Изучение уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Виды уравнений и неравенств

- Рациональные
- Иррациональные
- Тригонометрические
- Показательные
- Логарифмические

Рациональные уравнения

Уравнение вида P(x) = 0, где P(x) — целая рациональная функция, называется целым рациональным уравнением.

Линейные уравнения.

Уравнения вида $ax+b=0$, где a и b — некоторые постоянные, называется линейным уравнением.
Если $a\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень: $x = -b/a$.
Если $a=0$; $b\neq 0$, то линейное уравнение решений не имеет.
Если $a=0$; $b=0$, то любое x является решением линейного уравнения.

Пример 1.1.

$2x - 3 + 4(x - 1) = 5.$

Решение.

$2x - 3 + 4x - 4 = 5,$

$2x + 4x = 5 + 4 + 3,$

$6x = 12,$

$x = 2.$

Ответ: 2.

Пример 1.2.

$2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7.$

Решение.

$2x + 2x - 4x = 3 + 2 - 4 - 7,$

$0x = -6.$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 1.3.

$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(x - 1) + 5.$

Решение.

$2x - 6x + 3 + 6 = 4 - 4x + 5,$

$-4x + 9 = 9 - 4x,$

$-4x + 4x = 9 - 9,$

$0x = 0.$

Ответ: Любое число.

Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — некоторые числа ($a \neq 0$);
x — переменная, называется квадратным уравнением.

Формула решения квадратного уравнения.

для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант

$D = b^2 - 4ac$.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственное решение:

$X = -b / (2a)$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

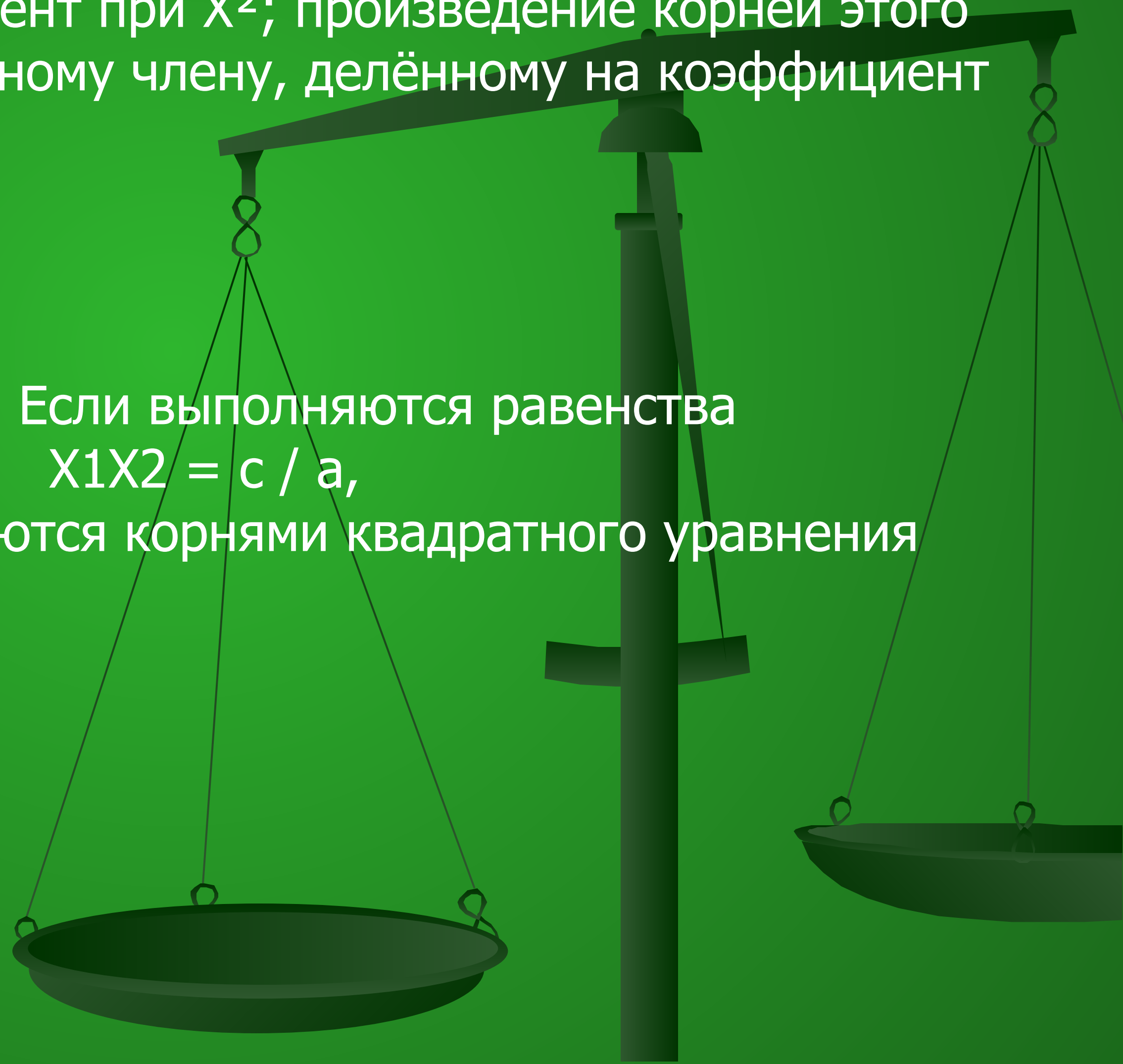
$X1 = (-b + \sqrt{D}) / (2a)$; $X2 = (-b - \sqrt{D}) / (2a)$.

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.

Теорема Виета.

Теорема 1 (Виета). Сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при X, взятому с противоположным знаком и делённому на коэффициент при X^2; произведение корней этого уравнения равно свободному члену, делённому на коэффициент при X^2.

Теорема 2 (обратная). Если выполняются равенства
$X1 + X2 = -b / a$ и $X1X2 = c / a$,
то числа X1 и X2 являются корнями квадратного уравнения
$ax^2 + bx + c = 0$.



Пример

Решить уравнение

А) $2x^2 + 5x - 1 = 0$.

Решение

. $D = 25 - 4 \cdot 2(-1) = 33 > 0$;

$X_1 = (-5 + \sqrt{33}) / 4$; $X_2 = (-5 - \sqrt{33}) / 4$.

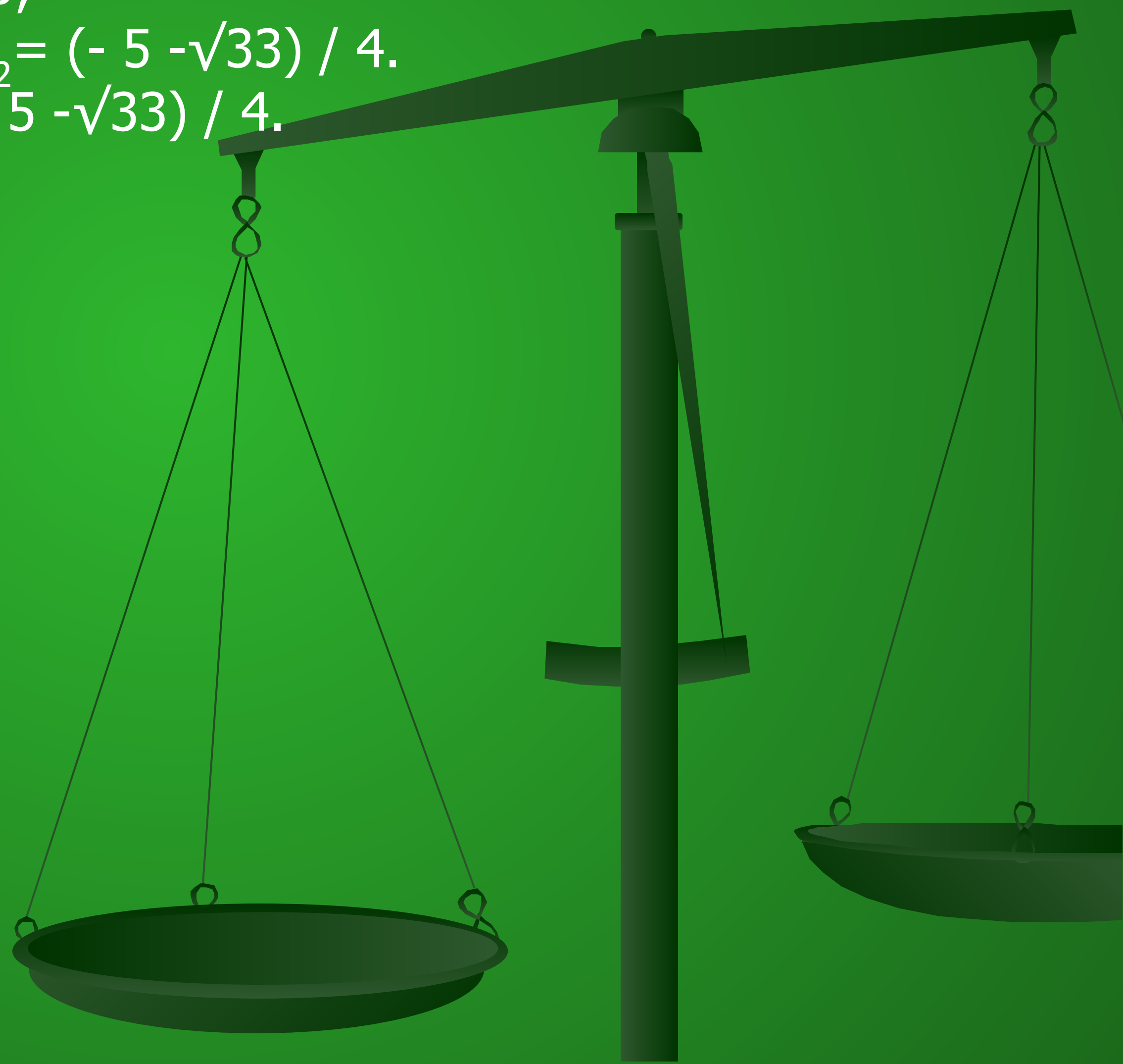
Ответ: $(-5 + \sqrt{33}) / 4$; $(-5 - \sqrt{33}) / 4$.

Б) $x^2 - 9x + 20 = 0$

$x_1 + x_2 = 9$ и $x_1 x_2 = 20$

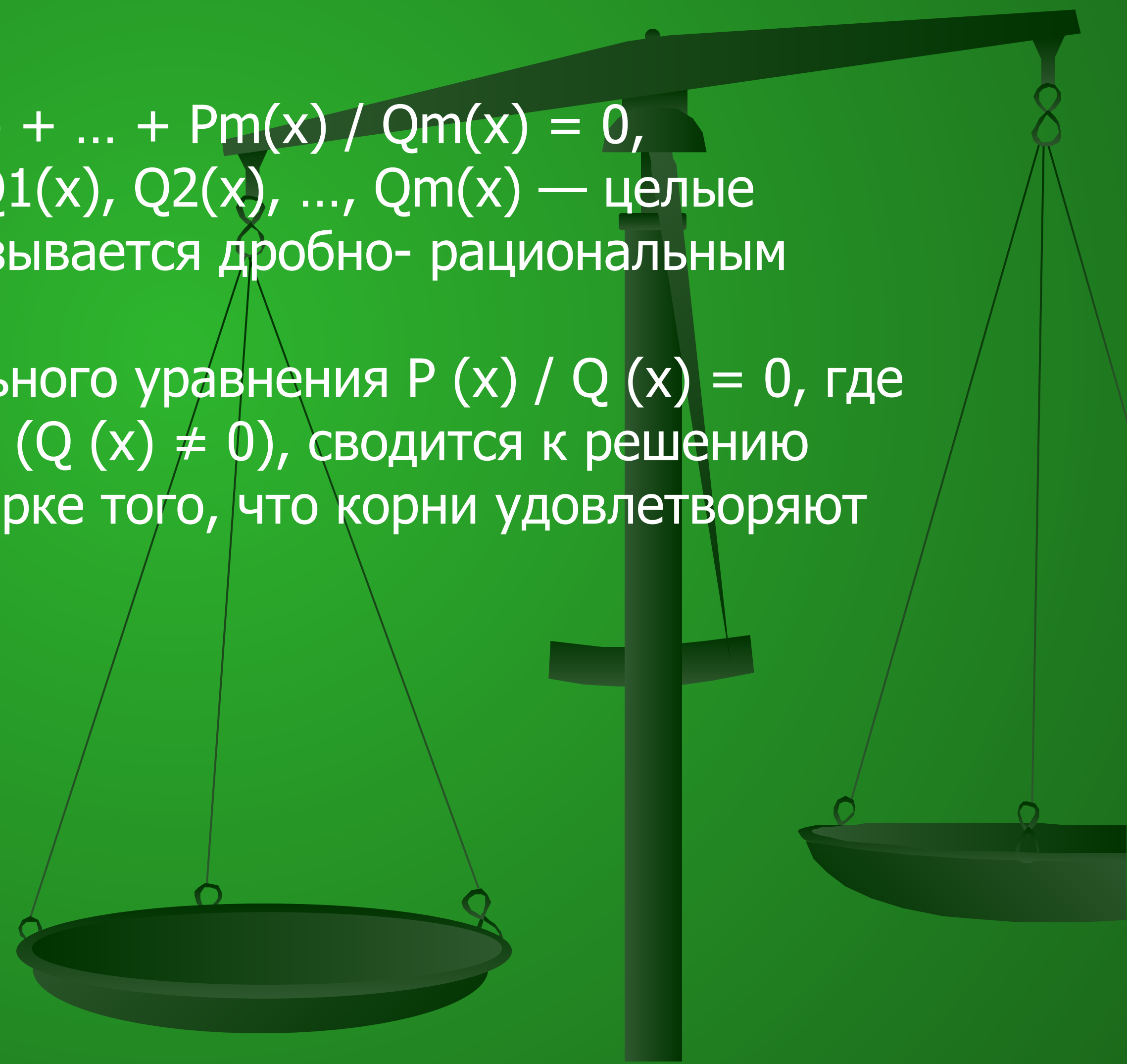
$x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

Ответ : 4; 5.



Дробно-рациональные

Уравнение вида
$P1(x) / Q1(x) + P2(x) / Q2(x) + \ldots + Pm(x) / Qm(x) = 0$,
где $P1(x)$, $P2(x)$, … ,$Pm(x)$, $Q1(x)$, $Q2(x)$, …, $Qm(x)$ — целые рациональные функции, называется дробно- рациональным уравнением.
Решение дробно- рационального уравнения $P (x) / Q (x) = 0$, где $P (x)$ и $Q (x)$ — многочлены ($Q (x) \neq 0$), сводится к решению уравнения $P (x) = 0$ и проверке того, что корни удовлетворяют условию $Q (x) \neq 0$.



