Дробно-факторный эксперимент (ДФЭ)

При многофакторном эксперименте, особенно когда число факторов больше шести ($n > 6$), число опытов планов ПФЭ 2n (N = 2n) становится чрезмерным. Переходят к *дробному факторному эксперименту* (ДФЭ) - части полного факторного эксперимента, или ***дробным репликам***

ДФЭ может содержать половину, четверть и т.д. опытов от ПФЭ

К матрице ДФЭ предъявляют те же требования, что и к матрице ПФЭ

Планы ДФЭ 2n-k, где k - показатель дробности плана ПФЭ. При k=1 число опытов в плане ДФЭ в два раза меньше чем в плане ПФЭ, поэтому такие планы называют полурепликой плана ПФЭ,

при k=2 – четвертьрепликой плана ПФЭ

Минимизация числа опытов

№ опыта	x_0	x_1	x_2	(x_3) $x_1 x_2$	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	–	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

Если в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан ***линейной*** моделью, то достаточно определить три коэффициента $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$. При линейном приближении $\boldsymbol{b_{12}} \rightarrow 0$ и вектор-столбец $\mathbf{x_1 x_2}$ можно использовать для нового фактора $\mathbf{x_3}$

Посмотрим, каковы будут оценки коэффициентов в этом случае. Здесь уже не будет тех раздельных оценок, которые мы имели в полном факторном эксперименте **2k**. Оценки смешаются следующим образом:

$$\boldsymbol{b_1} \to \beta_1 + \beta_{23},\quad \boldsymbol{b_2} \to \beta_2 + \beta_{13},\quad \boldsymbol{b_3} \to \beta_3 + \beta_{12}$$

Вместо 8 опытов для изучения 3 факторов можно поставить 4

Матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств

- Чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца

Поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов, мы воспользовались половиной полного факторного эксперимента 2^3 или «полурепликой».

Если бы мы $\boldsymbol{x_3}$ приравняли к $\boldsymbol{-x_1x_2}$, то получили бы вторую половину матрицы 2^3. В этом случае

$\boldsymbol{b_1} \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}$, $\boldsymbol{b_2} \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}$, $\boldsymbol{b_3} \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}$

Объединение этих двух полуреплик и есть полный факторный эксперимент 2^3, отражающий и линейные эффекты и эффекты взаимодействия

Матрица из восьми опытов для четырех факторного планирования будет полурепликой от полного факторного эксперимента 2^4,
а для пятифакторного планирования – четвертьрепликой от 2^5

В четвертьреплике два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия

Для обозначения дробных реплик, в которых ***p*** линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условным обозначением 2^{k-p}.

Так, полуреплика от 2^3 запишется в виде 2^{3-1}, а четвертьреплика от 2^5 – в виде 2^{5-2}

При построении полуреплики 2^{3-1} существует только две возможности приравнять x_3 к x_1x_2 или $-x_1x_2$. Поэтому есть только две полуреплики 2^{3-1}

№ опыта	x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$
1	+	+	–	–
2	–	–	–	–
3	+	–	+	–
4	–	+	+	–

Для произведения трех столбцов первой матрицы выполняется соотношение: $+1 = \boldsymbol{x_1x_2x_3}$, а для второй матрицы: $-1 = \boldsymbol{x_1x_2x_3}$.

Символическое обозначение произведения столбцов, равного +1 или –1, называется определяющим ***контрастом.***

Контраст помогает определять смешанные эффекты. Для того чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту.

Если контраст +1, то для x_1 имеем

$$x_1 = x_1x_1x_2x_3 = x_2x_3$$

для x_2 имеем $$x_2 = x_1x_2x_2x_3 = x_1x_3$$

для x_3 имеем $$x_3 = x_1x_2x_3x_3 = x_1x_2$$

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками:

$\boldsymbol{b_1} \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$, $\boldsymbol{b_2} \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$, $\boldsymbol{b_3} \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется ***генерирующим соотношением***

Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят название планов с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте).Такие планы принято обозначать: 2_{III}^{3-1}

При выборе полуреплики 2^{4-1} возможны 8 решений

1. $x_4 = x_1x_2$
2. $x_4 = -x_1x_2$
3. $x_4 = x_2x_3$
4. $x_4 = -x_2x_3$
5. $x_4 = x_1x_3$
6. $x_4 = -x_1x_3$
7. $x_4 = x_1x_2x_3$
8. $x_4 = -x_1x_2x_3$

Разрешающая способность этих полуреплик различна

Реплики 1 – 6 имеют по три фактора в определяющем контрасте, а 7 – 8 по четыре.

