Угол между прямыми

Угол между прямыми в пространстве можно находить используя формулу

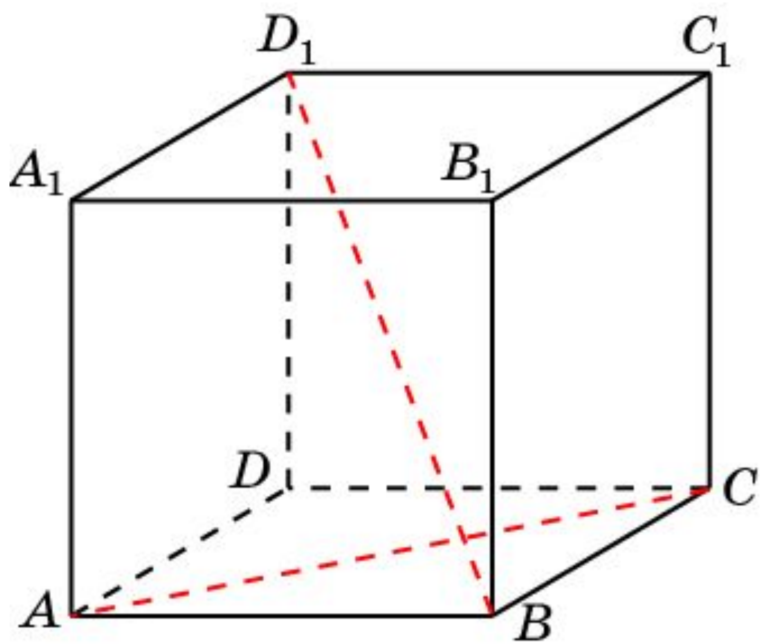
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|},$$

где $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ - направляющие векторы данных прямых. Однако угол между векторами может быть тупым, а угол между прямыми нет. Поэтому, если косинус угла между векторами получился отрицательным, то в ответе нужно указывать его модуль.

Здесь мы рассмотрим примеры решения задач на нахождение угла между прямыми в пространстве, используя указанную выше формулу.

Куб 1

В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD_1.

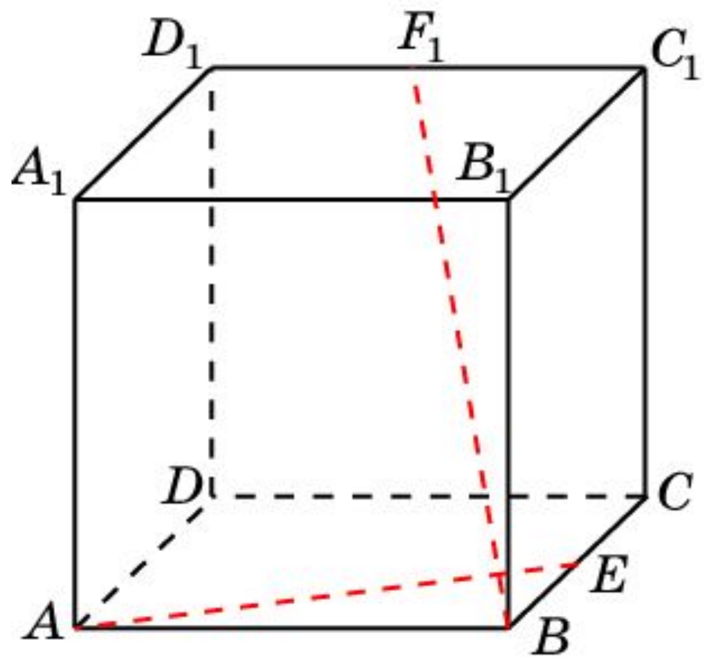


Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $\overrightarrow{AC}(-1, 1, 0)$ и $\overrightarrow{BD_1}(-1, -1, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю. Следовательно, эти векторы перпендикулярны.

Ответ. 90°.

Куб 2

В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF_1, где E и F_1 – середины ребер соответственно BC и C_1D_1.

