрать одну (наиболее простую) отсеченную часть;
4) составить три уравнения равновесия;
5) из них определить внутренние усилия *M, Q, N*;
6) для данного участка построить эпюры *M, Q, N*;
7) повторить пункты 2-6 для остальных участков.

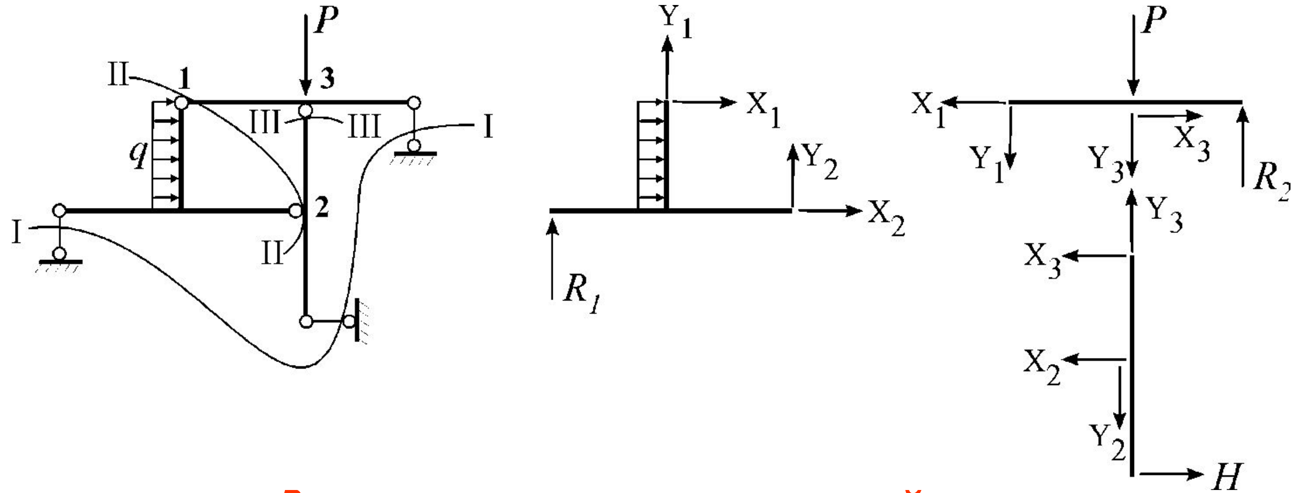




3.2. Метод совместных сечений

Используется при расчете многодисковых систем.

Например, при расчете трехдисковой рамы проводятся три сечения *I, II, III*. Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, из 9 уравнений определяются девять неизвестных реакций: опорные реакции R_1, R_2, H и междисковые реакции X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3.



***Алгоритм метода совместных сечений*:**

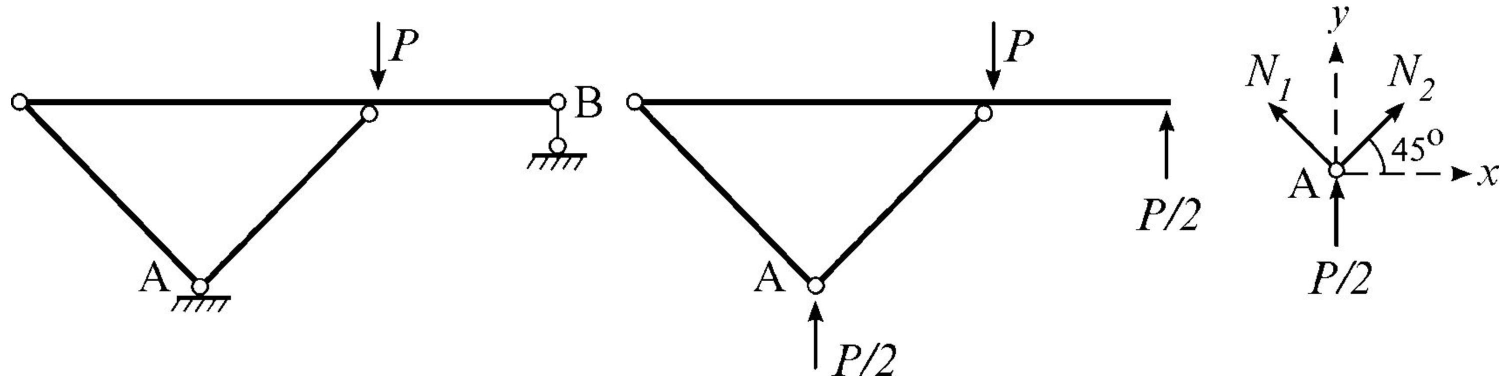
1) совместными сечениями разделить систему на части (диски);
2) обозначить опорные и междисковые реакции;
3) для каждого диска записать уравнения равновесия;
4) решить систему полученных уравнений и определить реакции;
5) каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
6) объединить все эпюры в общие эпюры *M, Q, N*.

3.3. Метод вырезания узла

Используется для определения усилий простых систем.

Его сущность: вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями; силы, действующие в узле проецируются на две оси; из этих уравнений определяются искомые усилия.