Решить уравнение
$(x^3 - 27) / (x - 3) = 27$
Решение.
Разложим числитель на множители (по формуле разности кубов):
$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) / (x - 3) = 27$.
Отсюда:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 9 = 27, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2 + 3x - 18 = 0$ имеет корни $X1 = 3$; $X2 = -6$
($X1$ не входит в область допустимых значений).
Ответ: -6

Неравенства

Неравенства

линейные

квадратные

рациональные

Линейные неравенства

- ***Линейным неравенством с одной переменной х называется неравенство вида $ax + b > 0$, где $a \neq 0$.***
- ***Решение неравенства – значение переменной х, которое обращает неравенство в верное числовое неравенство.***
- ***Множество частных решений называют общим решением.***

Два неравенства $f(x)<g(x)$ и $r(x)<s(x)$ называют равносильными, если они имеют одинаковые решения.

Правила

(преобразования неравенств, приводящие к равносильным неравенствам):

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства)

Например: $3x + 5 < 7x$

$$3x + 5 - 7x < 0$$

2: а) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же **положительное число**, не меняя при этом знака неравенства.

б) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **выражение, положительное при любых значениях переменной**, и сохранить знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Например: а) $8x - 12 > 4x^2$

$2x - 3 > x^2$

б) $(2x + 1)(x^2 + 2) < 0$

$2x + 1 < 0$

3.а) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же **отрицательное число**, изменив при этом знак неравенства на противоположный ($<$ на $>$, $>$ на $<$).

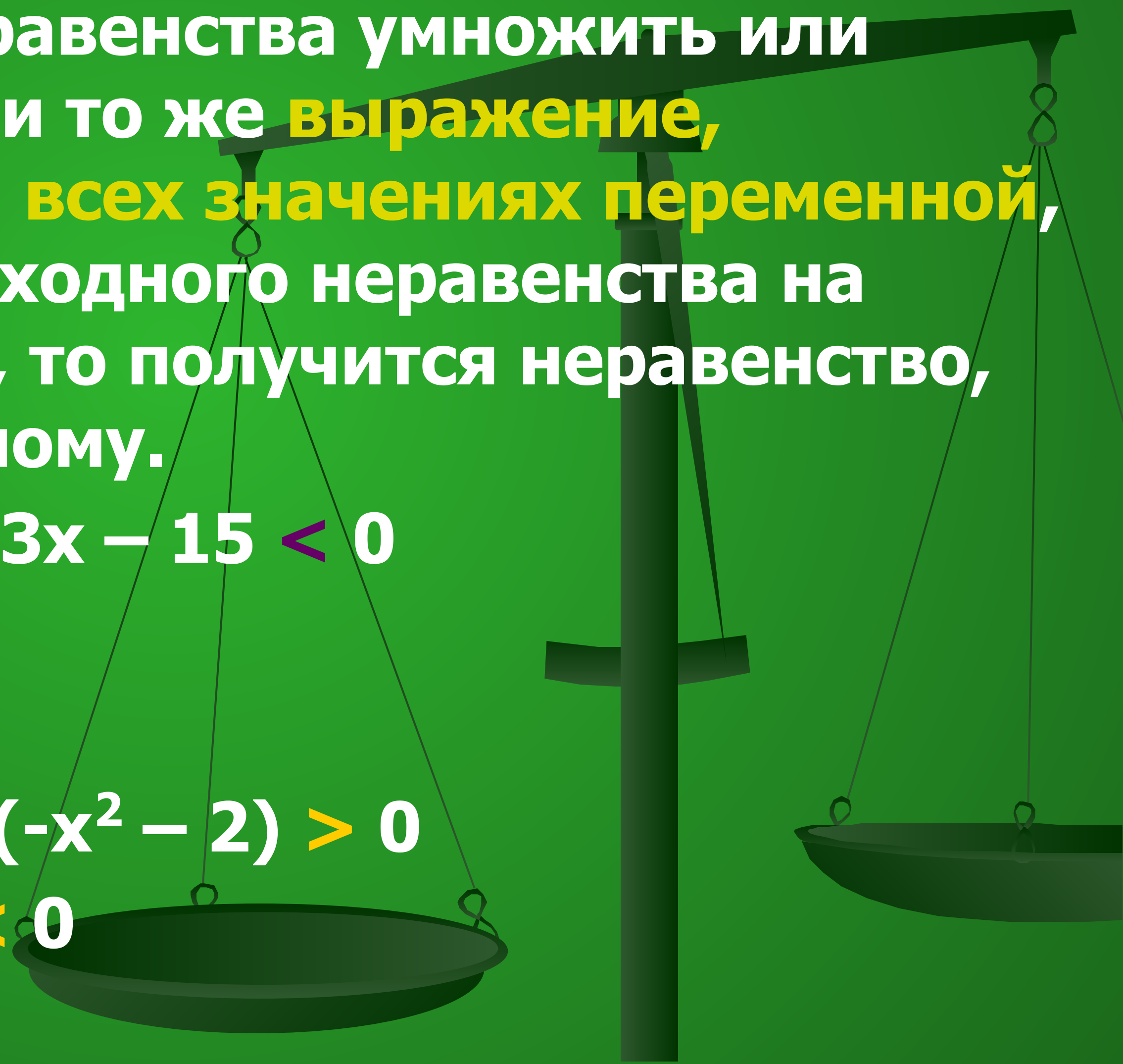
б) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **выражение, отрицательное при всех значениях переменной**, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Например: а) $-6x^3 + 3x - 15 < 0$

$$2x^3 - x + 5 > 0$$

б) $(3x - 4)(-x^2 - 2) > 0$

$$3x - 4 < 0$$



Решите неравенство:

$5x + 3(2x – 1) > 13x - 1$

Решение: $5x + 6x – 3 > 13x – 1$

$5x + 6x – 13x > 3 – 1$

$-2x > 2$

$x < -1$

Ответ: $(-\infty; -1)$

Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$, a,b,c - некоторые числа, называются квадратными.

- Методы решения
  - графический
  - интервалов

Алгоритм применения графического метода:

1. **Найти корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, т.е. решить уравнение $ax^2+bx+c=0$.**

2.Отметить найденные значения на оси х в координатной плоскости.

3. Схематично построить график параболы.

4. Записать ответ в соответствии со знаком неравенства.

Частные случаи при $D < 0$:

а) $a < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ **нет решений**

$ax^2 + bx + c < 0$ $(-\infty;+\infty)$

б) $a > 0$ $ax^2 + bx + c > 0$ $(-\infty;+\infty)$

$ax^2 + bx + c \leq 0$ **нет решений**

Алгоритм выполнения метода интервалов:

- 1. Разложить на множители квадратный трехчлен, используя формулу $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1,x_2- корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.
- 2. Отметить на числовой прямой корни x_1 и x_2.
- 3. Определить знак выражения $a(x-x_1)(x-x_2)$ на каждом из получившихся промежутков.
- 4. Записать ответ, выбрав промежутки с соответствующим знаку неравенства знаком

(если знак неравенства <,то выбираем промежутки со знаком «-», если знак неравенства >, то выбираем промежутки со знаком «+»).

Решите неравенство: $x^2 - 6x + 8 > 0$

- **Решение:** **Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ на множители. Решим уравнение**

$x^2 - 6x + 8 = 0$

Д = 36 – 32 = 4, 4>0, два корня

$x_{1/2} = (6 \pm 2) : 2$ $x_1 = 4,$ $x_2 = 2$

$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$

Отметим на числовой прямой корни трехчлена 2 и 4.Определим знаки выражения (x-2)(x-4) на каждом из промежутков.

+ 2 - 4 +

Ответ: $x<2, x>4$ или $(-\infty;2) \cup (4;+\infty)$.

Решение рационального неравенства

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$$

сводится к решению эквивалентного неравенства

$$P_n(x) \times Q_m(x) > 0,$$

Пример:

Решить неравенство $\dfrac{x+2}{x^2-x-2} < -1.$

Решение:

Данное неравенство равносильно неравенству $x^2(x^2 - x - 2) < 0$.

Множество решений последнего неравенства находится методом интервалов: $(-1;0)\cup(0;2)$.

Ответ: $(-1;0)\cup(0;2)$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение A (x) = B (x), в котором хотя бы одно из выражений A(x), B(x) иррационально, называется *иррациональным.*

Примерами таких уравнений могут служить

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}=7, \qquad \sqrt{x^2-9}=\sqrt{x^2+9}-10=0$$

Уравнение же $\sqrt{2}x^4+\sqrt[5]{3}x^4+\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}}=0$

Рационально, поскольку в нём x не находится под знаком корня.

Понятия ***корня уравнения и его решения*** для иррациональных уравнений определяют так же, как и для рациональных.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как правило , иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства.

1. $$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

Замечание. Из двух систем выбирают ту. которая решается проще.

Пример. $$\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2-5x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=x^2-5x-2, \\ 3-x\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5, \\ x\leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-1, \end{array} \right. \\ x\leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.

$$\sqrt{f(x)} = a$$

если a < 0, уравнение не имеет корней.

если a >= 0, уравнение равносильно уравнению f (x) = a^2.

Замечание. Иногда иррациональное уравнение можно свести к приведённому виду с помощью введения новой переменной.

Пример. $x - \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow (x+1) - \sqrt{x+1} - 6 = 0$

$$z = \sqrt{x+1}, \qquad z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2, \\ z = 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = -2, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней, корень второго уравнения

x = 8.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$3.\ \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Пример. $$\sqrt{7-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 7-x = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

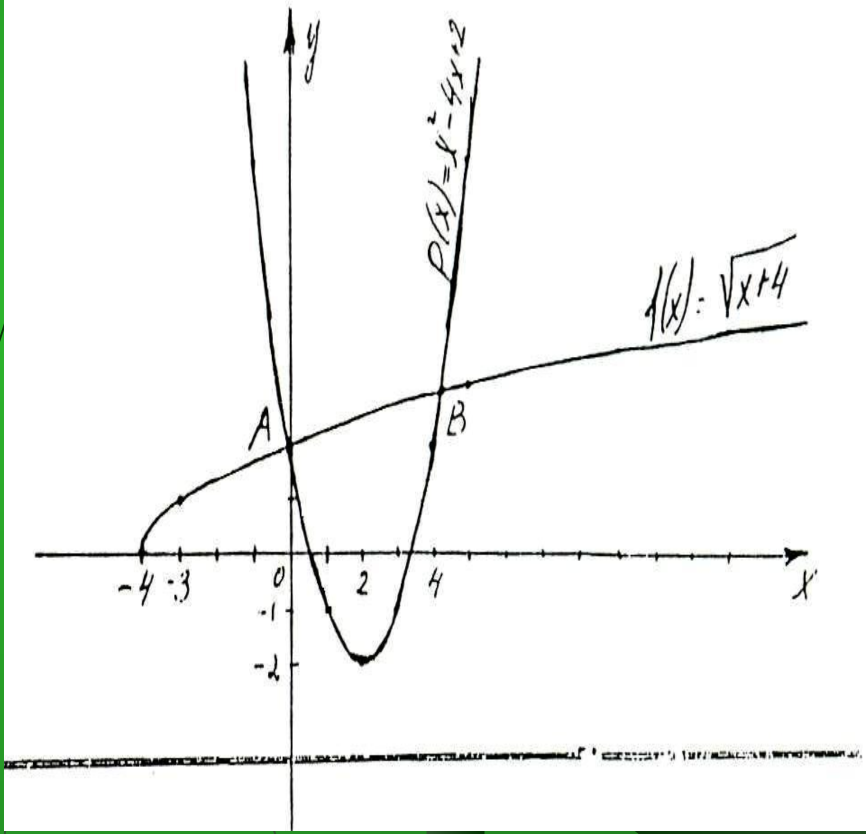
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Графический метод

Решите графически уравнение $\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2$

Решение: В одной системе координат построим графики функций $f(x) = \sqrt{x+4}$

и $p(x) = x^2 - 4x + 2$.



Графики пересекаются в двух точках А и В.
Данное уравнение имеет два корня.

$x_1 \approx 0, \;\; x^2 \approx 4{,}2$

«Найди О.Д.З.»

$$\sqrt{x-3}-6\sqrt{2-x}=18$$

«Выполни замену»

$$\sqrt{x^2-3x}=x^2-3x-2$$

«Умножай на сопряжённое выражение»

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$$

«Переходи к модулю»

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=6$$

Иррациональные неравенства

Решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что неравенства $A(x) < B(x)$ и
$A^n(x) < B^n(x)$ не являются равносильными:
Ведь только для неотрицательных чисел a и b из $a < b$ следует $a^n < b^n$, а из $a^n < b^n$ следует $a < b$.
Поэтому при решении иррациональных неравенств надо учитывать знаки его левой и правой частей.