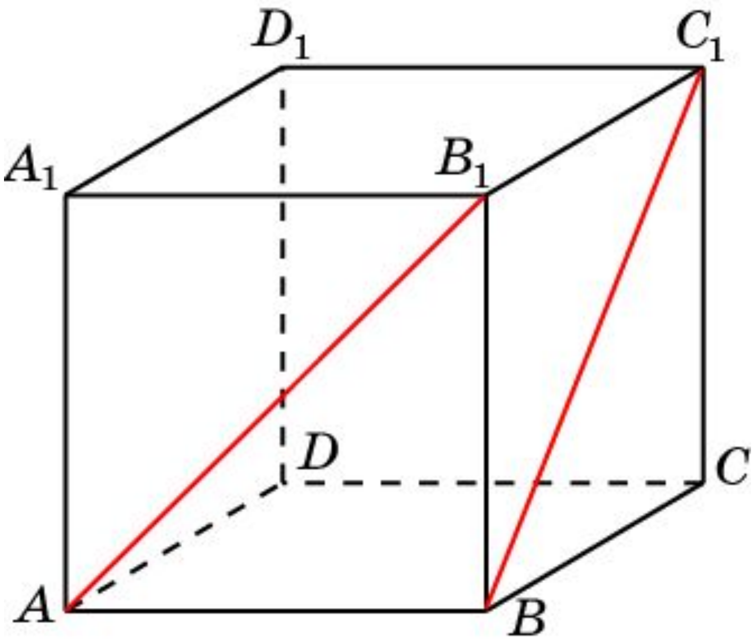


Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $\overrightarrow{AE}(-0,5, 1, 0)$ и $\overrightarrow{BF_1}(-1, -0,5, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю. Следовательно, эти векторы перпендикулярны.

Ответ. 90°.

Куб 3

В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



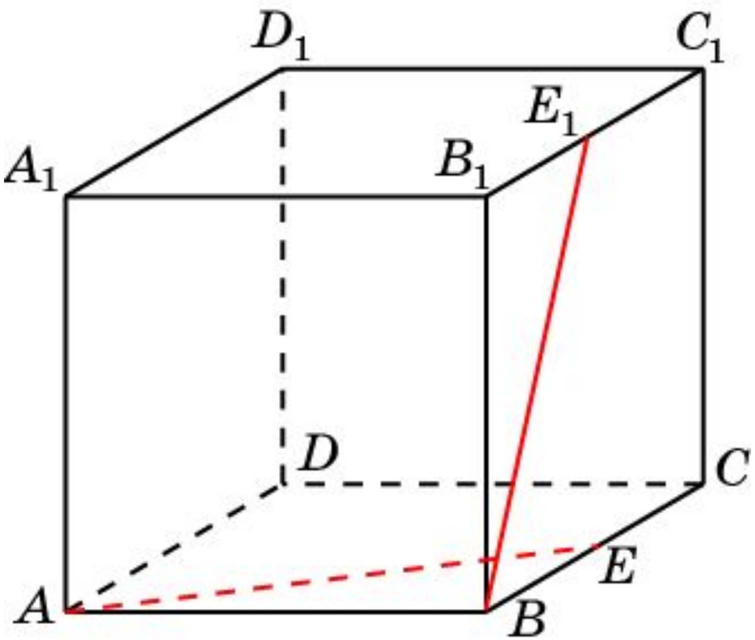
Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $\overrightarrow{AB_1}(0,1,1)$ и $\overrightarrow{BC_1}(-1,0,1)$. Их скалярное произведение равно 1. Их длины равны $\sqrt{2}$.

Косинус угла между этими векторами равен 0,5.

Ответ. 60°.

Куб 4

В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите косинус угла между прямыми AE и BE_1, где E и E_1 – середины ребер соответственно BC и B_1C_1.



Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $\overrightarrow{AE}(-0{,}5, 1, 0)$ и $\overrightarrow{BE_1}(-0{,}5, 0, 1)$. Их скалярное произведение равно 0,25.

