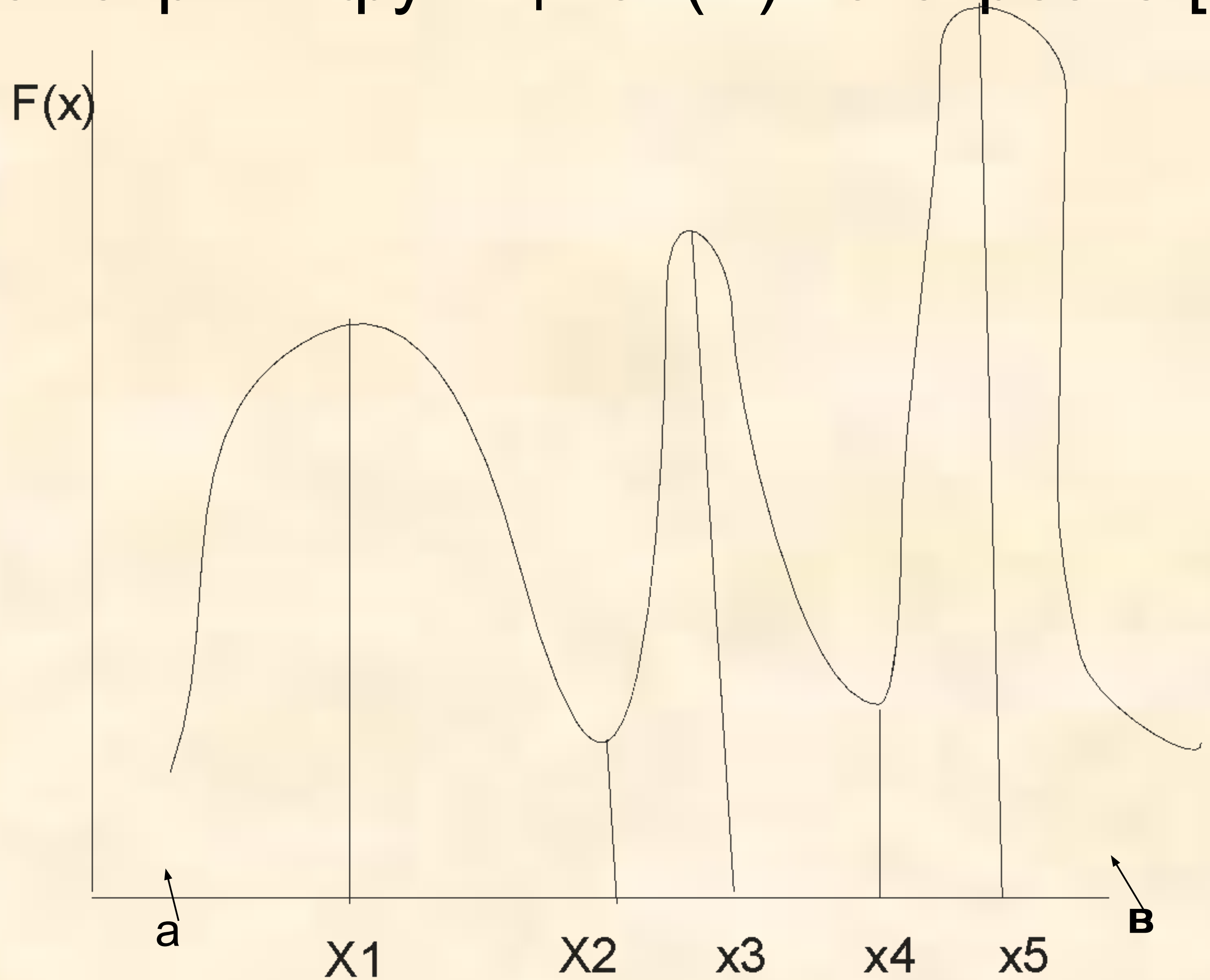
Задачи нелинейного программирования

- Общая задача НП заключается в отыскании экстремального значения ЦФ, зависящей от n переменных.
- Точка X_0 является точкой максимума, если в ее окрестностях значение функции $f(X)$ не превосходит $f(X_0)$. Для минимума - $f(X) \leq f(X_0)$.