Как правило , иррациональное неравенство сводится
к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

Иррациональные неравенства

$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x0. \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x). \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$	$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$

Пример

$$\sqrt{2x-5} > -4;$$

ОДЗ: $2x - 5 \geq 0; x \geq 2{,}5$

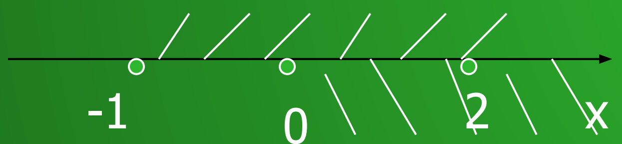
$$x \in [2{,}5; +\infty)$$

Ответ: $[2{,}5; +\infty)$

Пример

$\sqrt{x+2} > x$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x < 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 > x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$

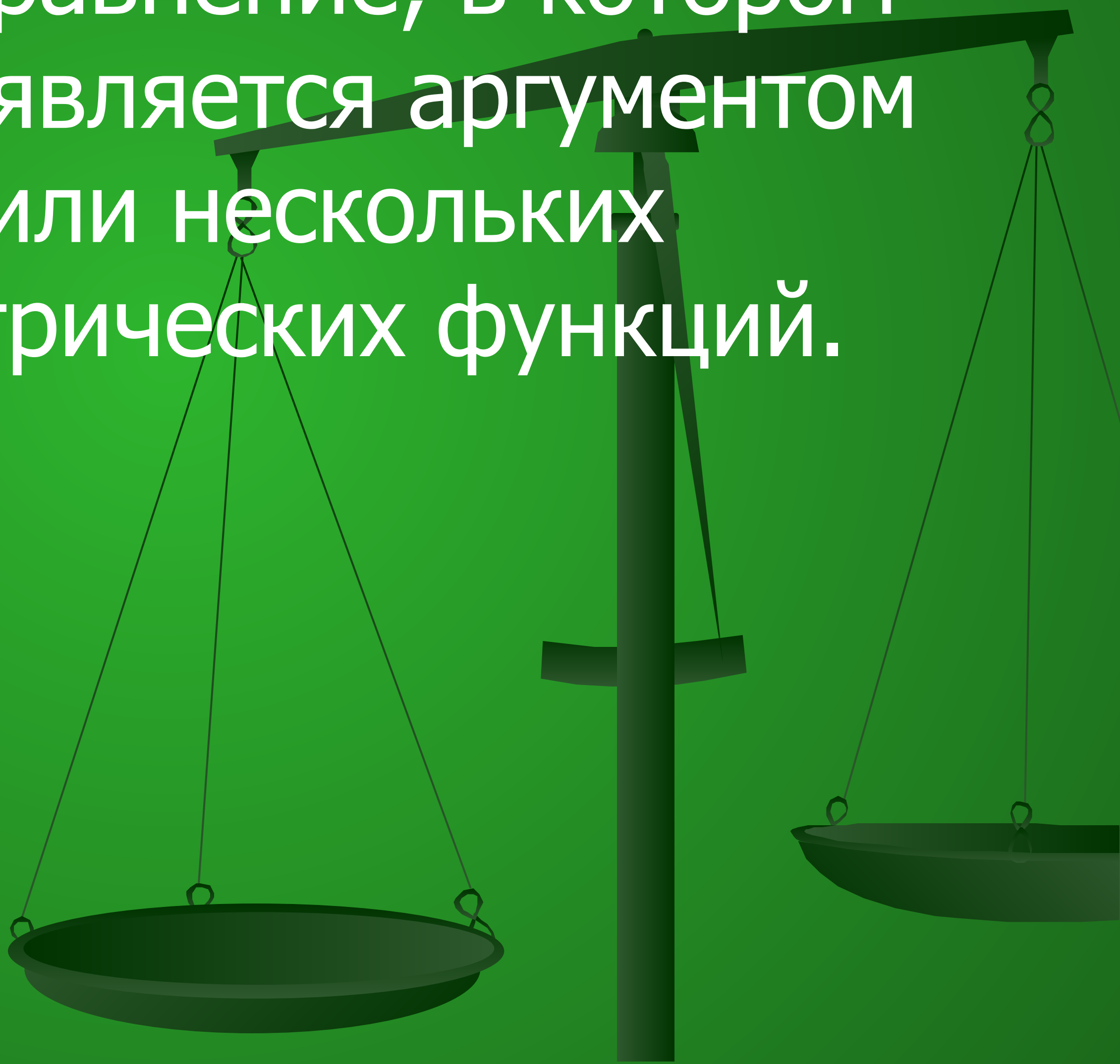


$-2 \leq x < 0$ или $\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases}$

Следовательно: $x \in [-2; 2)$

Ответ: $[-2; 2)$

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором переменная является аргументом одной или нескольких тригонометрических функций.



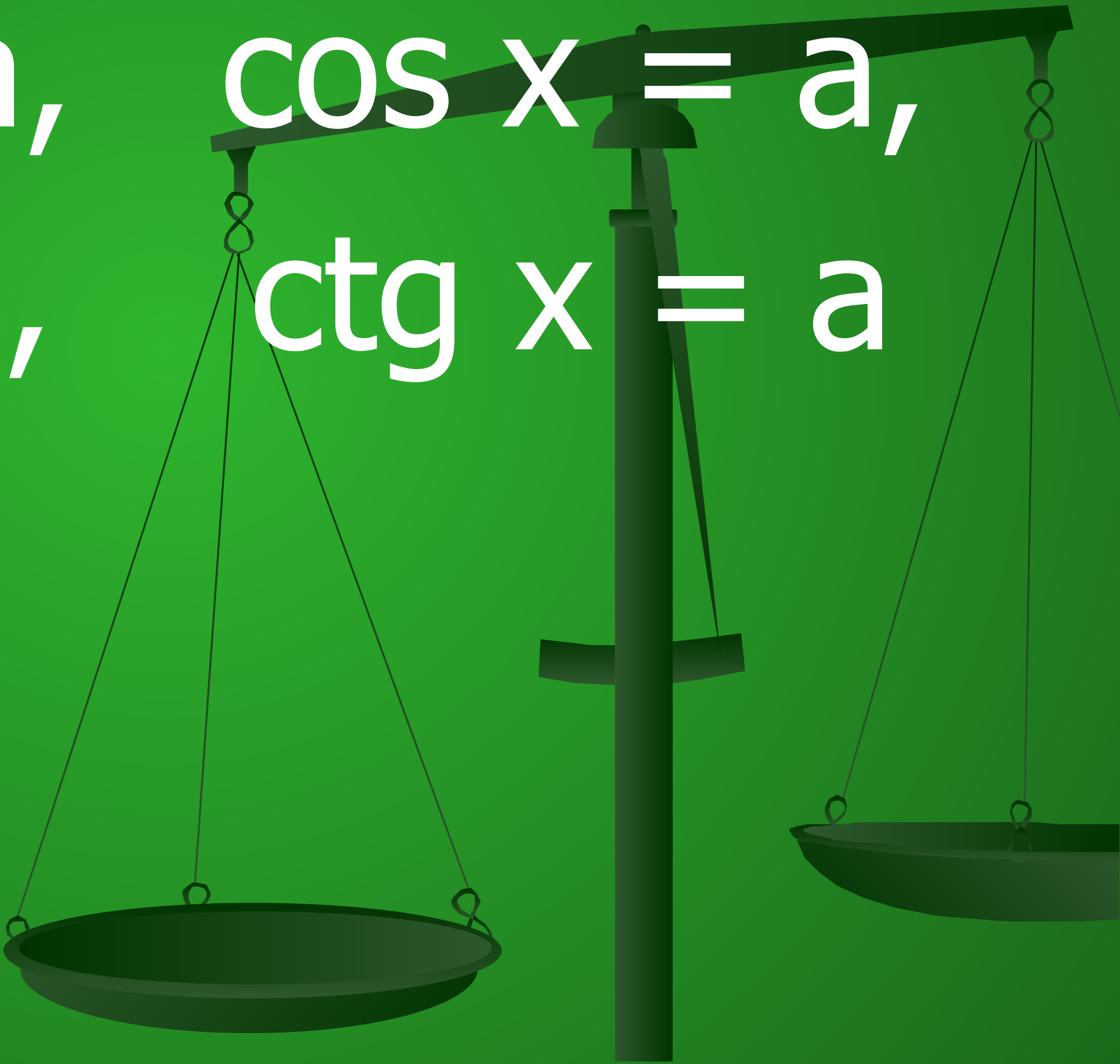
Основные типы тригонометрических уравнений

- Однородные тригонометрические уравнения первой степени
- Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени
- Однородные уравнения второй степени и уравнения, приводящиеся к ним
- Уравнения, приводящиеся к квадратному относительно функции **sin x** или **cos x**

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a,\quad \cos x = a,$

$\operatorname{tg} x = a,\quad \operatorname{ctg} x = a$



Решение уравнений с помощью формул

- $\sin x = a$, $\cos x = a$
- $x = (-1)^n \arcsin a + \Pi n.$ $x = \pm \arccos a + 2\Pi n.$
- **$\sin x = 0$** $\cos x = 0$
- $x = \Pi n.$ $x = \Pi/2 + \Pi n.$
- $\sin x = 1$ $\cos x = 1$
- $x = \Pi/2 + 2\Pi n.$ $x = 2\Pi n.$
- $\sin x = -1$ $\cos x = -1$
- $x = -\Pi/2 + 2\Pi n.$ $x = \Pi + 2\Pi n.$
- $\mathrm{tg}\, x = a$ $x = \mathrm{arctg}\, a + \Pi n.$

Решить уравнение 2cos2x=-1

- Решение.
- 2cos2x=-1
- cos2x=-1/2
- 2x=+(п-arccos1/2)+2Пn
- 2x=+(П-П/3)+2Пn
- 2x=+2П/3+2Пn
- x=+П/3+Пn, n-целое число.
- Ответ: +П/3+Пn, n - целое число.

Решить уравнение tg(3x- П/3)=-1

- Решение.
- $tg(3x-\pi/3)=-1$
- $3x-\pi/3=-arctg1+\pi n$
- $3x-\pi/3=-\pi/4+\pi n$
- $3x=-\pi/4+\pi/3+\pi n$
- $3x=\pi/12+\pi n$
- $x=\pi/36+\pi n/3$, n- целое число.
- Ответ: $\pi/36+\pi n/3$, n-целое число.

Однородные тригонометрические уравнения первой степени

$$a\sin x + b\cos x = 0, \quad a \neq 0, \ b \neq 0.$$

Делением на cos x такое уравнение сводится к линейному уравнению относительно tg x. При использовании этого приема не происходит потери решения, хотя ОДЗ при таком преобразовании сужается.

Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени

$$a\sin x + b\cos x = c,$$

$$a \neq 0,\ b \neq 0.$$

При решении уравнений такого вида применяется метод вспомогательного угла.

Однородные уравнения второй степени и уравнения, приводящиеся к ним

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$$a \neq 0,\ c \neq 0.$$

Делением на **$\cos^2 x \neq 0$** это уравнение приводится к квадратному относительно функции tg x :

$$a\, tg^2 x + b\, tgx + c = 0.$$

Метод введения новой переменной

$tgx/2+3ctgx/\ 2=4.$

$y=tgx/2,$

$y+3/y=4,$

$y2+3=4y,$

$y2-4y+3=0,$

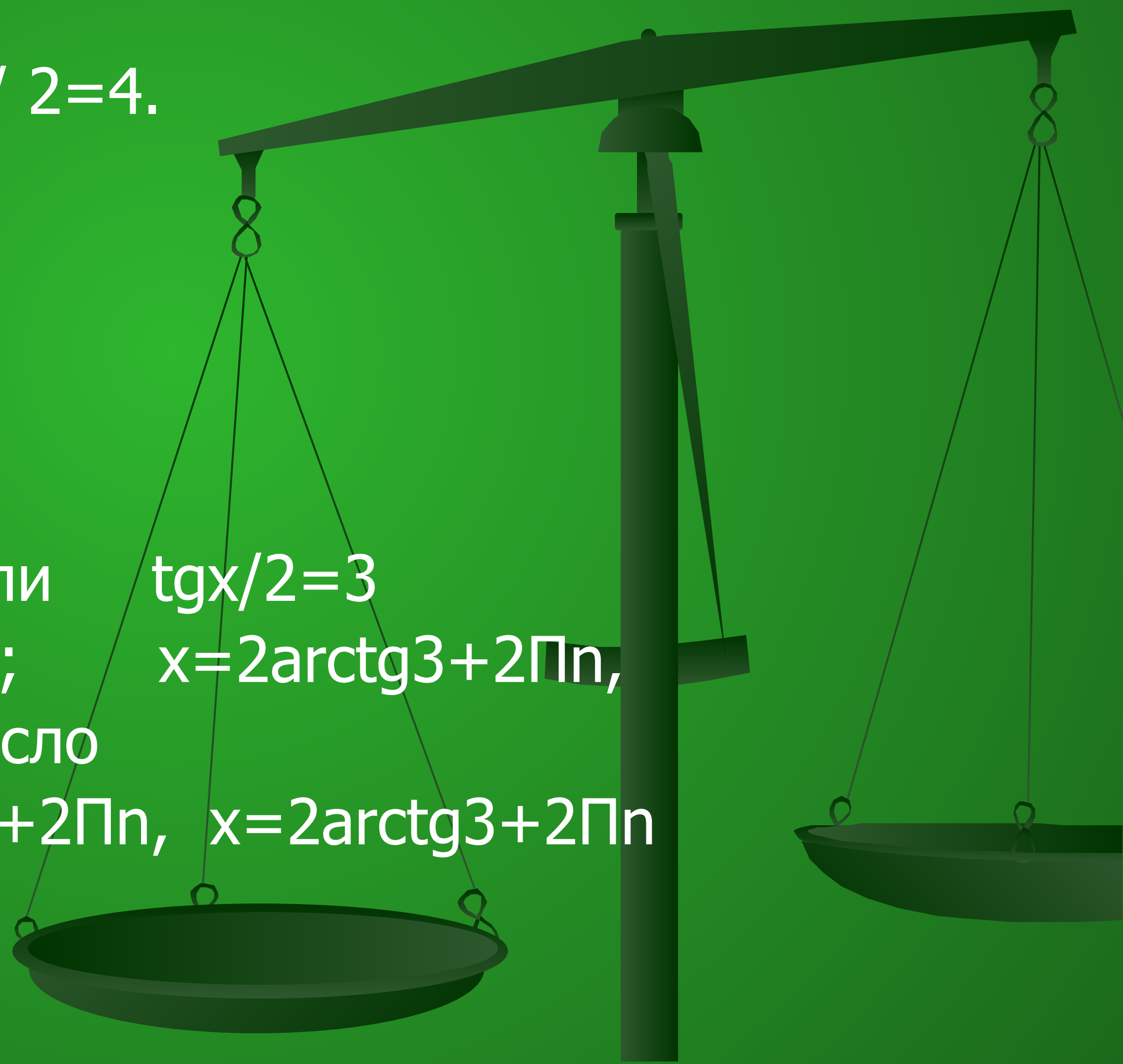
$y=1,\ y=3.$

$tgx/2=1$ или $tgx/2=3$

$x=П/2+2Пn;$ $x=2arctg3+2Пn,$

n-целое число

Ответ: $x=\ П/2+2Пn,\ \ x=2arctg3+2Пn$



МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ.

Решить уравнение 2sinxcos5x-cos5x=0.

Решение.

2sinxcos5x-cos5x=0

cos5x(2sinx-1)=0

cos5x=0; sinx=1/2,

5x=П/2+Пn; x=(-1)n П/6+Пn,

x=П/10+Пn/5; x=(-1)n П/6+Пn, -целое число.

Ответ:x=П/10+Пn/5, x=(-1)n П/6+Пn, -целое число.

Решить уравнение $2\sin^2x-5\sin x+2=0$.

- Решение.