Разрешающая способность задается системой смешивания данной реплики. Она будет максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего возможного порядка

Реплики 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность и называются ***главными***

При отсутствии априорной информации об эффектах взаимодействия экспериментатор стремится выбрать реплику с наибольшей разрешающей способностью, т.к. тройные взаимодействия обычно менее важны, чем парные

Реплики, в которых нет ни одного главного эффекта, смешанного с другим главным эффектом или парным взаимодействием, а все парные взаимодействия смешаны друг с другом, носят название планов с разрешающей способностью IV (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте).

Они имеют обозначение 2_{IV}^{4-1}

Такие полуреплики называют главными полурепликами, так как они обладают ***наибольшей разрешающей способностью***

При выборе полуреплики 2^{5-1} в распоряжении экспериментатора имеется множество вариантов

x_5 можно приравнять к одному из 6 парных взаимодействий. В этом случае получим полуреплику с разрешающей способностью III.

x_5 можно приравнять к одному из четырех тройных взаимодействий. Тогда получим план с разрешающей способностью IV, и все линейные эффекты будут смешаны с тройными взаимодействиями

Полуреплика может быть задана генерирующими соотношениями

$x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4$ или $x_5 = -x_1 x_2 x_3 x_4$

Такие реплики носят название планов с разрешающей способностью V и обозначаются 2_V^{5-1}

Определяющими контрастами в этом случае будут $1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ и $-1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

Полурепликами 2^{6-1} редко пользуются на практике, т.к. такая полуреплика требует 32 опыта, а выгодны планы 2^{6-2} или 2^{6-3} требующие соответственно 16 и 8 опытов. С ростом числа факторов возрастает дробность применяемых реплик

При построении главных полуреплик в определяющий контраст надо включать наибольшее число факторов

При исследовании влияния пяти факторов можно поставить не 16 опытов, а только 8, т. е. воспользоваться репликой 2^{5-2}. Здесь возможны двенадцать решений, если x_4 приравнять парному взаимодействию, а x_5 – тройному. Например, $x_4 = x_1 x_3$ и $x_5 = x_1 x_2 x_3$

Тогда определяющими контрастами являются

$1 = x_1 x_3 x_4$ или $1 = x_1 x_2 x_3 x_5$

Чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность реплики, необходимо записать обобщающий определяющий контраст

$$1 = x_1 x_3 x_4 = x_2 x_4 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_5$$

Пример. Методом дробных реплик найти математическое описание процесса в виде уравнения регрессии:

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5$$

Воспользуемся планированием типа 2^{5-2} и примем генерирующие соотношения

$$X_4 = -X_1 X_2 \qquad X_5 = X_1 X_2 X_3$$

Выбор генерирующих соотношений в общем случае произволен, однако он существенно влияет на характер совместных оценок коэффициентов регрессии.

Правило определения совместных оценок коэффициентов состоит в следующем

1. $X_i^2 = 1$ $\qquad X_i \cdot 1 = X_i$

2. Умножив обе части генерирующих соотношений соответственно на X_4 и X_5, получим $1 = -X_1 X_2 X_4$

$$1 = X_1 X_2 X_3 X_5$$

определяющие контрасты

Перемножив их почленно, получим новые *определяющие контрасты*. В данном случае это $1 = -X_3 X_4 X_5$