- Рассмотрим функцию f(X) на отрезке [a,b]. .



$f(x_5)$-глобальный максимум, $f(x_1)$, $f(x_3)$ – локальные максимумы.
$f(x_1)$ – нестрогий максимум. x_2 , x_4 – точки минимумов.

- Необходимое условие существования экстремума функции **f(x)** в точке $\mathbf{x_0}$ является равенство нулю градиента функции в этой точке **grad** $\mathbf{f(x_0)=0}$
- **grad** $\mathbf{f(X)=(df/dx_1,\ldots\ldots..df/dx_n)}$ – задает угол наклона касательной к графику функции.
- Это условие не является достаточным, т.к. оно выполняется для точек перегиба и седловых точек, их называют стационарными точками.

Методы решения задач НП

аналитические
градиентные
непрямые методы
методы случайного поиска

Аналитические методы

- Основаны на использовании необходимых и достаточных условий экстремумов функций.
- Для их использования необходимо, чтобы ЦФ и функции ограничений были непрерывными вместе с их частными производными первого порядка.

Численные методы

- Для поиска экстремума функции, зависящей от 1-й переменной.
- Выделяется диапазон значений x , на котором может находиться точка экстремума, затем диапазон сужается до тех пор, пока не будет найдена точка экстремума с заданной точностью

Покоординатные методы

- Отыскание экстремального значения функции по каждой из переменных.

Методы случайного поиска

- Выбирается любое допустимое решение.
- Переход к следующему решению производится в случайным образом выбранном направлении.
- Если при этом получаем улучшенное значение целевой функции, то дальше движемся в выбранном направлении, иначе – меняем направление.
- В результате получаем приближенное решение с заданной точностью.

Градиентные методы

- Основаны на использовании градиента ЦФ (градиент в точке указывает направление скорейшего возрастания функции).
- Пошаговый переход от одного допустимого решения к другому в направлении градиента.
- Получаем приближенное решение с заданной точностью. Это наиболее универсальные методы.

Непрямые методы

- Сведение задачи НП к более простой задаче, например задаче ЛП.
- В зависимости от вида ЦФ и функций ограничений выделяют следующие классы

Методы квадратичного программирования

- Целевая функция представляет собой сумму линейной функции и квадратичной формы, а функции ограничений являются линейными функциями.
- $F=\sum c_j x_j+\sum\sum a_{ik} x_j x_k$

  $j=1,n \quad k=1,n$

Методы сепарабельного программирования

- Функции ограничений сепарабельны:
- $F(x_1 \ldots . x_n) = F_1(x_1) + \ldots + F_n(x_n)$
- Методы решения основаны на линейной аппроксимации ЦФ и применении симплекс-метода.

Методы геометрического программирования.

- Целевая функция и функции ограничений являются полиномами и имеют следующий вид:
- $F=\sum u_k$

$$u_k = c_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{a_{ik}}$$

- c_k- положительны, a_{ki}- целые числа.

Методы стохастического программирования.

- Целевая функция и функции ограничений являются линейными, но при этом коэффициенты a_{ij}, b_i – случайные числа, а ограничения должны выполняться с некоторыми вероятностями.

Общая задача нелинейного программирования формулируется следующим образом: найти вектор

$$X = \left(x_1, \ldots, x_n \right)$$

удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} g_i(x_1, \ldots, x_n) \le b_i & \left(i = \overline{1,k}\right) \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i & \left(i = \overline{k+1,m}\right) \end{cases}$$

и обращающий в максимум (или минимум) целевую функцию

$$F = F\left(x_1, \ldots, x_n \right)$$

- Вектор $X = \left(x_1, \dots, x_n \right)$

удовлетворяющий системе ограничений называется **допустимым решением задачи нелинейного программирования**

- Допустимое решение, при котором целевая функция ***F*** достигает максимального значения (в случае задачи максимизации) или минимального значения (в случае задачи минимизации) называется **оптимальным.**

Факторы, затрудняющие решение задач нелинейного программирования.