- $2\sin^2x-5\sin x+2=0$
- $\sin x=t$
- $2t^2-5t+2=0$
- $t=2$, $t=1/2$
- $\sin x=2$, $\sin x=1/2$.
- Уравнение $\sin x=2$ не имеет решений.
- $\sin x=1/2$
- $X=(-1)^n П/6+Пn$, n-целое число.
- Ответ: $(-1)^n П/6+Пn$, n-целое число.

Решение простейших тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называют неравенства вида

$$\sin t \geq a \, (\sin t \leq a)$$

$$\cos t \geq a \, (\cos t \leq a)$$

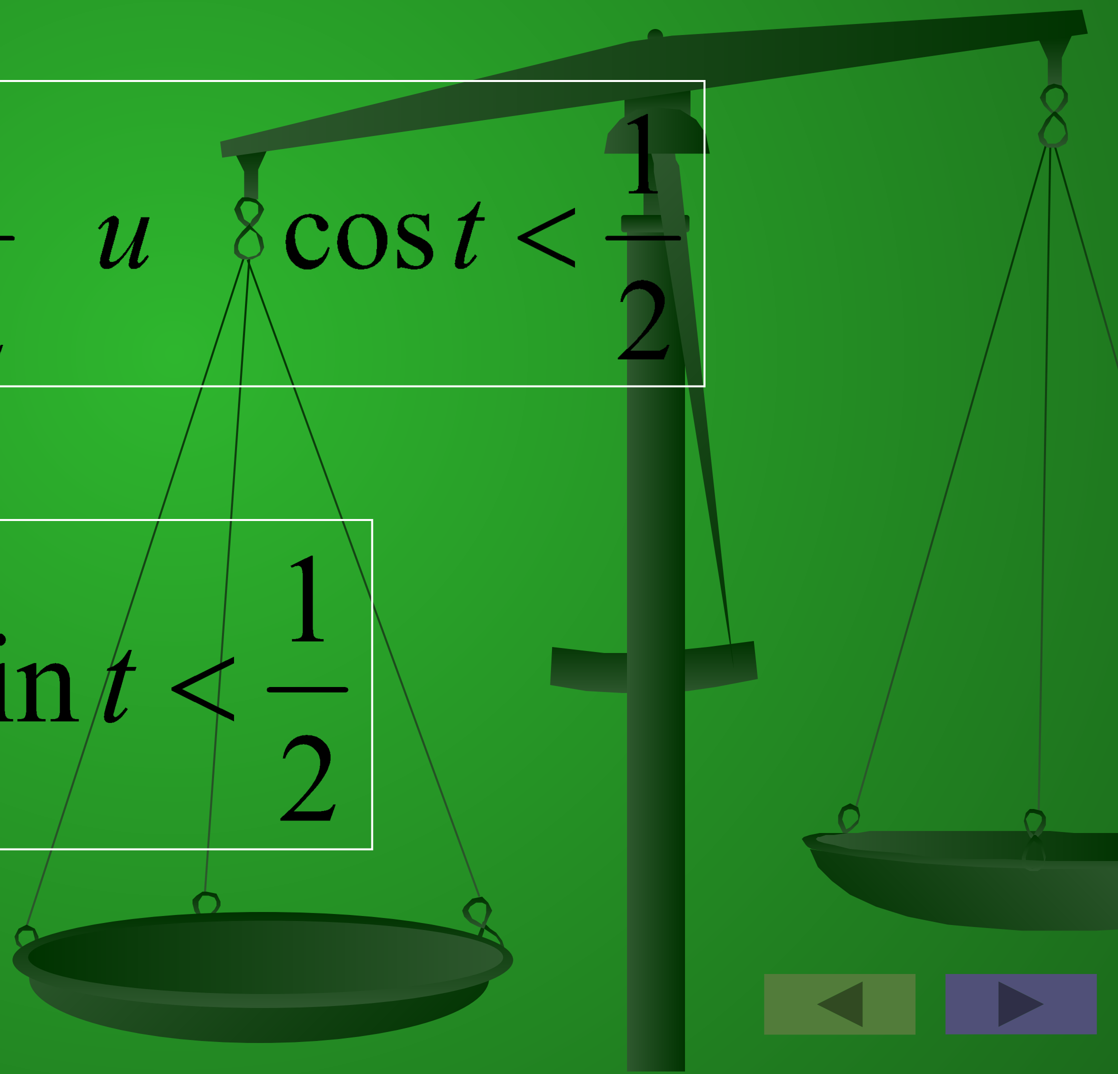
$$tg\, t \geq a \, (tg\, t \leq a)$$

$$ctg\, t \geq a \, (ctg\, t \leq a)$$

Рассмотрим решения неравенств вида:

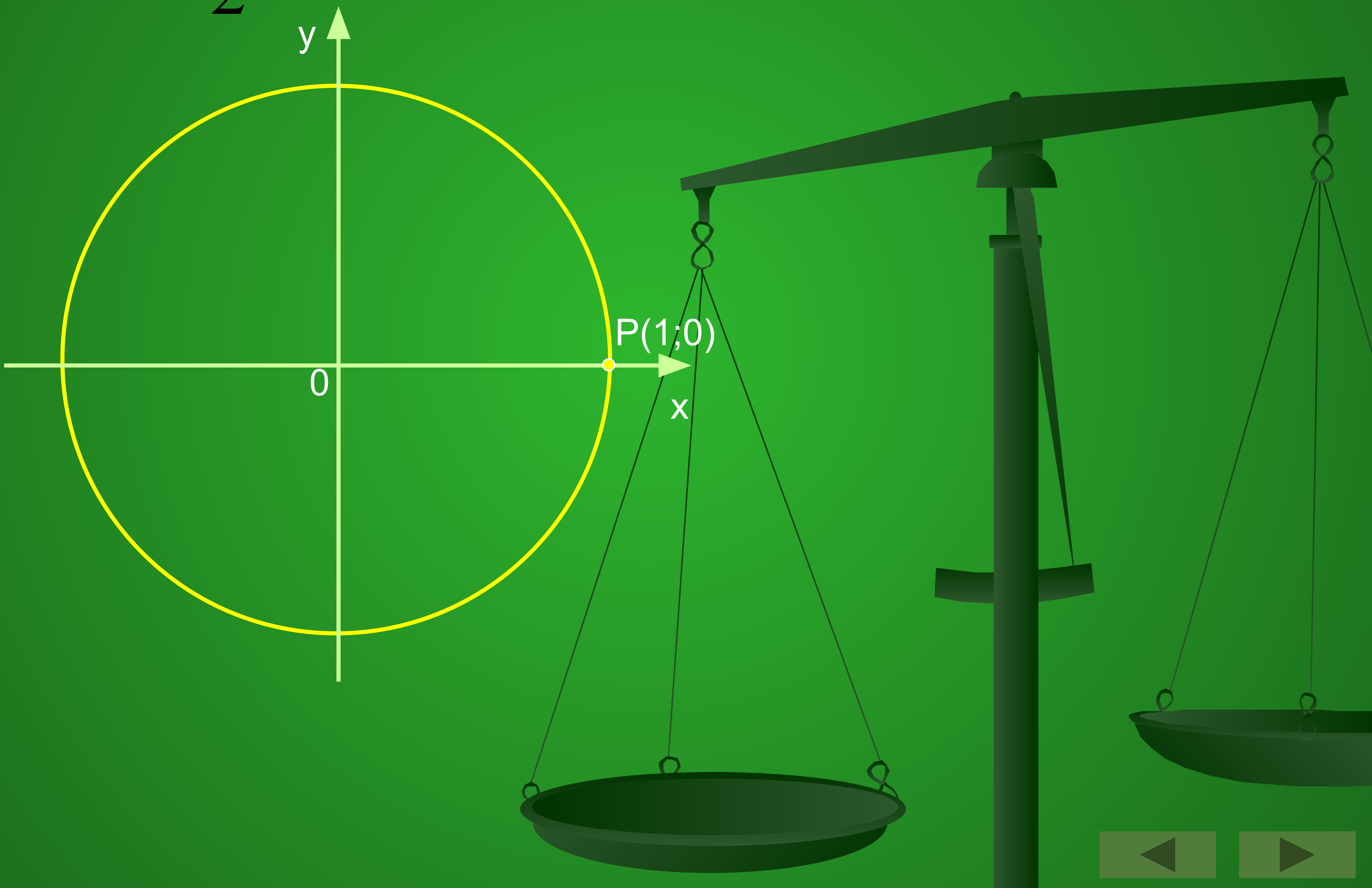
$$\cos t \geq \frac{1}{2} \quad и \quad \cos t < \frac{1}{2}$$