3. Составим алгебраическую сумму из единицы и правых частей всех полученных определяющих контрастов

$$S = 1 - X_1 X_2 X_4 + X_1 X_2 X_3 X_5 - X_3 X_4 X_5$$

4. Умножив каждый из факторов на S и заменив факторы соответствующими коэффициентами разложения в ряд Тейлора, получим

$$b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{24} + \beta_{235} - \beta_{1345}$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{14} + \beta_{135} - \beta_{2345}$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{1234} + \beta_{125} - \beta_{45}$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 - \beta_{12} + \beta_{12345} - \beta_{35}$$

$$b_5 \rightarrow \beta_5 - \beta_{1245} + \beta_{123} - \beta_{34}$$

Метод ортогонального центрального композиционного планирования

Если поверхность отклика не может быть описана многочленом вида

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \dots + b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n$$

для адекватного математического описания используется многочлен более высокой степени, например, отрезок ряда Тейлора, содержащий члены с квадратами переменных. Тогда используют центральное композиционное планирование (ЦКП) эксперимента

Различают два вида центрального композиционного планирования (ЦКП):

ортогональное и ***ротатабельное***

Количество опытов при ортогональном ЦКП определяется по формуле $N = 2^n + 2n + 1$

здесь 2^n – количество опытов, образующих полный факторный эксперимент; $2n$ – число так называемых «звездных» точек в факторном пространстве, имеющих координаты ($\pm\alpha$, 0, 0, ..., 0); (0, $\pm\alpha$, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., $\pm\alpha$). Здесь величина α называется «звездным» плечом;

1 – опыт в центре планирования, т. е. в точке факторного пространства с координатами (0, 0, ..., 0)

Значения «звездного» плеча *α* для ЦКП с различным числом факторов *n* следующие:

n	2	3	4	5
α	1,000	1,215	1,414	1,547

Эти значения *α* выбраны из условия ортогональности матрицы планирования

Уравнение регрессии при ортогональном ЦКП ищут в следующем виде

$$y = b_0^* + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \ldots$$
$$+ b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n + b_{11} X_1^* + \ldots + b_{nn} X_n^*$$

Переменные величины $X_{ji}^* = X_{ji}^2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{ji}^2$

введены для того, чтобы матрица планирования была ортогональна и коэффициенты регрессии определялись независимо друг от друга по результатам опытов

здесь *j* – номер опыта; *i* – номер фактора

Чтобы получить уравнение регрессии в обычной форме

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{X}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{b}_{12} \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2 + \ldots$$
$$+ \boldsymbol{b}_{(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{b}_{11} \boldsymbol{X}_1^2 + \boldsymbol{b}_{22} \boldsymbol{X}_2^2 + \ldots + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{nn}} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}^2,$$

находят величину

$$b_0 = b_0^* - \frac{b_{11}}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ji}^2 - \ldots - \frac{b_{nn}}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{jn}^2.$$

Пример

Ортогональное ЦКП для двух факторов

Система опытов	Номер опыта	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^*	X_2^*
Полный факторный эксперимент	1	−1	−1	+1	+0,33	+0,33
	2	−1	−1	−1	+0,33	+0,33
	3	−1	+1	−1	+0,33	+0,33
	4	−1	+1	+1	+0,33	+0,33
Опыты в звездных точках	5	+1	0	0	+0,33	-0,67
	6	−1	0	0	+0,33	-0,67
	7	0	+1	0	−0,67	+0,33
	8	0	−1	0	−0,67	+0,33
Опыт в центре плана	9	0	0	0	−0,67	−0,67

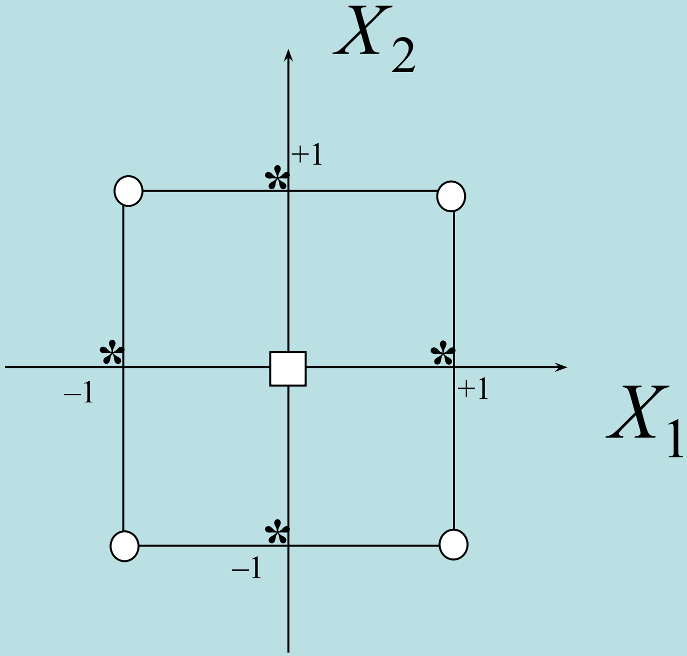


Схема опытов ортогонального ЦКП для двух факторов:

○ опыты полного факторного эксперимента; * – опыты в звездных точках;

□ – опыт в центре плана

Коэффициенты регрессии при ортогональном ЦКП считают по следующим формулам

$$b_0^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ji} y_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji})^2}$$ где $i \neq 0$

$$b_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ji} X_{jk} y_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji} X_{jk})^2}$$ где $i \neq k$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ji}^* y_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji}^*)^2}$$

Для расчета оценок дисперсий в определении коэффициентов регрессии используют следующие выражения

$$S^2_{b_0^*} = \frac{S^2_y}{N}$$

$$S^2_{b_0} = S^2_{b_0^*} + \frac{n S^2_{b_{ii}}}{N} \sum_{j=1}^{N} X^2_{ji}$$

$$S^2_{b_i} = \frac{S^2_y}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji})^2}$$

где $i \neq 0$

$$S^2_{b_i k} = \frac{S^2_y}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji} X_{jk})^2}$$

где $i \neq k$

$$S^2_{b_{ii}} = \frac{S^2_y}{\sum_{j=1}^{N} (X^*_{ji})^2}$$

Коэффициент b_i, считается значимым, если

$$|b_i| > S_{b_i} t_{\alpha,n}$$

Аналогично проверяется значимость остальных коэффициентов регрессии.

Проверка адекватности уравнения регрессии осуществляется с помощью критерия Фишера

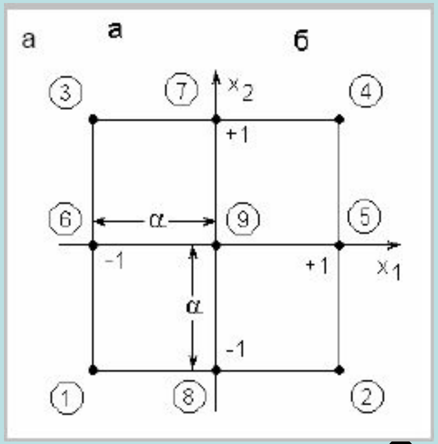
$$F_p = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{воспр}}$$

Ортогональный план

Это план 2-ого порядка после преобразований (*)

$$(*)\ x'_{ij} = x_{ij}^{\ 2} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}^{\ 2}}{n} = x_{ij}^{\ 2} - \bar{x}_i^{\ 2}$$

Эти преобразования позволяют усреднить случайные погрешности



Номер опыта		Факторы						Результат y_j
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1'	x_2'	
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	y_4
Звезд-Ные точки	5	+1	α=+1	0	0	+1/3	-2/3	y_5
	6	+1	α=-1	0	0	+1/3	-2/3	y_6
	7	+1	0	α=+1	0	-2/3	+1/3	y_7
	8	+1	0	α=-1	0	-2/3	+1/3	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y_9

Ортогональный план 2-ого порядка

Тогда уравнение регрессии

$$y = b_0' + \sum_{j=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}' x_i' ;$$

В итоге уравнение регрессии преобразуется к виду

$$\hat{y} = b_0' + \sum_{j=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}' (x_i^{\ 2} - \bar{x}_i^{\ 2})$$

Метод ротатабельного центрального композиционного планирования

Метод ротатабельного планирования эксперимента позволяет получать более точное математическое описание поверхности отклика по сравнению с ортогональным ЦКП, что достигается благодаря увеличению числа опытов в центре плана и специальному выбору величины «звездного» плеча α.