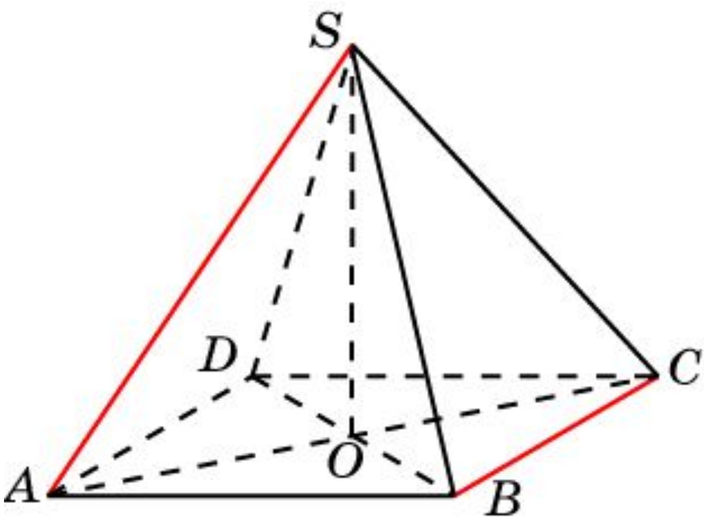
Их длины равны $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Косинус угла между этими векторами равен 0,2.

Ответ. 0,2.

Пирамида 1

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AS и BC.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA, OB, OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AS}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } \overrightarrow{BC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

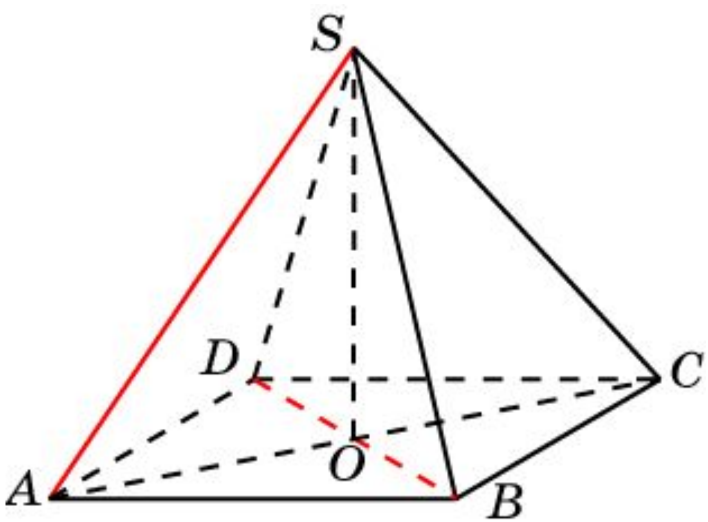
Их скалярное произведение равно 0,5. Их длины равны 1.

Косинус угла между ними равен 0.5.

Ответ: 60°.

Пирамида 2

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AS и BD.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA, OB, OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

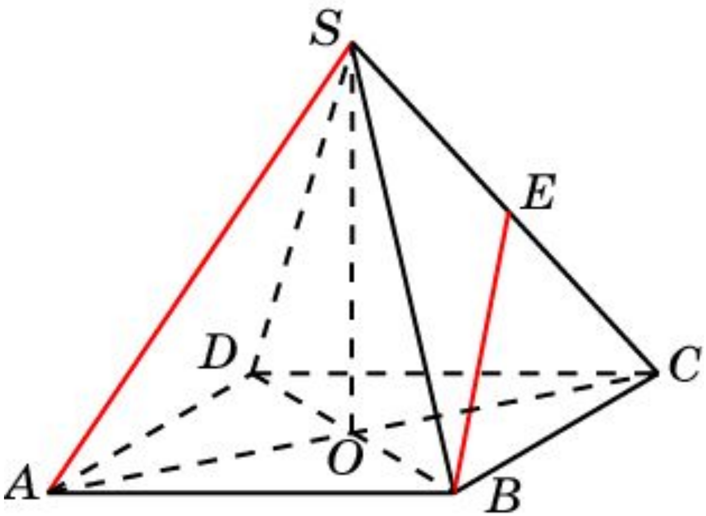
$$\overrightarrow{AS}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } \overrightarrow{BD}\left(0, -\sqrt{2}, 0\right).$$

Их скалярное произведение равно 0. Следовательно, угол между ними равен 90°

Ответ: 90°.