Рассмотрим пример:



После определения опорных реакций вырезается узел A и составляются уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_2 \cos 45 - N_1 \cos 45 = 0,$$

$$\Sigma Y = N_1 \sin 45 + N_2 \sin 45 + P/2 = 0.$$

Из них определяются искомые продольные силы:

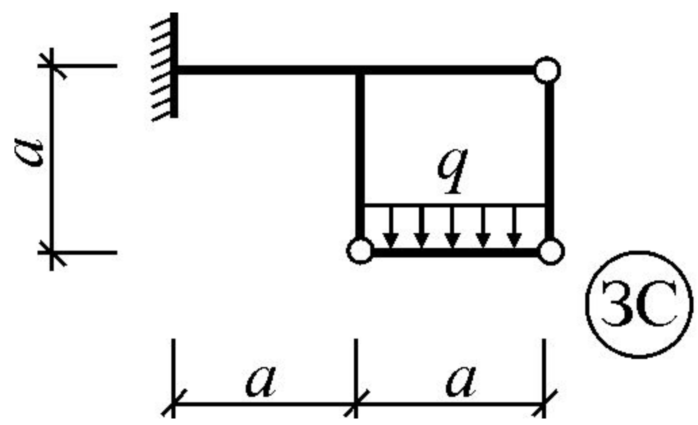
$$N_1 = N_2 = -\frac{P}{\sin 45}.$$

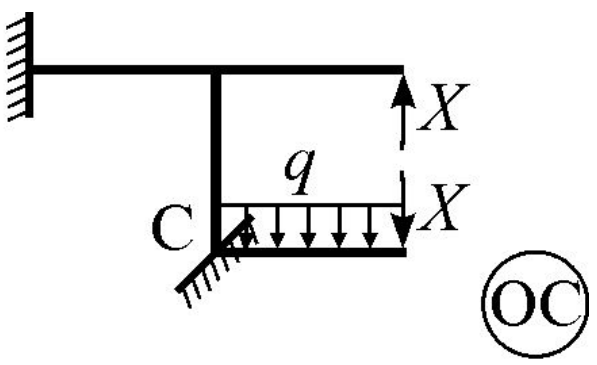
3.4. Метод замены связей

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

***Его сущность*:** сложная система превращается в более простую путем перестановки одной связи в другое место; из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи; затем система рассчитывается известными способами.

Например, для расчета следующей рамы в заданной системе **ЗС** удалим правый вертикальный стержень и введем связь в левый шарнир. Тогда вместо шарнира получим припайку *C*, а стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через *X*, получим основную систему **ОС** :





Условие эквивалентности заданной (ЗС) и основной (ОС) систем:

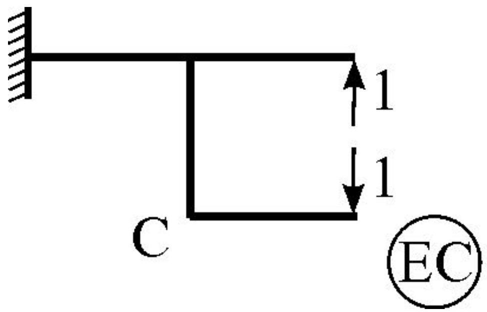
$M_C = 0$.

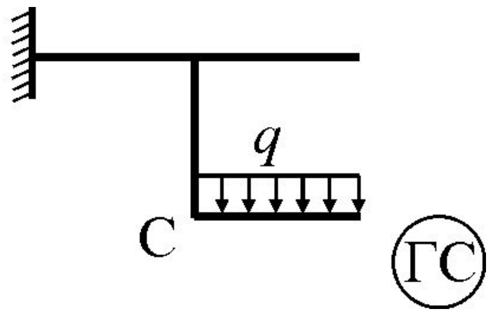
По принципу суперпозиции имеем: $M_C = M_{C,X} + M_{C,P} = 0$.

Теперь рассмотрим два состояния основной системы:

1) единичное состояние (**ЕС**) − прикладывается сила $X=1$;

2) грузовое состояние (**ГС**) − прикладывается нагрузка:





Предыдущее уравнение примет вид:

$$\overline{M}_C X + M_{C,P} = 0,$$

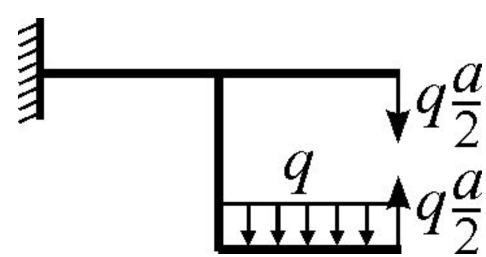
где $\overline{M}_C = 1 \cdot a = a$ – момент в точке *C* в единичном состоянии,

$M_{C,P} = qa^2/2$ – момент в точке *C* в грузовом состоянии.

Тогда неизвестное усилие будет:

$$X = -M_{C,P} / \overline{M}_C = -qa/2.$$

После этого можно перейти к расчету более простой системы:



В более сложных случаях переставляются несколько связей и записываются столько же условий эквивалентности:

$$s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \ldots + s_{1n}X_n + S_{1P} = 0,$$

$$s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \ldots + s_{2n}X_n + S_{2P} = 0,$$

. . . .

$$s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \ldots + s_{nn}X_n + S_{nP} = 0.$$

Здесь *1, 2, …, n* – заменяемые связи; X_1, X_2, ..., X_n – неизвестные внутренние усилия в этих связях.

Из этой системы уравнений определяются неизвестные силы.

Общий вывод. Расчет любой статически определимой системы приводит к решению системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Если определитель полученной системы уравнений отличен от нуля (*det≠0*), внутренние усилия будут конечными величинами. Если же определитель равняется нулю (*det=0*), то внутренние усилия определить нельзя. В этом случае − данная система мгновенно изменяема.