$$\sin t < \frac{1}{2}$$



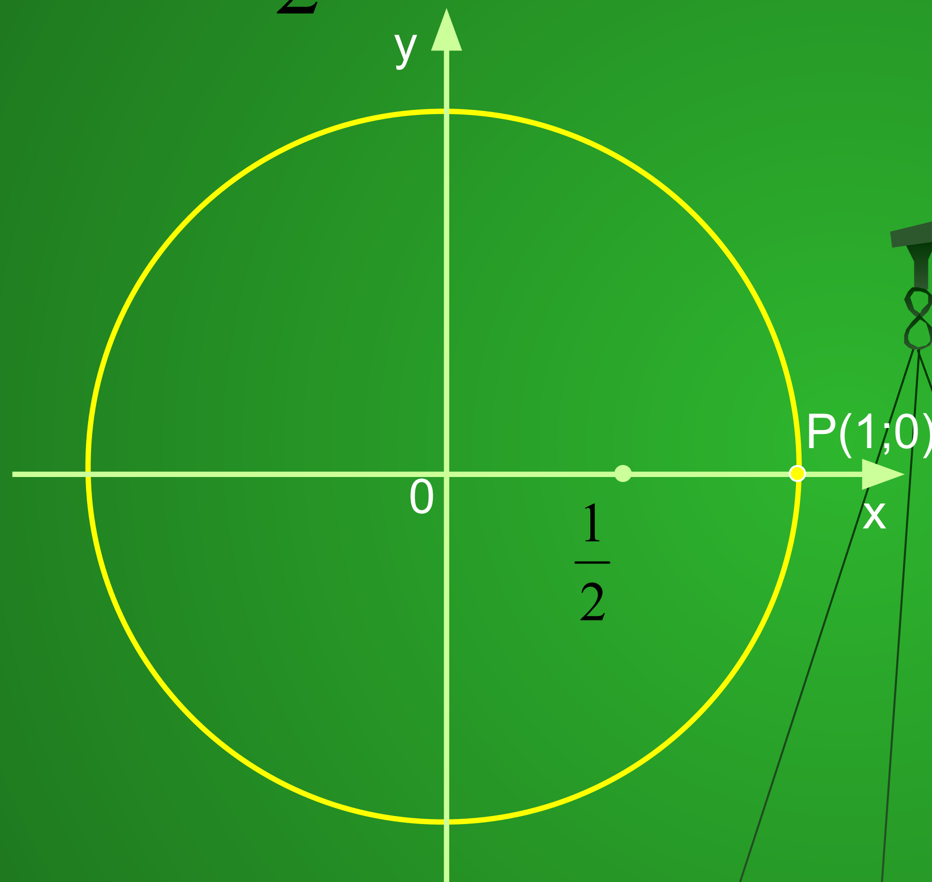
$\cos t \geq \frac{1}{2}$

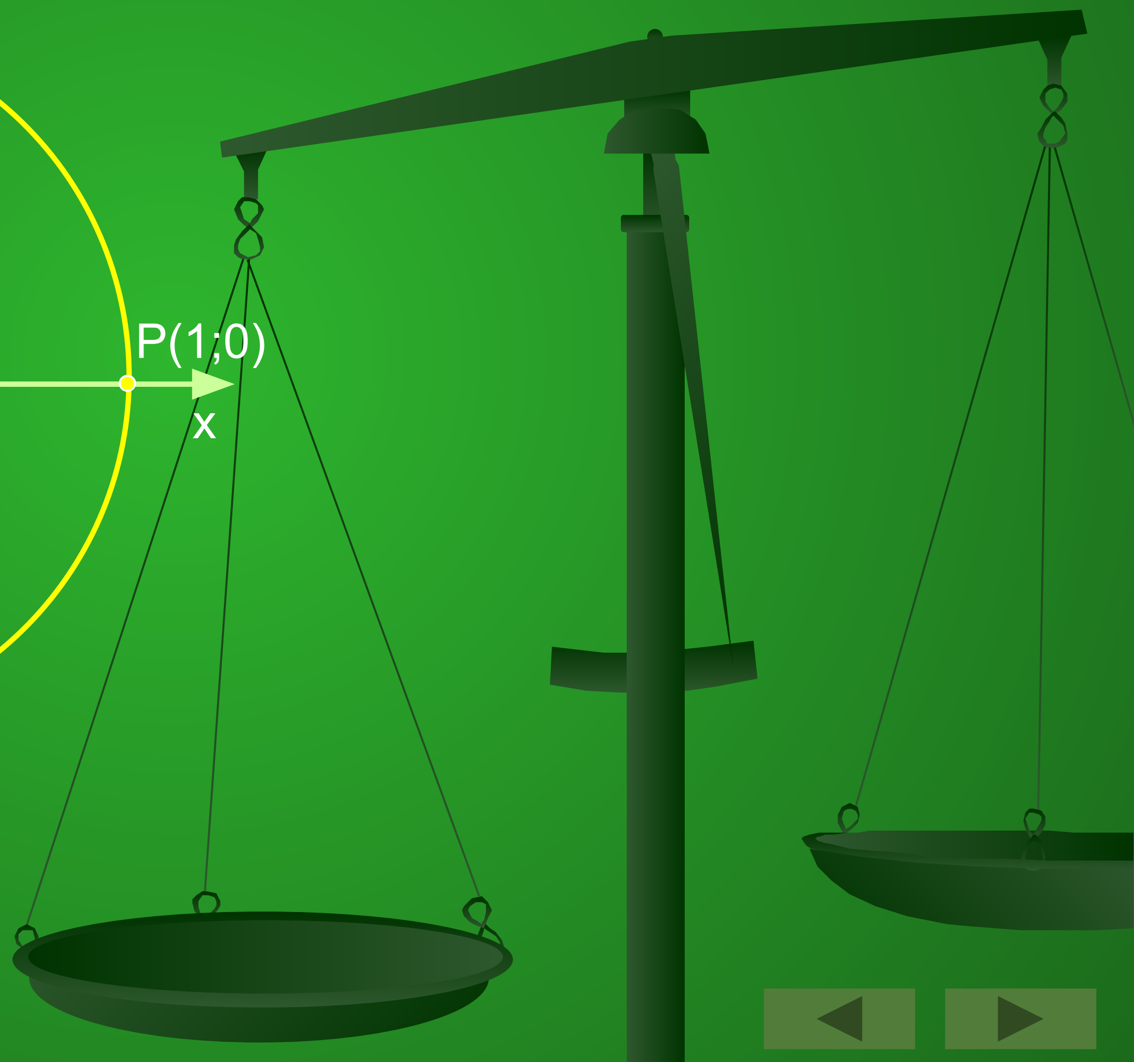
Шаг 1



$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

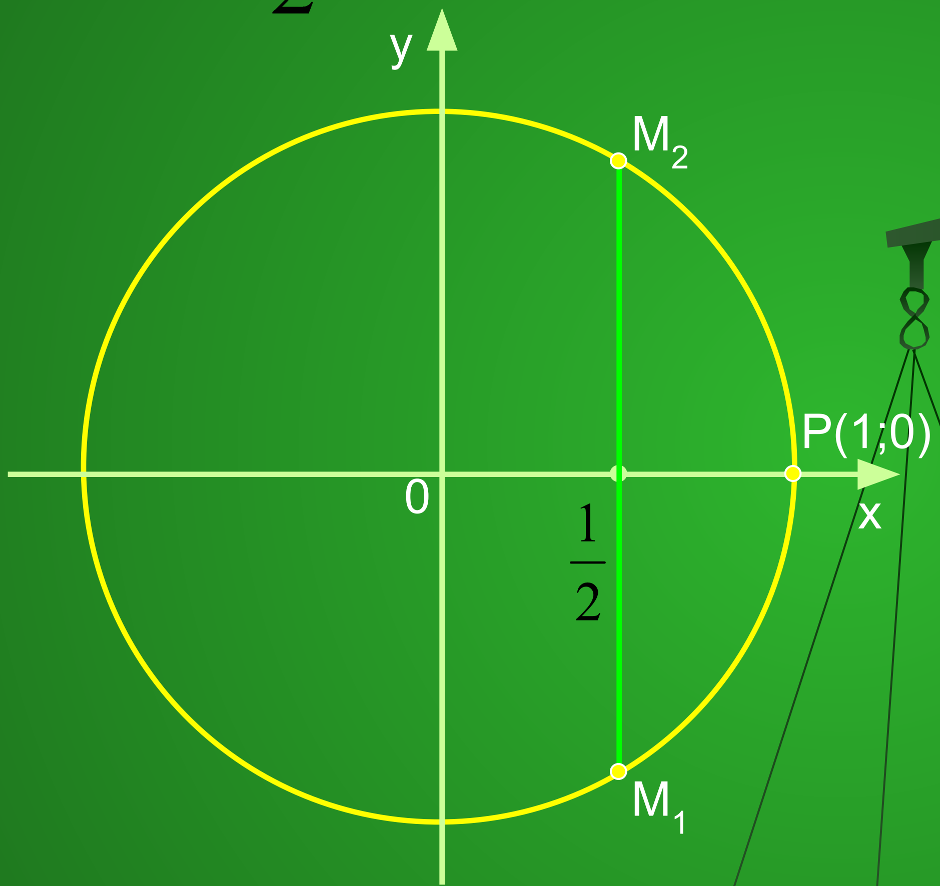
Шаг 2

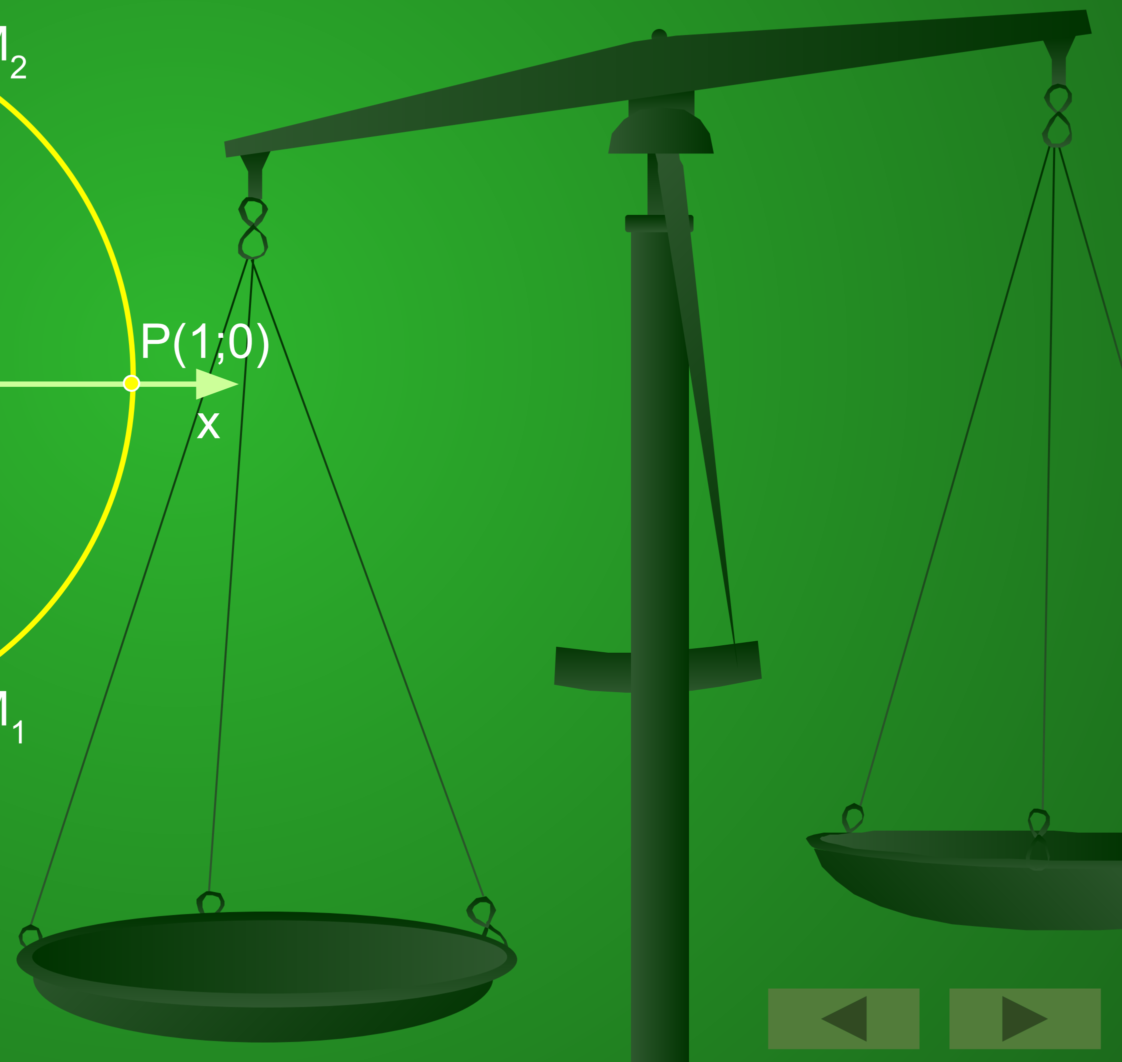




$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

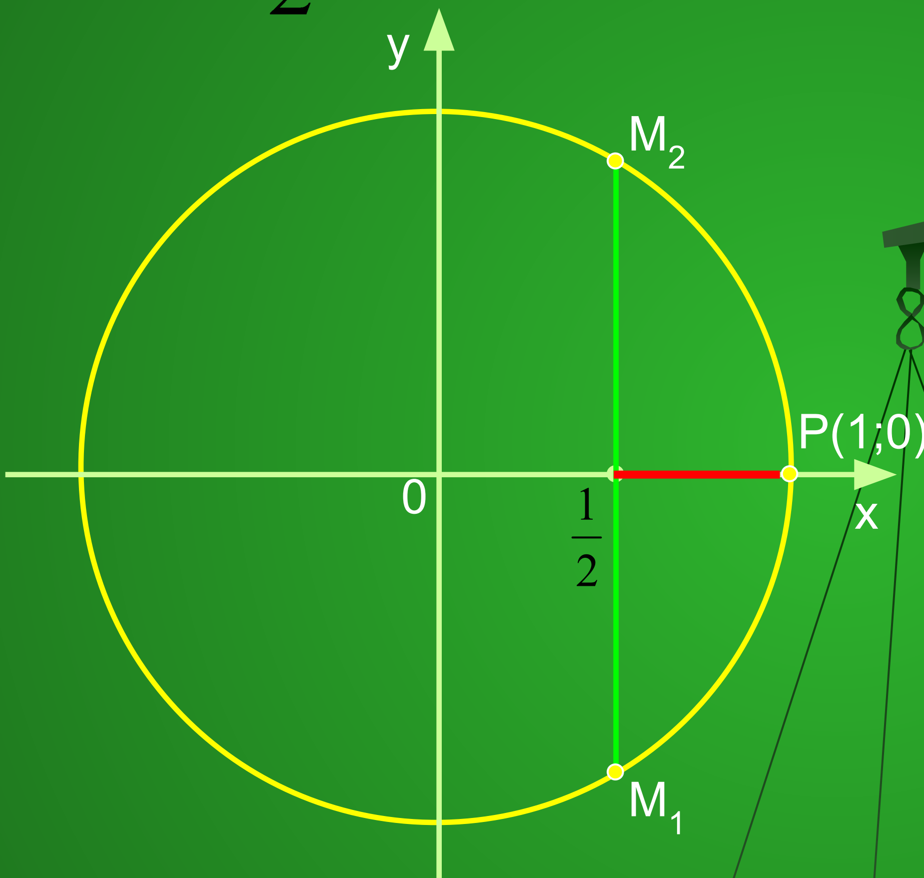
Шаг 3

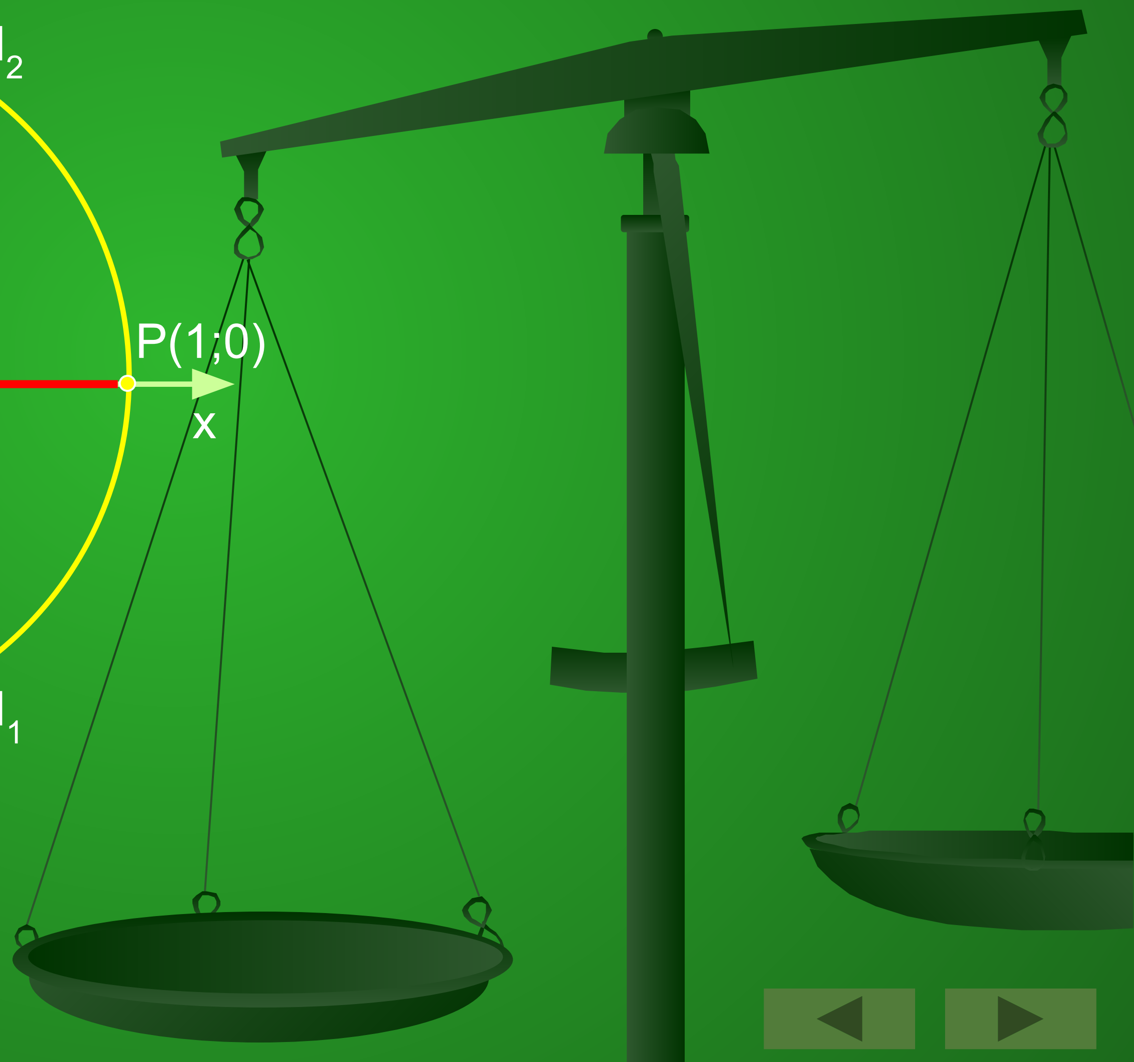




$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

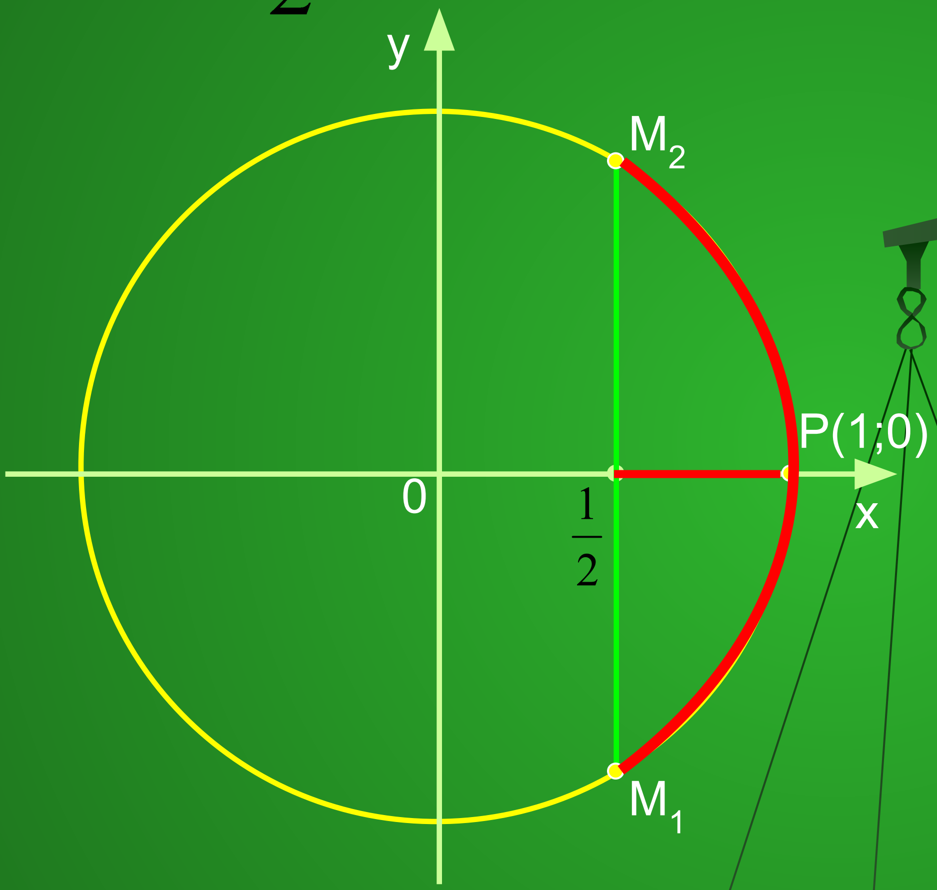
Шаг 4





$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

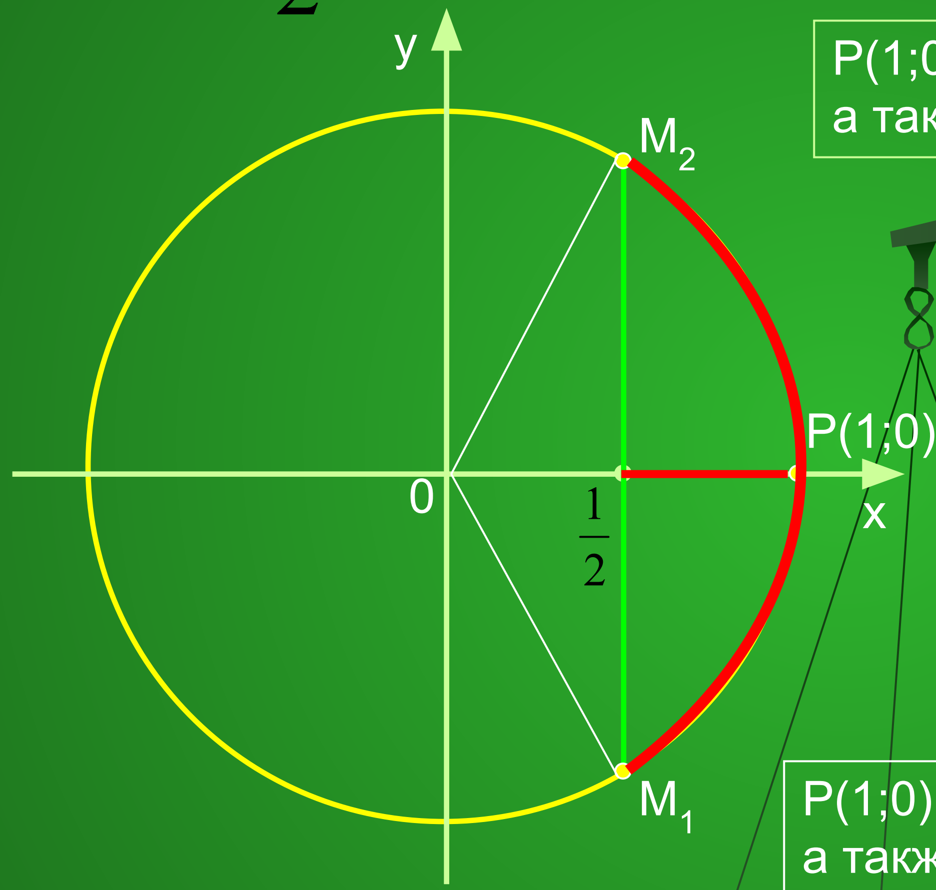
Шаг 5



$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 6

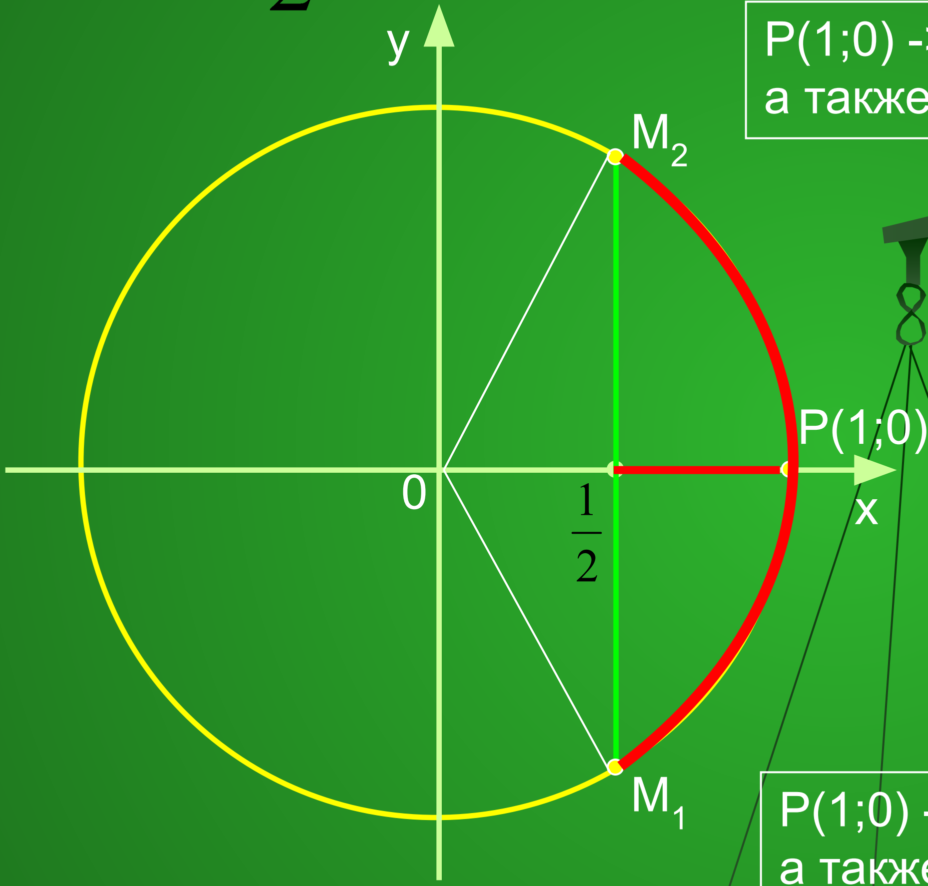
P(1;0) -> M_2 при повороте на угол: $t_2 = \pi/3$, а также на углы: $\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2\ldots$



P(1;0) -> M_1 при повороте на угол: $t_1 = -\pi/3$, а также на углы: $-\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2\ldots$

$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 7