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми AS и BE.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA, OB, OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AS}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } \overrightarrow{BE}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

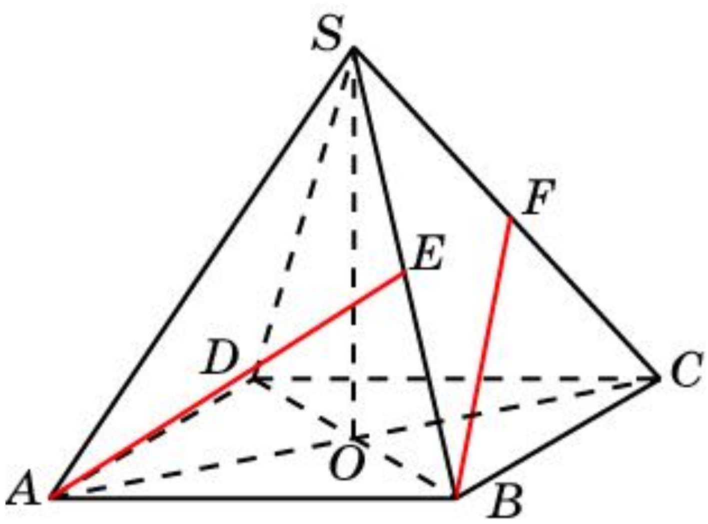
Их скалярное произведение равно 0,5. Их длины равны 1 и $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 4

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F – середины ребер SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA, OB, OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AE}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ и } \overrightarrow{BF}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

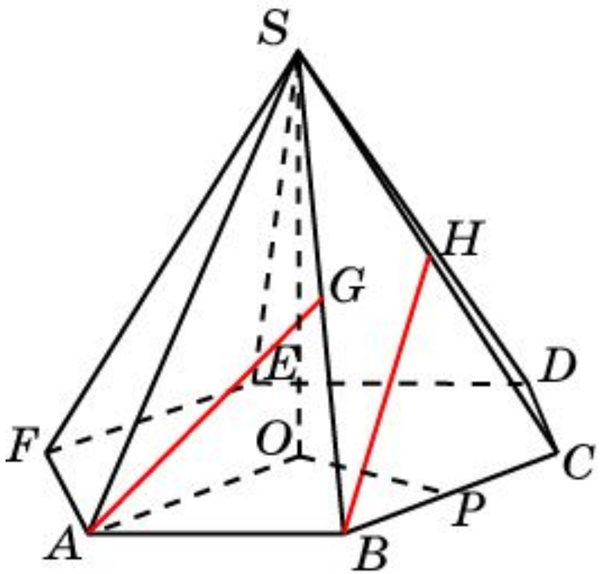
Их скалярное произведение равно $\frac{1}{8}$. Их длины равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Косинус угла между ними равен $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пирамида 5

В правильной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точки G и H – середины ребер SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA, OP, OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AG}\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и } \overrightarrow{BH}\left(-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

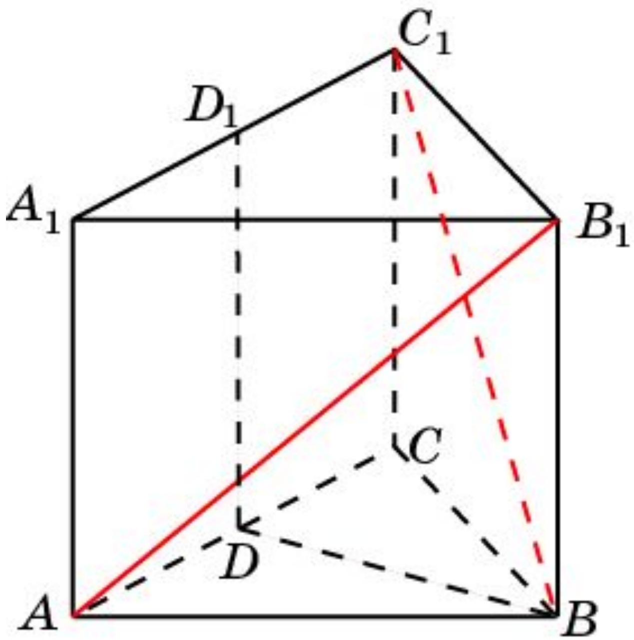
Их скалярное произведение равно $\frac{3}{4}$. Их длины равны 1.