1. В задачах ЛП ЦФ имеет абсолютный глобальный экстремум, в НП ЦФ может иметь несколько локальных экстремумов, при этом не существует методов, с помощью которых можно установить, является ли этот экстремум глобальным

1. Для задачи ЛП множество допустимых решений задачи образует выпуклый многогранник, при этом оптимальное решение достигается в одной из его вершин, т.е. за конечное число шагов мы можем найти оптимальное решение (если оно существует).

   В НП множество допустимых решений образует область, которая не всегда выпукла. Оптимальное решение может находиться не только на границе области, но и в **любой внутренней точке**. Следовательно, его нельзя найти с помощью перебора.

1. В ЛП множество точек, в которых ЦФ принимает постоянное значение есть гиперплоскость $c_1x_1+......c_nx_n=const$. При различных значениях const мы получаем параллельные гиперплоскости.

В НП множество точек, в которых ЦФ принимает постоянное значение есть гиперповерхность $f(x_1......x_n)=const$. При различных значениях const мы получаем гиперповерхности, которые могут пересекаться.

Геометрический метод решения задач НП

- Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи нелинейного программирования сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего уровня (в случае максимизации) или наинизшего уровня (в случае минимизации):

$$F\left(x_1, \ldots, x_n\right) = h$$

Решение задачи нелинейного программирования графическим способом :

1. Находят область допустимых решений задачи. Если она пуста, то задача решения не имеет.
2. Строят гиперповерхность .

$$F\left(x_1, \dots, x_n\right) = h$$

1. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции F сверху (снизу) на множестве допустимых решений.
2. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют значение целевой функции F в этой точке