P(1;0) -> M_2 при повороте на угол: $t_2 = \pi/3$, а также на углы: $\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2\ldots$

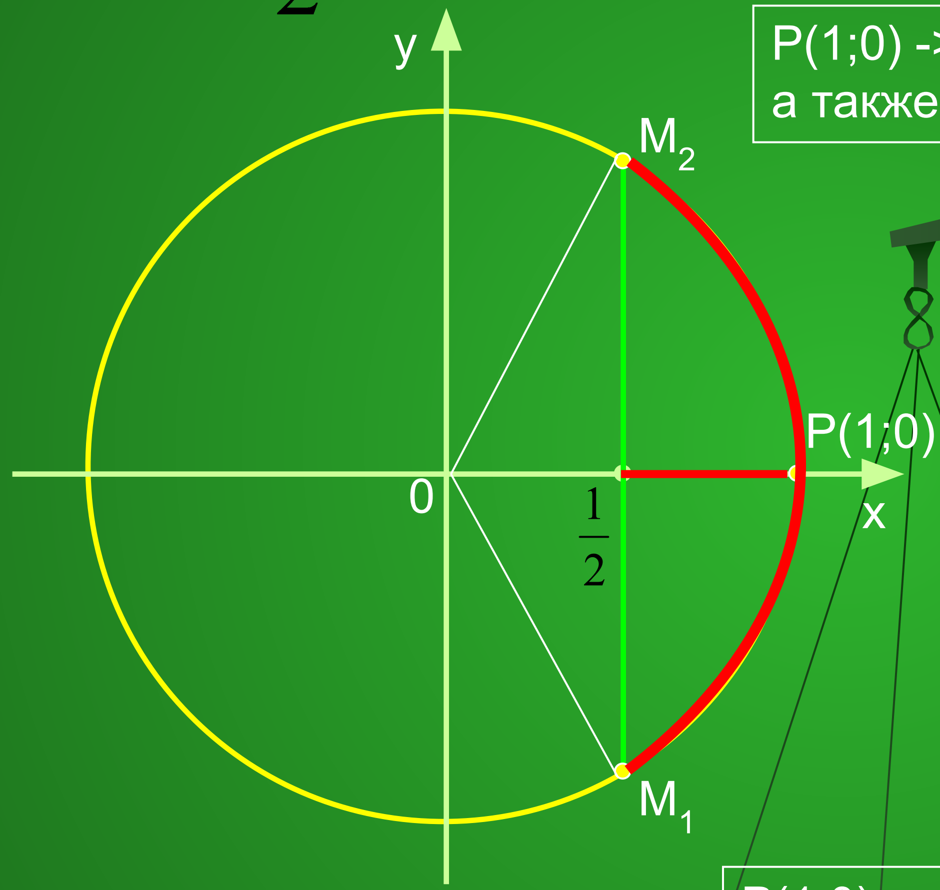
$-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$

P(1;0) -> M_1 при повороте на угол: $t_1 = -\pi/3$, а также на углы: $-\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2\ldots$

$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 8

P(1;0) -> M_2 при повороте на угол: $t_2 = \pi/3$, а также на углы: $\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm1; \pm2\ldots$



$-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$

Все решения данного неравенства – множество промежутков

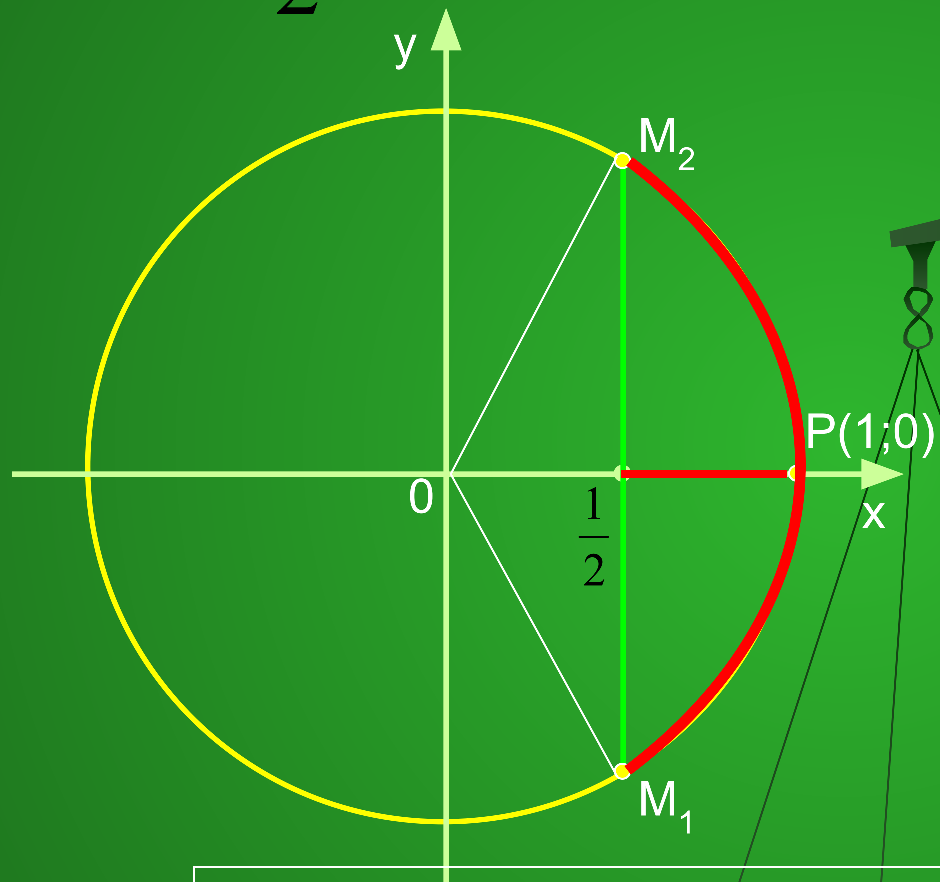
$-\pi/3 + 2\pi n \leq t \leq \pi/3 + 2\pi n$,

n – целое число.

P(1;0) -> M_1 при повороте на угол: $t_1 = -\pi/3$, а также на углы: $-\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm1; \pm2\ldots$

$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 9



Все решения данного неравенства – множество промежутков

-π/3 + 2πn ≤ t ≤ π/3 + 2πn,

n – целое число.