Косинус угла между ними равен $\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Призма 1

В правильной 3-й призме $ABCA_1B_1C_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Решение. Введем систему координат, считая середину D ребра AC началом координат, прямые DA, DB, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

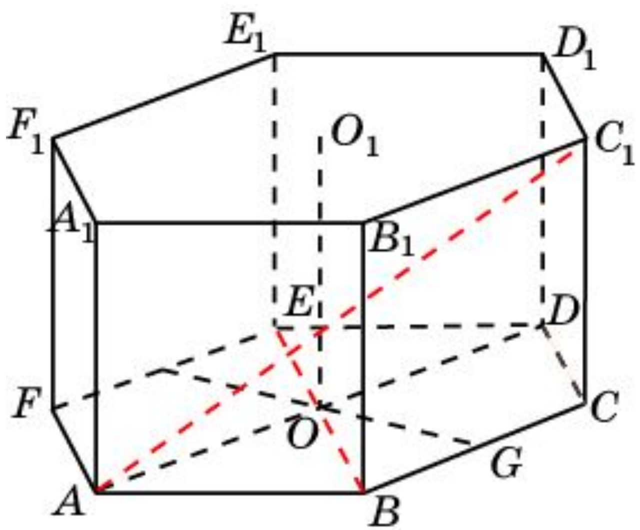
$$\overrightarrow{AB_1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BC_1}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

Их скалярное произведение равно 0,5, Длины равны $\sqrt{2}$. Косинус угла между ними равен 0,25.

Ответ. 0,25.

Призма 2

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA, OG, OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

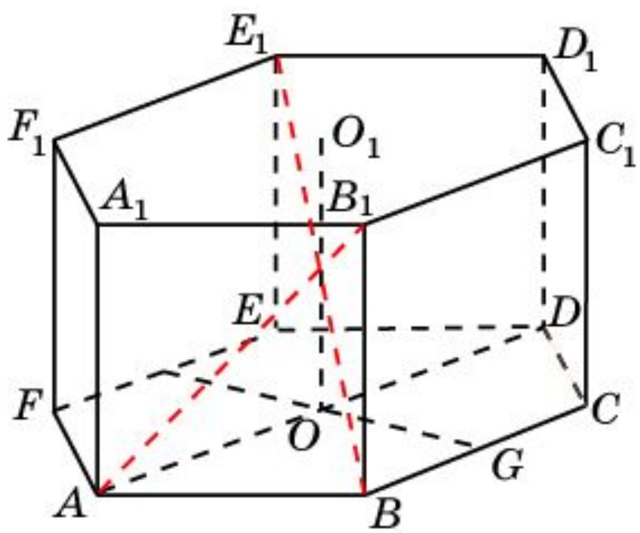
$$\overrightarrow{AC_1}\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BE}\left(-1, -\sqrt{3}, 0\right).$$

Их скалярное произведение равно 0. Угол между ними равен 90°.

Ответ. 90°.

Призма 3

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA, OG, OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

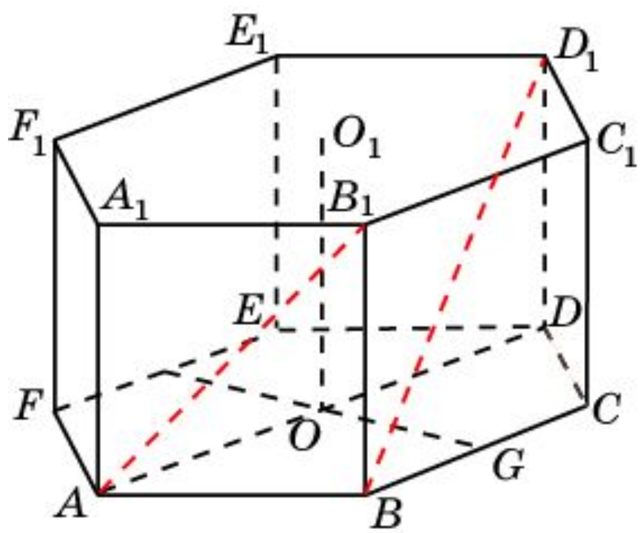
$$\overrightarrow{AB_1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BE_1}\left(-1, -\sqrt{3}, 1\right).$$

Их скалярное произведение равно 0. Угол между ними равен 90°.

Ответ. 90°.