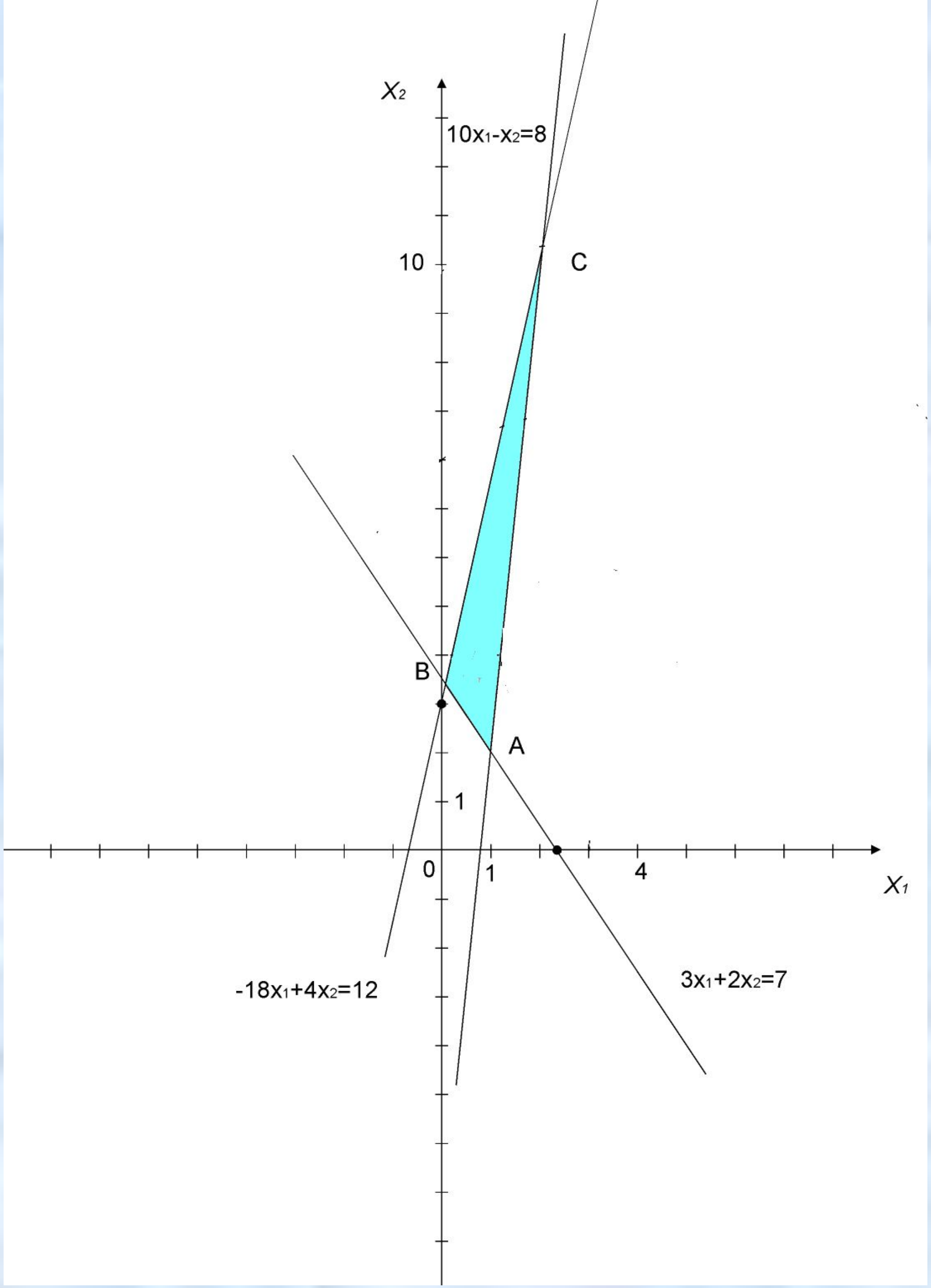
Пример. Найти максимальное и минимальное значение функции

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

При выполнении условий

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- <u>Решение.</u>
- Областью допустимых решений этой задачи является треугольник *ABC*

