ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Лекция «Основы электромагнитной теории Максвелла»

Общая характеристика теории Максвелла

- Основу теории Максвелла составляют четыре структурных уравнения, которые записываются в интегральной и дифференциальной формах. В интегральной форме они выражают соотношения для мысленно проведенных в ЭМП контуров и замкнутых поверхностей, а в дифференциальной – показывают, как связаны между собой характеристики ЭМП и плотности электрических зарядов и токов в каждой точке пространства.
- Дифференциальная и интегральная формы получаются друг из друга путем применения двух теорем векторного анализа:
  - теоремы Остроградского-Гаусса;
  - теоремы Стокса.

Теоремы векторного анализа

Теорема Остроградского-Гаусса: поток Φ_a вектора $\boldsymbol{a}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность *S* равен объемному (тройному) интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью

$$\Phi_a = \oint_S \vec{a}\, d\vec{S} = \int_V div\, \vec{a} dV$$

Дивергенцией называется математическая операция, в результате которой из вектора получаем скаляр

$$div\, \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Теоремы векторного анализа

Теорема Стокса: циркуляция вектора ***a*** вдоль замкнутого контура L равна поверхностному интегралу от ротора (вихря) вектора ***a*** по замкнутой поверхности *S*

$$\oint_L \vec{a}\, d\vec{l} = \oint_S rot\, \vec{a}\, d\vec{S},$$

где ротор или вихрь определяется выражением

$$rot\, \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla}\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)\vec{a}$$

$$\nabla \vec{a} = div\, \vec{a} \qquad \vec{\nabla}\vec{a} = rot\, \vec{a}$$

Первое уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \oint_L \vec{E}\, d\vec{l} \qquad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

по сути, это закон электромагнитной индукции Фарадея с учетом выражения для магнитного потока

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \Phi_m = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

- Максвелл предположил, что это верно не только для проводящего замкнутого контура, но и для любого мысленно проведенного в пространстве. Другими словами: переменное магнитное поле (МП) существует всегда при наличии вихревого (переменного) электрического поля, и наоборот. Они обуславливают друг друга как при наличии проводников, так и без них.
- Вихревое (переменное) электрическое поле в отличие от электростатического имеет отличную от нуля циркуляцию.

Ток смещения

- Максвелл предположил, что источником МП может быть не только макроток (ток проводимости), но и вихревое (переменное) электрическое поле. Для количественной характеристики магнитного действия переменного электрического поля Максвелл ввел понятие **тока смещения (**по сути это – переменное электрическое поле**)**.

  Из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора **D**

$$\oint_S \vec{D}\,\vec{dS} = q_{своб}^{охват}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\oint_S \vec{D}\,\vec{dS}\right) = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\vec{dS} \qquad I = \oint_S \vec{j}_{смещ}\,\vec{dS}$$

$$\vec{j}_{смещ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Второе уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

С учетом тока смещения закон полного тока для МП в веществе может быть переписан в виде **второго уравнения Максвелла в интегральной форме**

$$\oint_L \vec{H}\,\vec{dl} = I_{макро} + I_{смещ} = \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \vec{dS}$$

и (по теореме Стокса) дифференциальной форме

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Для областей, где нет макротоков (токов проводимости) первое и второе уравнения Максвелла имеют симметричный вид

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Третье и четвертое уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

Максвелл обобщил теорему Остроградского-Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint_S \vec{D}\,\vec{dS} = q_{своб}^{охват} = \int_V \rho(V)dV$$

- **третье уравнение Максвелла в интегральной форме**, с применением теоремы Остроградского-Гаусса получим **дифференциальную (локальную) форму**

$$div\,\vec{D} = \rho(V)$$

Максвелл обобщил также теорему Остроградского-Гаусса для МП в вакууме, выражающую отсутствие особых – магнитных зарядов

$$\oint_S \vec{B}\,\vec{dS} = 0$$

– **четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме**, **в дифференциальной форме** с учетом теоремы Остроградского-Гаусса

$$div\,\vec{B} = 0$$

Полная система структурных уравнений Максвелла для ЭМП в общем случае

№	Получено на основе	Интегральная форма	Дифференциальная форма
1	закона электромагнитной индукции Фарадея	$\oint\limits_L \vec{E}\,\vec{dl} = -\oint\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{dS}$	$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2	закона полного тока для магнитного поля в веществе	$\oint\limits_L \vec{H}\,\vec{dl} = \oint\limits_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\vec{dS}$	$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
3	теоремы Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектрике	$\oint\limits_S \vec{D}\,\vec{dS} = \int\limits_V \rho(V)dV$	$div\,\vec{D} = \rho(V)$
4	теоремы Остроградского–Гаусса для МП в вакууме	$\oint\limits_S \vec{B}\,\vec{dS} = 0$	$div\,\vec{B} = 0$

Материальные уравнения и граничные условия для ЭМП

Данные четыре структурных уравнения (табл. 1) дополняются тремя материальными уравнениями, характеризующими свойства среды. Для изотропных несегнетоэлектрических и неферромагнитных сред материальные уравнения имеют вид соответственно:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Также полную систему уравнений Максвелла дополняют граничными условиями для электрического и магнитного полей

$$\begin{cases} D_{n2} - D_{n1} = \sigma, \\ E_{\tau 2} - E_{\tau 1} = 0, \\ B_{n2} - B_{n1} = 0, \\ H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = j_{поверхн}. \end{cases}$$

Полная система структурных уравнений Максвелла для стационарных ЭП и МП при наличии зарядов и токов проводимости

№	Получено на основе	Интегральная форма	Дифференциальная форма
1	закона электромагнитной индукции Фарадея	$\oint\limits_L \vec{E}\,\vec{dl} = 0$	$rot\,\vec{E} = 0$
2	закона полного тока для магнитного поля в веществе	$\oint\limits_L \vec{H}\,\vec{dl} = \oint\limits_S \left(\vec{j}\right)\vec{dS}$	$rot\,\vec{H} = \vec{j}$
3	теоремы Остроградского–Гаусса для электростатическо го поля в диэлектрике	$\oint\limits_S \vec{D}\,\vec{dS} = \int\limits_V \rho(V)dV$	$div\,\vec{D} = \rho(V)$
4	теоремы Остроградского–Гаусса для МП в вакууме	$\oint\limits_S \vec{B}\,\vec{dS} = 0$	$div\,\vec{B} = 0$

Полная система уравнений Максвелла состоит из

- Четырех структурных уравнений в интегральной или дифференциальной форме
- Трех материальных уравнений
- Четырех граничных условий

ВСЕГО 11 уравнений

Благодарю за внимание