Призма 4

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA, OG, OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AB_1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \text{ и } \overrightarrow{BD_1}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

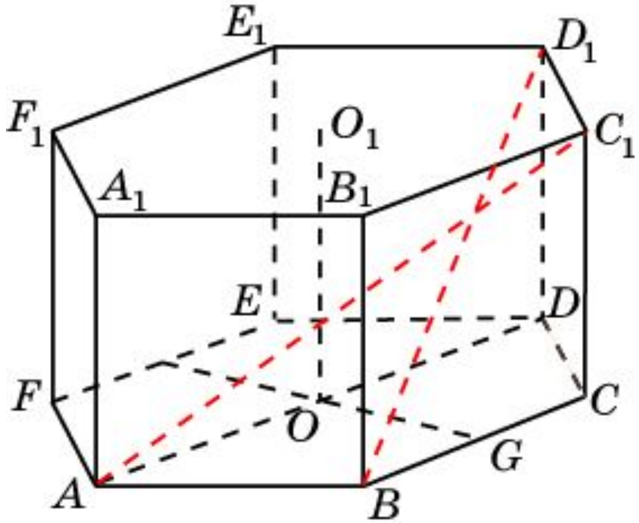
Их скалярное произведение равно 1. Длины равны $\sqrt{2}$ и 2.

Косинус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Призма 5

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AC_1 и BD_1.



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA, OG, OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AC_1}\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BD_1}\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right).$$

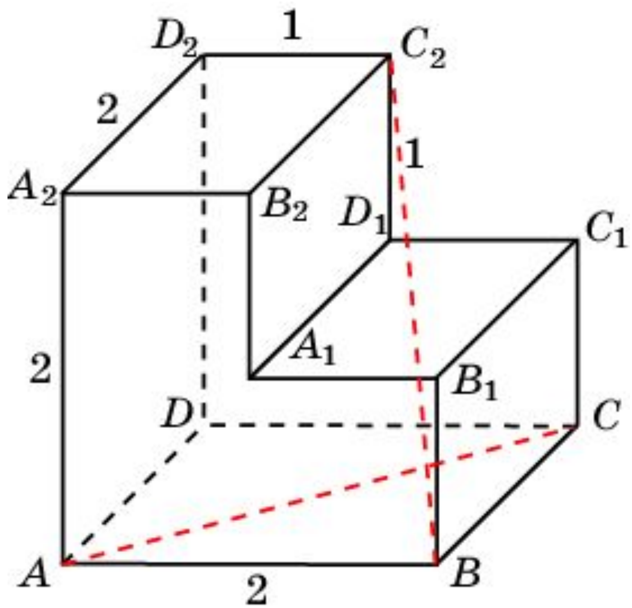
Их скалярное произведение равно 2,5. Длины равны 2.

Косинус угла между ними равен $\frac{5}{8}$.

Ответ. $\frac{5}{8}$.

Многогранник 1

Для многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые, найдите косинус угла между прямыми AC и BC_2.



Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_2 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$\overrightarrow{AC}(-2, 2, 0)$ и $\overrightarrow{BC_2}(-2, -1, 2)$.

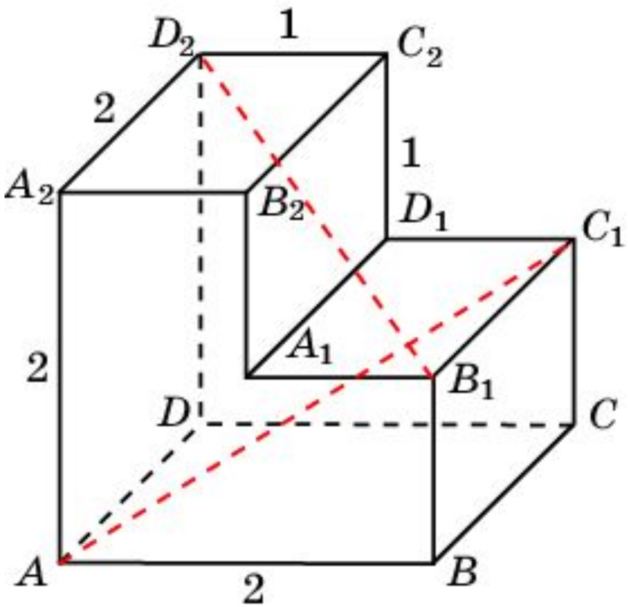
Скалярное произведение этих векторов равно 2, их длины равны $2\sqrt{2}$ и 3.