Это план, у которого точки плана располагаются на окружностях (сферах, гиперсферах)

Точность оценивания функции отклика по любому направлению факторного пространства (для всех точек плана) одинаковая, что позволяет наилучшим образом извлечь максимальное количество (несмещенной) информации из плана

Характеристики ротатабельного ЦКП

Число факторов	Число опытов фактор. планирования	Число опытов в звездных точках	Число опытов в центре плана	Общее число опытов	α
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,680
4	16	8	7	31	2,000
5*	32	10	10	52	2,378
5**	16	10	6	32	2,000

* Полный факторный эксперимент.

** Эксперимент по методу дробных реплик.

При ротатабельном ЦКП для вычисления коэффициентов регрессии и соответствующих оценок дисперсий находят следующие константы

$$A = \frac{1}{2B\left[(n+2)B - n\right]}$$

$$B = \frac{nN}{(n+2)(N - N_0)}$$

$$C = \frac{N}{N - N_0}$$

где n – число факторов; N – общее число опытов ротатабельного ЦКП; N_0 – число опытов в центре плана

На основании результатов эксперимента вычисляют следующие суммы

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N} y_j \qquad S_i = \sum_{j=1}^{N} X_{ji} y_j$$ (где i=1,2,…,n),

$$S_{ik} = \sum_{j=1}^{N} X_{ji} X_{jk} y_j$$ (где $i \neq k$),

$$S_{ii} = \sum_{i=1}^{N} X_{ji}^2 y_j$$ (где i=1,…, n)

Формулы для расчета коэффициентов регрессии имеют следующий вид

$$b_0 = \frac{2AB}{N}\left[S_0 B(n+2) - C\sum_{i=1}^{n} S_{ii}\right]$$

$$b_i = \frac{CS_i}{N} \qquad b_{ik} = \frac{C^2 S_{ik}}{BN}$$ где $i \neq k$

$$b_{ii} = \frac{AC}{N}\left\{S_{ii}C[B(n+2)-n] + C(1-B)\sum_{i=1}^{n} S_{ii} - 2BS_0\right\}$$

Оценки дисперсий в определении коэффициентов регрессии вычисляют по следующим формулам

$$S^2_{b_0} = \frac{2AB(n+2)}{N} S^2_{воспр}$$

$$S^2_{b_i} = \frac{S^2_{воспр}}{N - N_0}$$ (где i=1,2,…,n)

$$S^2_{b_{ik}} = \frac{C^2 S^2_{воспр}}{N}$$ (где $i \neq k$)

$$S^2_{b_{ii}} = \frac{AC^2 S^2_{воспр}}{N}\left[B(n+1)-(n-1)\right]$$

Коэффициент b_i, считается значимым, если

$$\left|b_i\right| > S_{b_i} t_{\alpha,n}$$

Аналогично проверяется значимость остальных коэффициентов регрессии

Оценку дисперсии адекватности рассчитывают по формуле

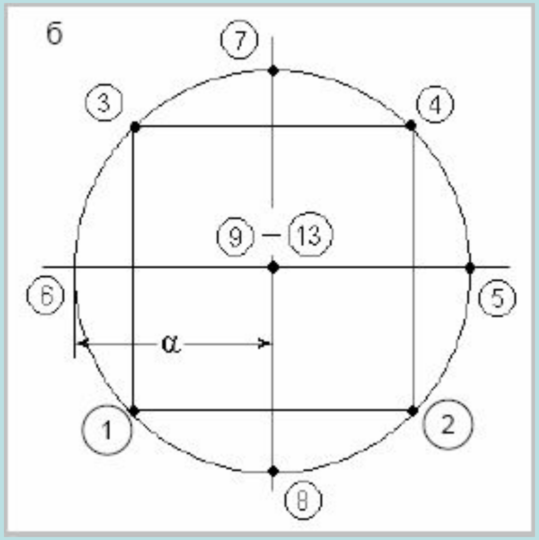
$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}(y_j^э - y_j^p)^2 - S_{воспр}^2(N_0 - 1)}{N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)}$$

