

Раздел 3. Математическая статистика.

Урок 14. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения.

- ***Математическая статистика изучает случайные величины по результатам наблюдений, т.е. проводят выборочное обследование.***
- ***Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми производят наблюдение с целью получения значений конкретной СВ, называется генеральной совокупностью (Г).***
- ***Часть отобранных объектов из генеральной совокупности называется выборкой.***

Чтобы объективно судить о свойствах объектов всей генеральной совокупности по выборке, она должна быть *репрезентативной*.

Способы отбора:

- 1. Перемешиванием (с возвратом; без возврата);**
- 2. Нумерацией объектов;**
- 3. С помощью таблицы случайных чисел.**

Построение дискретного вариационного ряда.

Задача 1. На телефонной станции проводятся наблюдения над числом X неправильных соединений в минуту в течении часа $N(2;1)$:

**3;1;3;1;4;2;2;4;0;3;0;2;2;0;2;1;4;3;3;1;
4;2;2;1;1;2;1;0;3;4;1;3;2;7;2;0;0;1;3;3;
1;2;4;2;0;2;3;1;2;5;1;1;0;1;1;2;2;1;1;5.**

Обработка результатов наблюдений.

- 1. Ранжирование – операция расположения случайных величин в порядке неубывания.**
- 2. Установление варианта (x_j) – значение СВ определенной группе данных.**
- 3. Установление частоты варианта (m_j) – количество элементов одного варианта.**
- 4. Установление относительной частоты каждого варианта $\varpi_i = \frac{m_i}{n}$**

Вариационный ряд:

Индекс	I	1	2	3	4	5	6	7
Число неправильн ых соединений	X_i	0	1	2	3	4	5	7
Частота	m_i	8	17	16	10	6	2	1
Относитель ная частота	p_i	8/60	17/60	16/60	10/60	6/60	2/60	1/60

Определение.

- ***Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами и относительными частотами.***
- ***Сумма всех относительных частот равна 1.***
- ***Дискретный вариационный ряд является аналогом ряда распределения ДСВ.***

Построение интервального вариационного ряда.

- **Задача 2. При измерении диаметра валиков после шлифовки получены следующие результаты $N(6,73;0,01)$:**

**6,75 6,77 6,77 6,73 6,76 6,74 6,70 6,75 6,71 6,72
6,73 6,70 6,73 6,77 6,75 6,74 6,71 6,70 6,78 6,76
6,77 6,68 6,74 6,70 6,70 6,74 6,77 6,84 6,76 6,76
6,77 6,75 6,74 6,75 6,77 6,72 6,74 6,80 6,75 6,80
6,78 6,78 6,76 6,77 6,74 6,74 6,77 6,73 6,74 6,77**

Обработка результатов наблюдений.

1. **Найти $x_{\text{наим.}}$ и $x_{\text{наиб.}}$;**
2. **Найти размах варьирования $R = x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим.}}$**
3. **Выбрать число интервалов варьирования среди чисел $V = 7 - 11$;**
4. **Найти длину одного интервала $h = R/V$;**
5. **Найти $x_{\text{начальное}} = x_{\text{наим}} - 0,5h$;**
6. **$x_{\text{конечное}} = x_{\text{наиб}} + 0,5h$;**

Вариационный ряд:

№	интервал	частота	Относительная частота
1	6,67-6,69	1	$1/50=0,02$
2	6,70-6,72	9	$9/50=0,18$
3	6,73-6,75	19	$19/50=0,38$
4	6,76-6,78	18	$18/50=0,36$
5	6,79-6,81	2	$2/50=0,04$
6	6,82-6,84	1	$1/50=0,02$

Определение.

- ***Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений СВ, с соответствующими частотами и относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.***

Выборочные аналоги интегральной и дифференциальной функции распределения.

- Пусть имеется выборочная совокупность значений некоторой СВ объема n и каждому варианту этой совокупности поставлены в соответствие его относительные частоты.
- **Определение.** *Выборочной функцией распределения* называется функция

$$F(x) = \frac{m_x}{n} - \text{выборочный аналог}$$

интегральной функции распределения

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{F}(x + \Delta x) - \hat{F}(x)}{\Delta x} =$$

$$\begin{cases} 0, x < x_i, \\ \frac{\varpi_i}{h}, x_i \leq x \leq x_{i+1}, - \\ 0, x > x_{i+1} \end{cases}$$

– выборочный аналог дифференциальной функции распределения.

Задача 1.1 Построить выборочную функцию распределения: (см. дискретный вариационный ряд задачи 1).

$$n = 60; \quad x < 0 \quad \hat{F}(x) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \quad \hat{F}(x) = \frac{8}{60}$$

$$1 \leq x < 2 \quad \hat{F}(x) = \frac{8}{60} + \frac{17}{60} = \frac{25}{60}$$

$$2 \leq x < 3 \quad \hat{F}(x) = \frac{25}{60} + \frac{16}{60} = \frac{41}{60}$$

$$3 \leq x < 4 \quad \hat{F}(x) = \frac{41}{60} + \frac{10}{60} = \frac{51}{60}$$

$$4 \leq x < 5 \quad \hat{F}(x) = \frac{51}{60} + \frac{6}{60} = \frac{57}{60}$$

$$5 \leq x < 7 \quad \hat{F}(x) = \frac{57}{60} + \frac{2}{60} = \frac{59}{60}$$

$$x \geq 7 \quad \hat{F}(x) = \frac{59}{60} + \frac{1}{60} = 1$$

Задача 2.2. Построить выборочную функцию распределения: (см. интервальный вариационный ряд задачи 2).