Косинус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Многогранник 2

Для многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые, найдите косинус угла между прямыми AC_1 и B_1D_2.



Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_2 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AC_1}(-2, 2, 1) \text{ и } \overrightarrow{B_1D_2}(-2, -2, 1).$$

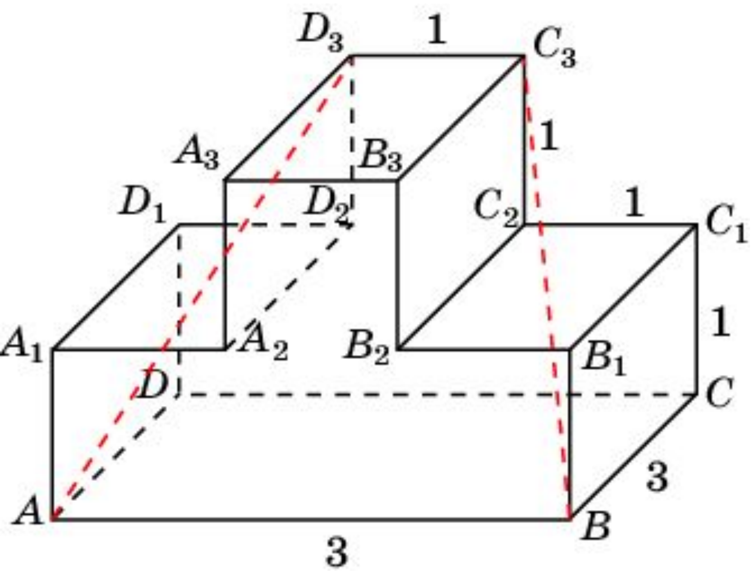
Скалярное произведение этих векторов равно 1, их длины равны 3.

Косинус угла между ними равен $\frac{1}{9}$.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Многогранник 3

Для многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые, найдите косинус угла между прямыми AD_3 и BC_2.



Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA, DC, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$\overrightarrow{AD_3}(-3, 1, 2)$ и $\overrightarrow{BC_3}(-3, -1, 2)$.

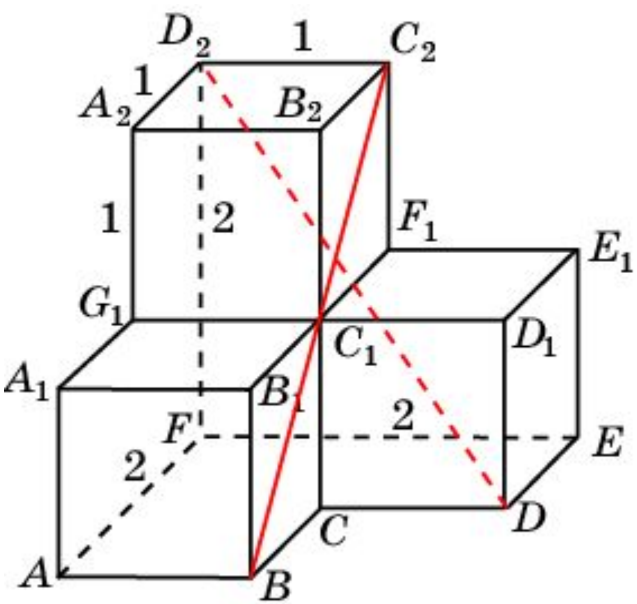
Скалярное произведение этих векторов равно 12, их длины равны $\sqrt{14}$.

Косинус угла между ними равен $\frac{6}{7}$.

Ответ. $\frac{6}{7}$.

Многогранник 4

Для многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые, найдите угол между прямыми BC_2 и DD_2.



Решение. Введем систему координат, считая точку F началом координат, прямые FA, FE, FD_2 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$\overrightarrow{BC_2}(-2, 0, 2)$ и $\overrightarrow{DD_2}(-1, -2, 2)$.

Скалярное произведение этих векторов равно 6, их длины равны $2\sqrt{2}$ и 3.

Косинус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. 45°.