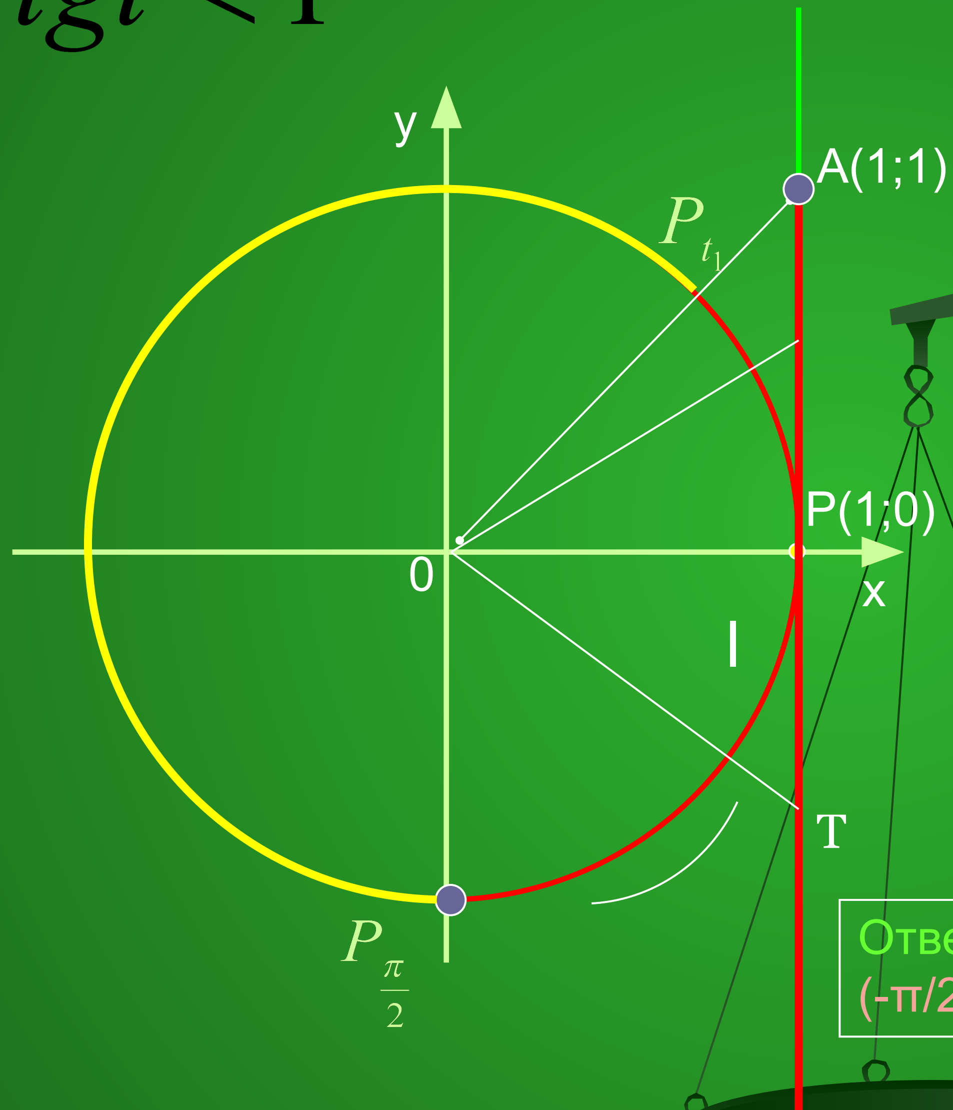
Ответ: -π/3 + 2πn ≤ t ≤ π/3 + 2πn, n – целое число.

Ответ: [-π/3 + 2πn; π/3 + 2πn], n – целое число.

Решите неравенство

$$\operatorname{tg} t < 1$$

$$tgt < 1$$



Ответ:
(-π/2 + πn; π/4 + πn), n – целое число.

Алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств

1. Построить единичную окружность.
2. Отметить число а на соответствующей оси.
3. - Провести прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную оси, на которой она расположена (sin t, cos t).

   - Провести луч из начала координат через полученную точку (tg t).
4. Отметить точки пересечения прямой с окружностью.
5. Определить дугу, точки которой удовлетворяют заданному неравенству.
6. Найти значение углов поворота, соответствующих полученным точкам.
7. Записать ответ, учитывая область значений, область определения и периодичность функции.

Логарифмические уравнения

Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма (в частности, в основании логарифма), называются ***логарифмическими.***

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (a > 0, a = 1)$$

Решение этих уравнений основано на следующей теореме.

Теорема 1. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a = 1)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

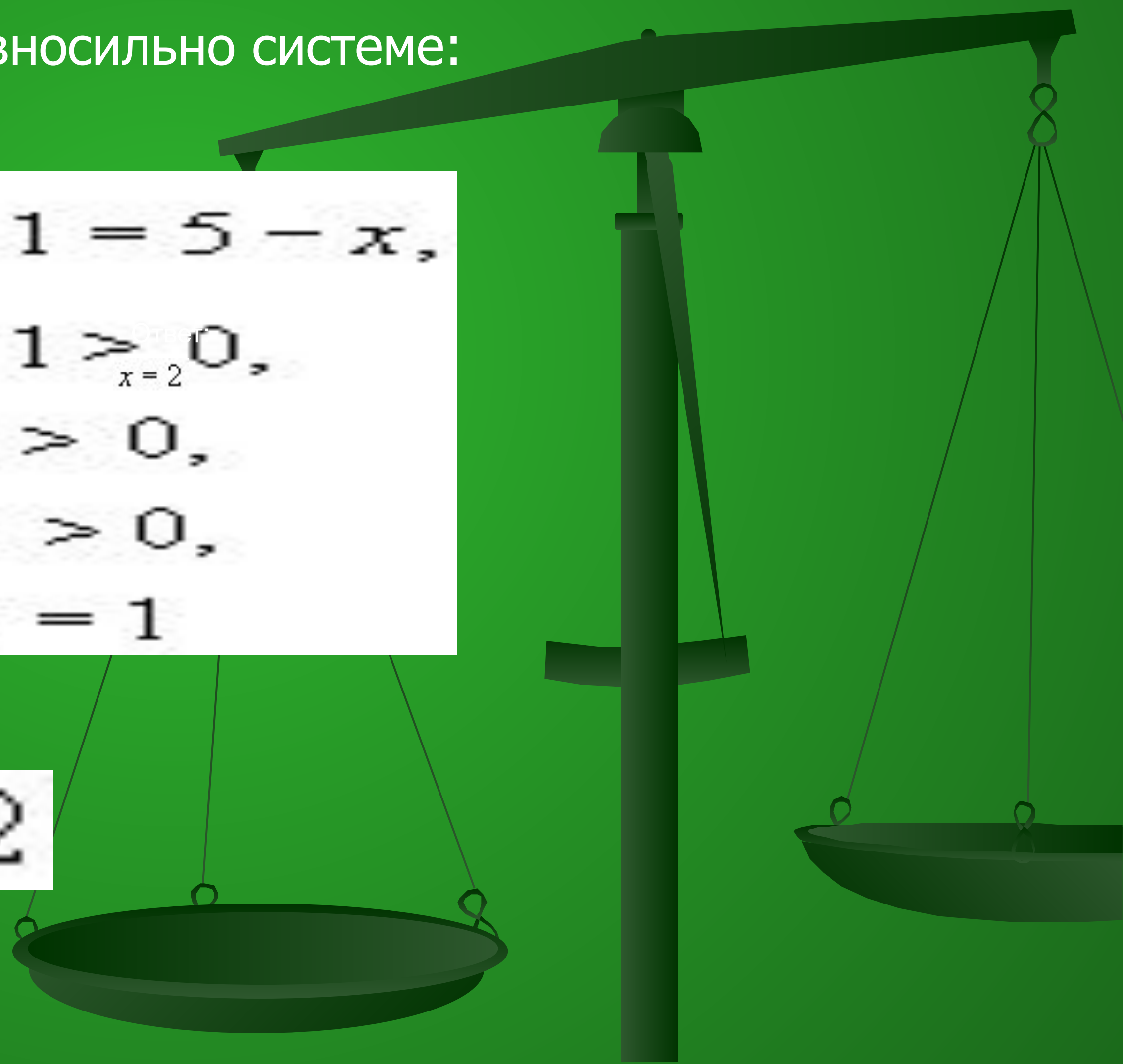
Метод потенцирования

Решить уравнение: $\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}(5-x)$

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4=1 \end{cases}$$

Ответ: $x=2$



Использование определения

$$\left(\log_a b = c, a^c = b\right)$$

Решим уравнение: $\log_{x-1}\left(x^2 - 5x + 10\right) = 2$

Решение.

$$(x-1)^2 = x^2 - 5x + 10,\ (x-1)^2 = x^2 - 5x + 10 \leftrightarrow x = 3$$

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x^2 - 5x + 10 > 0, \\ x - 1 \end{cases}$$

Ответ: 3

Приведение к квадратному

Решить уравнение $$\frac{\lg x^3 - 12}{\lg x} = 5$$

Решение.

$$\frac{3\lg x - 12}{\lg} = 5 \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\lg^2 x - 12 = 5\lg x \\ \lg x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lg^2 x - y5\lg x - y12 = 0 \\ \lg x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = 3 \\ \lg x = -4/3 \\ \\ \lg x = 0 \\ x = 10^{-4/3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1000 \\ \\ x = 10^{-4/3} \end{cases}$$

Ответ: $x = 1000; x = 10^{-4/3}$

Метод логарифмирования

Решить уравнение $x^{\lg x-1}=100$

Решение.

$$\lg x^{\lg x-1}=\lg 100 \Leftrightarrow (\lg x-1)\cdot\lg x=\lg 100 \Leftrightarrow \lg^2 x-\lg x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lg x=2,\\ \lg x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=100\\ x=0.1\end{cases}$$

Ответ: 0,1; 100

Метод введения новой переменной

Решить уравнение $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Решение

Пусть $\log_{16} x = z$, тогда $16^z = x \Leftrightarrow 4^{2z} = x \Leftrightarrow 2^{4z} = x$

Учитывая, что

$$\log_4 x = \log_4 4^{2z} = 2z$$

$$\log_2 x = \log_2 2^{4z} = 4z$$

Получим уравнение $z + 2z + 4z = 7 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow \log_{16} x = 1 \Leftrightarrow x = 16$

Ответ: 16

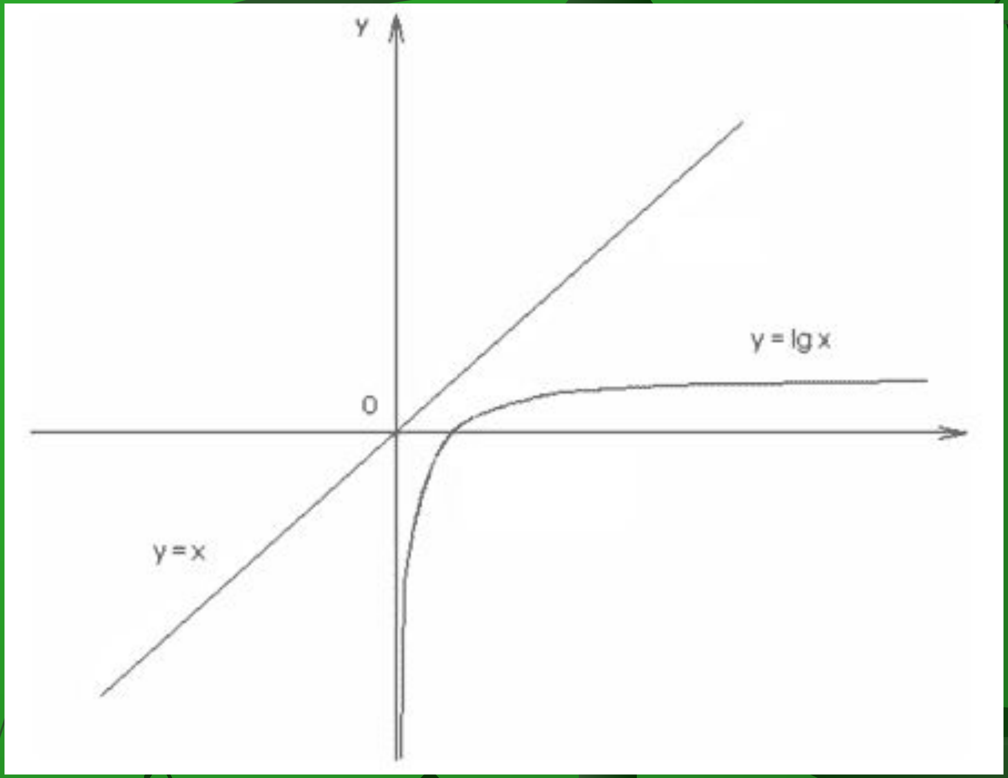
Функционально-графический метод

Решить уравнение $\lg x = x$

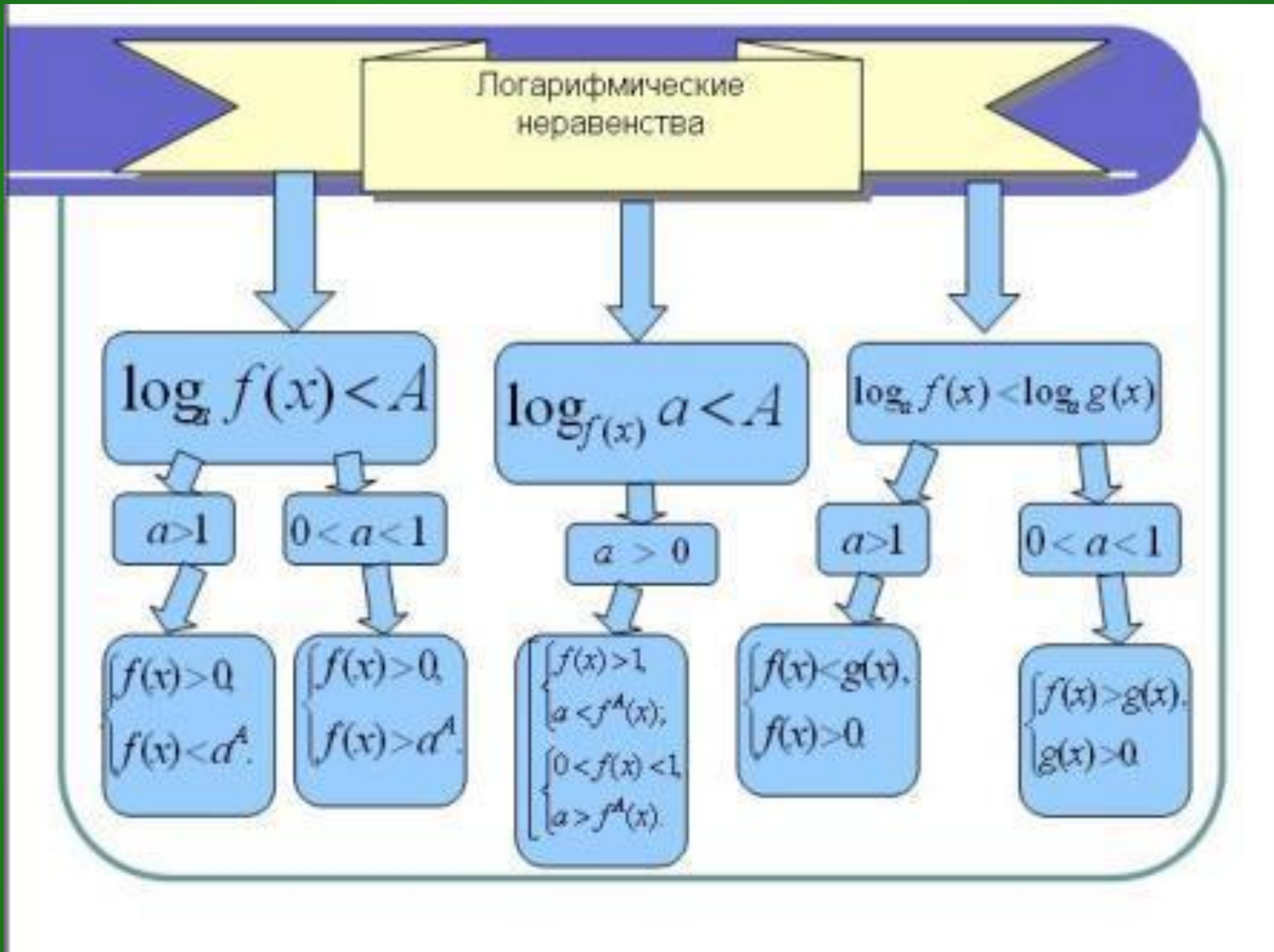
Решение.