$$x \in (-\infty; 6,67) \quad \hat{F}(x) = 0$$

$$x \in [6,67; 6,69) \quad \hat{F}(x) = 0,02$$

$$x \in [6,70; 6,72) \quad \hat{F}(x) = 0,02 + 0,18 = 0,2$$

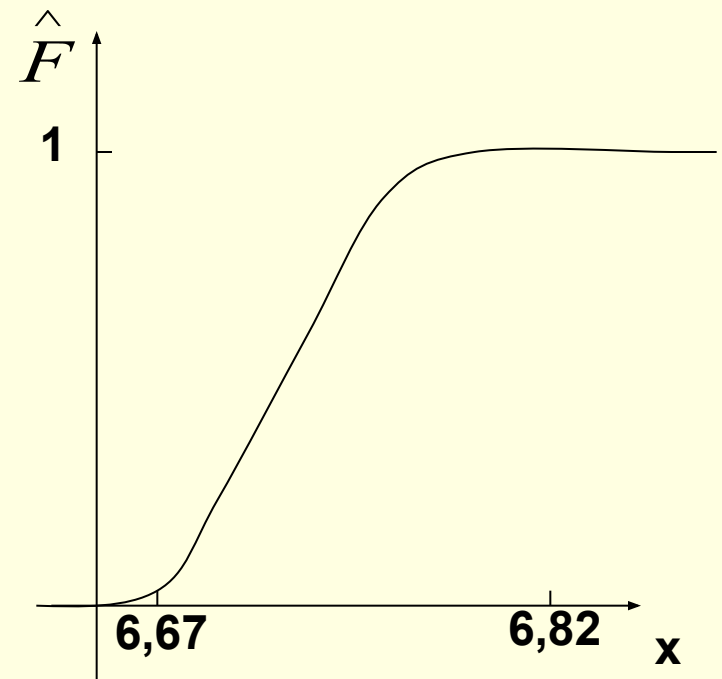
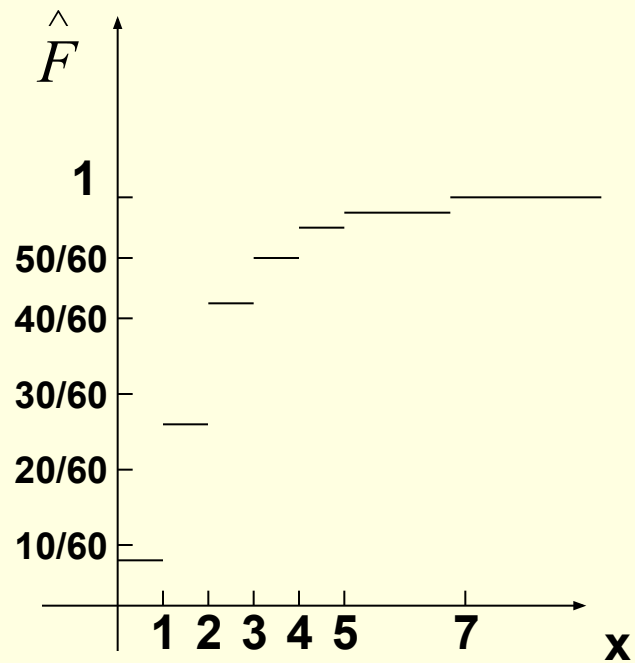
$$x \in [6,73; 6,75) \quad \hat{F}(x) = 0,2 + 0,38 = 0,58$$

$$x \in [6,76; 6,78) \quad \hat{F}(x) = 0,58 + 0,36 = 0,94$$

$$x \in [6,79; 6,81) \quad \hat{F}(x) = 0,94 + 0,04 = 0,98$$

$$x \in [6,82; +\infty) \quad \hat{F}(x) = 0,98 + 0,02 = 1$$

Графики функций:



Статистические характеристики вариационных рядов.

Среднее арифметическое (выборочное среднее).

- **Определение.** Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – данные наблюдений над СВ X .

Средним арифметическим называется частное от деления суммы всех значений СВ на их количество:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Если по данным наблюдений соответствующие частоты величин m_1, m_2, \dots, m_n , то

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{n}$$

Выборочная дисперсия.

- Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений СВ от ее выборочной средней.

$$\overline{DX} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}; \quad \overline{DX} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i}{n}$$

Задача 1.2

$$\bar{X} = \frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{60} = 2$$

$$\overline{DX} = \frac{(0-2)^2 \cdot 8 + (1-2)^2 \cdot 17 + (2-2)^2 \cdot 16 + (3-2)^2 \cdot 10 +$$

$$\frac{(4-2)^2 \cdot 6 + (5-2)^2 \cdot 2 + (7-2)^2 \cdot 1}{60} = 2,1$$

$$\overline{\sigma}_x = \sqrt{\overline{DX}} = 1,45$$

$$\bar{X} = 2 \pm 1,45$$

$$N(2 \pm 1)$$