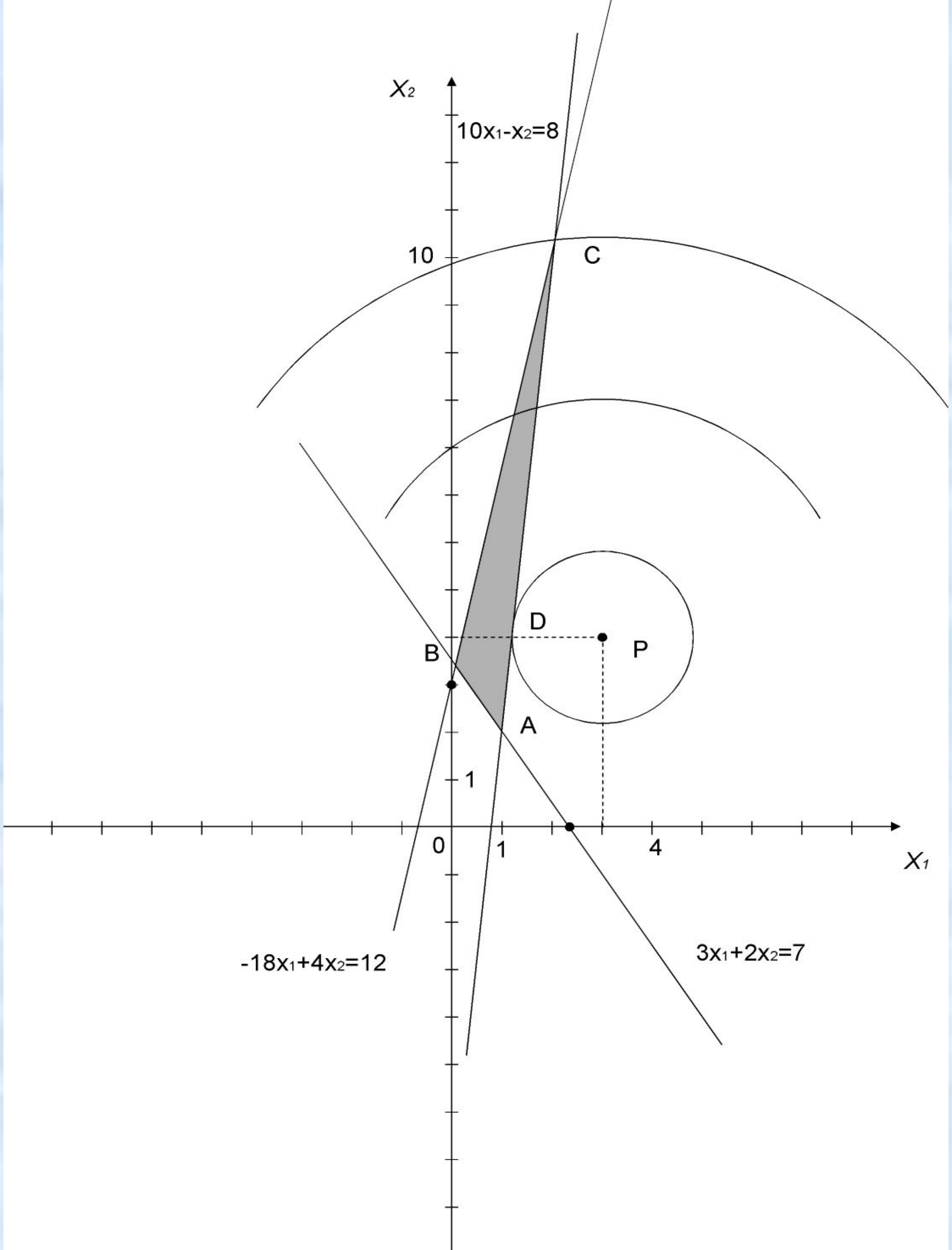


- Полагая значение целевой функции *F* равным некоторому числу *h*, получаем линии уровня

$$\left(x_1-3\right)^2+\left(x_2-4\right)^2=h$$

которые являются окружностями с центром *P*(3, 4) и радиусом **h.** С увеличением (уменьшением) ***h*** значения функции *F* соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки *P*, окружности различных радиусов, получим, что **минимальное** значение функция *F* принимает в точке ***D***, в которой окружность касается области решений



- Координаты точки ***D*** определяются из равенства угловых коэффициентов прямой

$$10x_1 - x_2 = 8$$

и касательной к окружности в точке *D*.

Из уравнения прямой видим, что ее угловой коэффициент в точке ***D*** равен **10**.
Угловой коэффициент касательной к окружности в точке ***D*** определим как значение производной функции $\mathbf{x_2}$ от переменной $\mathbf{x_1}$ в этой точке

- Рассматривая $\mathbf{X_2}$ как неявную функцию от переменной $\mathbf{X_1}$ и дифференцируя уравнение окружности, получим

$$2\left(x_1-3\right)+2\left(x_2-4\right)\cdot x_2'=0$$

откуда

$$x_2'=-\left(x_1-3\right)/\left(x_2-4\right)=10$$

- получим систему:

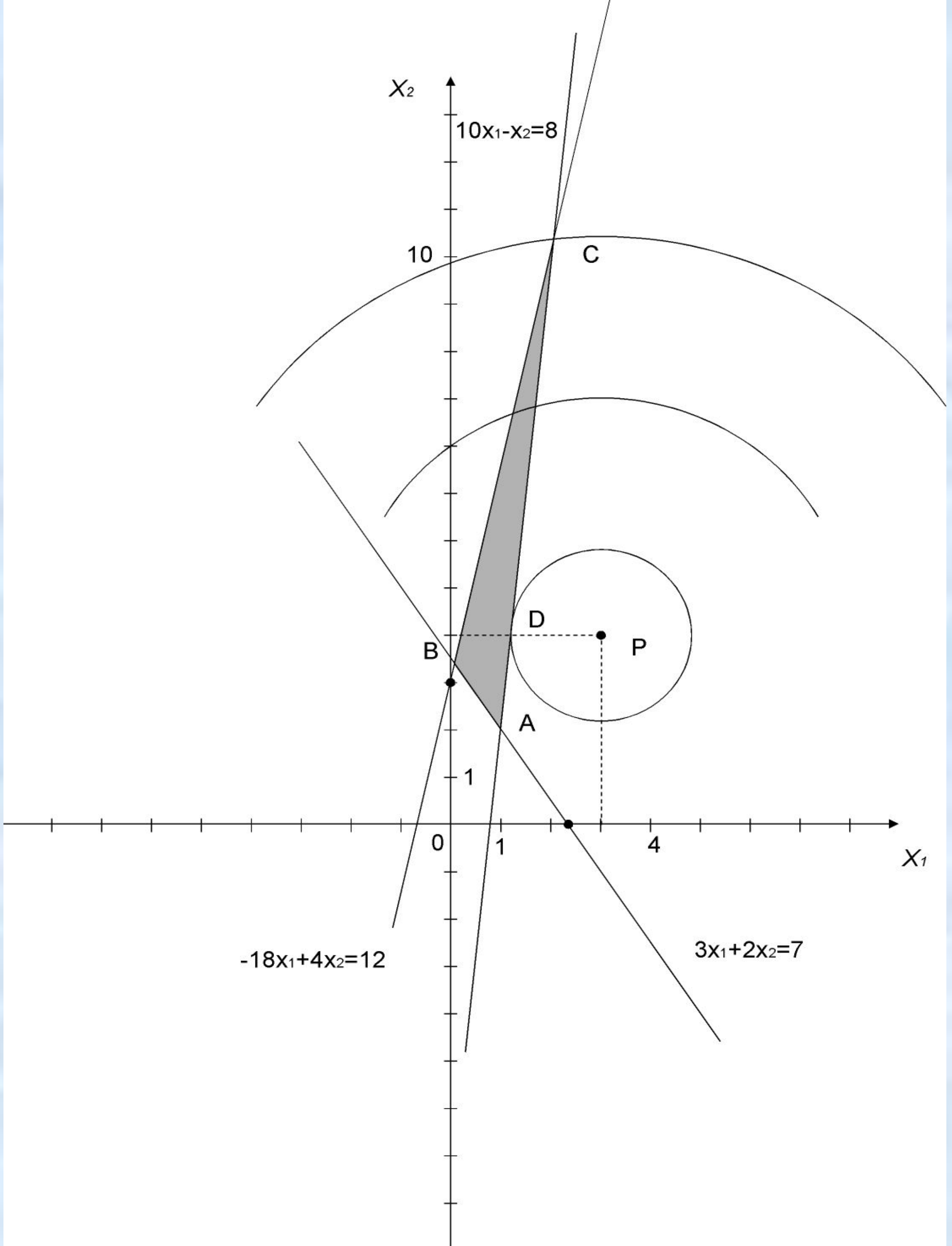
$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$x_1^* = 123/101 \qquad x_2^* = 422/101$$

$$F_{\min} = F\left(D\right) = 324/101.$$

- Целевая функция ***F*** принимает **максимальное** значение в точке ***C***..



- Координаты точки **C** находят решая систему уравнений, соответствующих прямым **BC** и **AC**

$$\begin{cases} -18x_1 + 4x_2 = 12 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

$$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 12 \qquad F_{\max} = F\left(C\right) = 65$$