Построим графики функций

Y=lg x и y=x



Ответ: корней нет.



Логарифмические неравенства
$\log_a f(x) < A$
$\log_{f(x)} a < A$
$\log_a f(x) < \log_a g(x)$
$a > 1$
$0 < a < 1$
$a > 0$
$a > 1$
$0 < a < 1$
$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^A. \end{cases}$
$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > a^A. \end{cases}$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ a < f^A(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ a > f^A(x). \end{cases} \end{array} \right.$
$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$
$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Логарифмические неравенства

Если $a>1$, то функция $y=\log_a x$ возрастающая, значит, неравенство $\log_a f(x)>b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>a^b & \textit{(знак исходного неравенства сохраняется)} \\ f(x)>0 & \textit{(ОДЗ)} \end{cases}$$

Пример: $\log_2 (7x+1)>3.$

Данное неравенство равносильно системе:

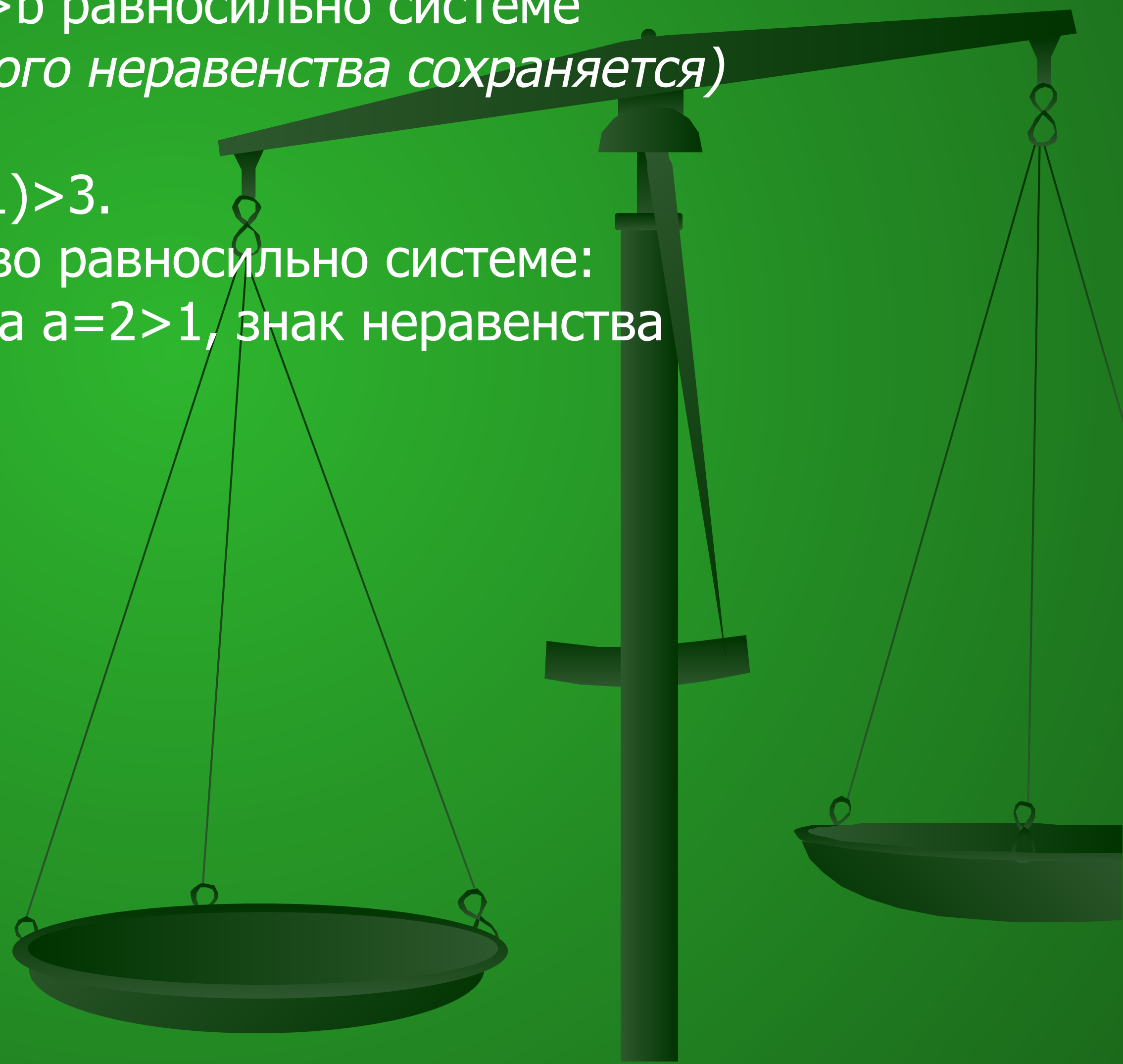
(Основание логарифма $a=2>1$, знак неравенства сохраняем.)

$$\begin{cases} 7x + 1> 2^3, \\ 7x + 1>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x > 7, \\ 7x > -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x > -1/7. \end{cases}$$

Ответ: $(1; \infty)$.



Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывающая, значит, неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^b \text{ *(знак исходного неравенства меняется)* } \\ f(x) > 0 \quad \text{(ОДЗ)} \end{cases}$$

Пример: $\log_{0,2}(4x+5) > -2.$

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x+5 < (0,2)^{-2}, \\ 4x+5 > 0\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x < 25 - 5, \\ 4x > -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5, \\ x > -1,25. \end{cases}$$

Ответ: $(-1,25;\ 5)$.

Показательные уравнения

Уравнения вида

$$a^{x} = в$$

$$где$$

$$a > 0, a \neq 1, x - переменная$$

Называется показательным

Способы решения показательных уравнений

-приведение степеней к одному основанию в уравнении ;

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

-разложение на множители;

-введение новой переменной;

-деление на степень;

-графический способ;

-оценивание частей уравнения;

-подбор корня.

Приведение к одному основанию

$$3)\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 25$$

$$5^{-x} = 5^{2}$$

$$x = -2$$

$$4)\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = \frac{1}{81}$$

$$x = 4$$

Разложение на множители

$$3)5^{3x} + 3 * 5^{3x-2} = 140$$

$$5^{3x-2} * (5^{2} + 3) = 140$$

$$5^{3x-2} * 28 = 140$$

$$5^{3x-2} = 5$$

$$3x - 2 = 1$$

$$x = 1$$

$$4)2^{x+1} + 3 * 2^{x-1} - 5 * 2^{x} + 6 = 0$$

$$2^{x-1} * (2^{2} + 3 - 5 * 2) = -6$$

$$2^{x-1} * (4 + 3 - 10) = -6$$

$$2^{x-1} = 2$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Подбор корня

$$1)\,4^x + 25^x = 29$$

$$y = 4^x - \textit{возрастающая}$$

$$g = 25^x - \textit{возрастающая}$$

$$\textit{значит}, y + g = 4^x + 25^x - \textit{возрастающая}$$

каждоеположительноезначениепринимает

толькоодинраз

$$\textit{при}\, x = 1 \textit{выполняется} : 4^1 + 25^1 = 29$$

Введение новой переменной

$9^{x} - 4*3^{x} + 3 = 0$

$3^{2x} - 4 * 3^{x} + 3 = 0$

$t = 3^{x}$

$t^2 - 4*t + 3 = 0$

$t_1 + t_2 = 4$ и $t_1 * t_2 = 3$

$t_1 = 1$, $t_2 = 3$

$3^x = 1$ или $3^x = 3$

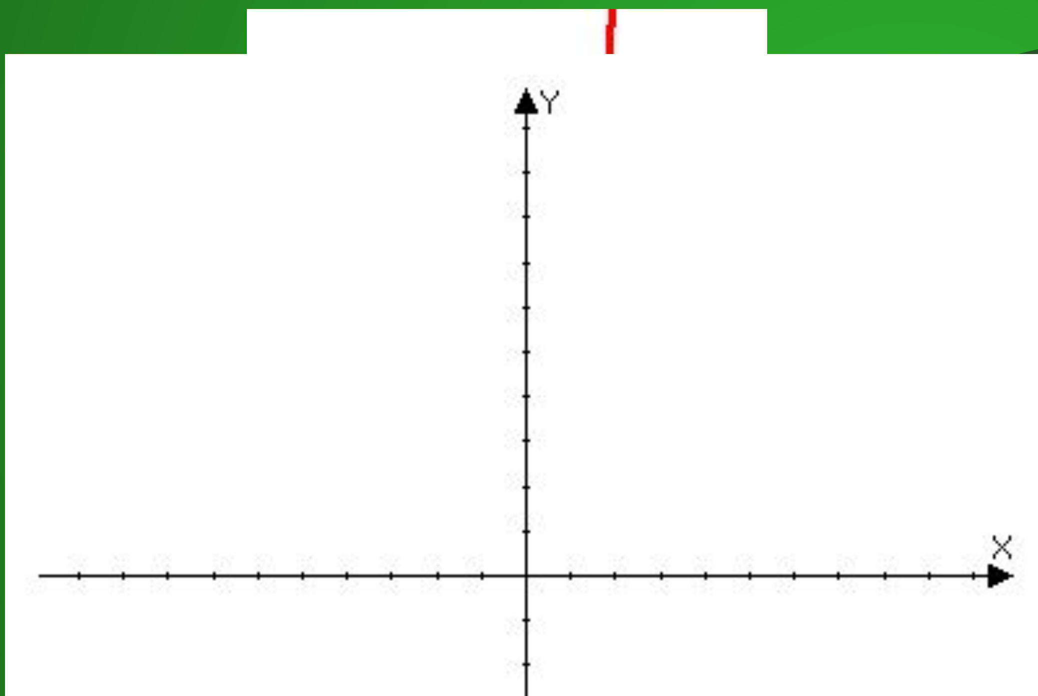
$X = 0$, $x = 1$

Ответ: 0; 1

Показательные неравенства

Решить неравенство $2^x > 1$

При каких x график функции лежит $y = 2^x$ выше прямой $y = 1$?



рафик функции $y = 2^x$
ежит в ы ш е прямой $y = 1$
ри x>0.

Значит, неравенство $2^x > 1$ верно при $x \in (0; +\infty)$

Ответ: $(0; +\infty)$

? При каких x верно неравенство $2^x < 1$?

Простейшие показательные неравенства

Определение:

Неравенство, содержащее неизвестную в показателе степени, называется *__показательным неравенством.__*

Определение:

Неравенство в и д а $a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

называется *__простейшим показательным неравенством.__*

Решение простейших показательных неравенств

$a > 0, \ a \neq 1$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$ $\Rightarrow$ $f(x) > g(x)$

$0 < a < 1$ $\Rightarrow$ $f(x) < g(x)$

Знак неравенства

Сохраняется

Меняется

Что нужно учесть при решении показательных неравенств ?

Решить неравенство $2^x > 1$

$$2^x > 1 \;\Leftrightarrow\; 2^x > 2^0 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$$

? Что нужно учесть при решении простейших показательных неравенств ?

1. Привести основания степени к одинаковому основанию

2. Использовать свойства монотонной функции

Решите неравенство

$$25^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$$

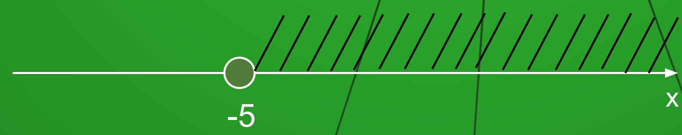
$$\left(5^2\right)^{-x+3} \geq \left(5^{-1}\right)^{3x-1}$$

$$5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$$

$$-2x+6 \geq -3x+1$$

$$-2x+3x \geq 1-6$$

$$x \geq -5$$



$$x \in [-5;+\infty)$$

Ответ: $[-5;+\infty)$

Решите неравенство

$$0,36^{\frac{7x+1}{2-x}}<1$$

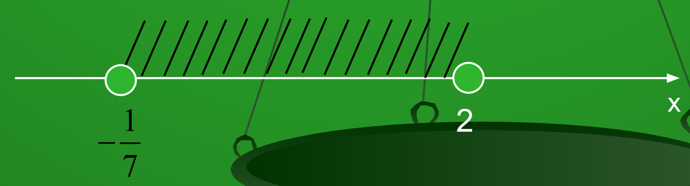
$$0,36^{\frac{7x+1}{2-x}}<0,36^{0}$$

$$\frac{7x+1}{2-x}>0$$

$$(7x+1)(2-x)>0$$

$$(7x+1)(x-2)<0$$

$$-\frac{1}{7}<x<2$$



Ответ: $\left(-\frac{1}{7};2\right)$

Литература.

- А.Г.Мордкович. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.
- А.Н.Колмогоров. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.
- Н.Я.Виленкин. Алгебра и математический анализ 9, 10 класс.
- Ф.Ф.Лысенко. Тематические тесты 10-11 класс. Часть 1.
- Т.А.Корешкова. Математика. ЕГЭ. Типовые тестовые задания. Издательство «Экзамен» 2009г.
- А.Г. Цыпкин. Справочник по методам решения задач по математике. Москва, изд. «Наука», 1989г.
- В.В. Вавилов. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Москва, изд. «Наука», 1987г.

- **Интернет-ресурсы**.
- *www.wiki.ruwww.wiki.ruwww.school.ru*
- *www.a-nomalia.narod.ru*
- *www.egypet-best.ru*
- *www.pyramids.ru*