С ней связано число степеней свободы

$$f_{ад} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)$$

Проверку адекватности уравнения регрессии осуществляют с помощью критерия Фишера

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_{воспр}^2}$$



Номер опыта		Факторы						Результат
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_j
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
Звездные точки	5	+1	+1,414	0	0	2	0	y_5
	6	+1	-1,414	0	0	2	0	y_6
	7	+1	0	+1,414	0	0	2	y_7
	8	+1	0	-1,414	0	0	2	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	y_9
	10	+1	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	+1	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	+1	0	0	0	0	0	y_{12}

Ротабельный план 2-ого порядка

Для того, что бы привести план 2-ого порядка к ротатабельному, величину плеча выбирают из условия

$$(**)\ \alpha = 2^{\frac{k}{4}} \text{ при } k < 5 \text{ и } \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}} \text{ при } k >= 5$$

Пример. Рассмотреть ротатабельное ЦКП для двух факторов. Матрица планирования и результаты эксперимента приведены в таблице

Матрица планирования и результаты эксперимента

Система опытов	Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	$y_j^э$	y_j^p
Полный факторный эксперимент	1	−1	−1	+1	+1	+1	66,8	67,4
	2	+1	−1	−1	+1	+1	66,2	66,8
	3	−1	+1	−1	+1	+1	74,8	75,4
	4	+1	+1	+1	+1	+1	67,8	68,4
Опыты в "звездных" точках	5	+1,41	0	0	2	0	62,1	62,8
	6	−1,41	0	0	2	0	67,5	68,1
	7	0	+1,41	0	0	2	76,4	76,8
	8	0	−1,41	0	0	2	69,6	70,2
Опыты в центре плана	9	0	0	0	0	0	66,3	66,7
	10	0	0	0	0	0	67,2	66,7
	11	0	0	0	0	0	67,0	66,7
	12	0	0	0	0	0	66,2	66,7
	13	0	0	0	0	0	67,2	66,7

Для нахождения коэффициентов регрессии вычислим следующие вспомогательные коэффициенты

$$B = \frac{2 \cdot 13}{(2+2)(13-5)} = 0{,}81$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 0{,}81\left[\left(2+2\right) \cdot 0{,}81 - 2\right]} = 0{,}5$$

$$C = \frac{13}{8} = 1{,}63$$

На основании результатов опытов вычислим вспомогательные суммы

$$S_0 = \sum_{j=1}^{13} y_j^э = 885{,}1 \qquad S_1 = \sum_{j=1}^{13} X_{j1} y_j^э = -15{,}2$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{13} X_{j2} y_j^э = 19{,}2 \qquad S_{12} = \sum_{j=1}^{13} X_{j1} X_{j2} y_j^э = -6{,}4$$

$$S_{11} = \sum_{j=1}^{13} X_{j1}^2 y_j^э = 535{,}6 \qquad S_{22} = \sum_{j=1}^{13} X_{j2}^2 y_j^э = 567{,}6$$

Коэффициенты регрессии рассчитываем по формулам

$$\boldsymbol{b}_0 = \frac{2\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{N}}[\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n}+2) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}_{11} + \boldsymbol{S}_{22})] =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}81}{13}[885{,}1 \cdot 0{,}81(2+2) - 1{,}63(535{,}6 + 567{,}6)] = 66{,}7;$$

$$b_1 = \frac{CS_1}{N} = \frac{1{,}63(-15{,}2)}{13} = -1{,}89$$

$$b_2 = \frac{CS_2}{N} = \frac{1{,}63 \cdot 19{,}2}{13} = 2{,}41$$

$$b_{12} = \frac{C^2 S_{12}}{BN} = \frac{(1{,}63)^2 \cdot (-6{,}4)}{0{,}81 \cdot 13} = -1{,}61$$

$$b_{11} = \frac{AC}{N}\{S_{11}C[B(n+2)-n] + C(1-B)(S_{11}+S_{22}) - 2BS_0\} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 1,63}{13}\{535,6\cdot 1,63[0,81(2+2)-2] + 1,63(1-0,81)(535,6+567,6) -$$

$$- 2\cdot 0,81\cdot 885,1\} = -0,6;$$

$$b_{22} = \frac{AC}{N}\{S_{22}C[B(n+2)-n] + C(1-B)(S_{11}+S_{22}) - 2BS_0\} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 1,63}{13}\{567,6\cdot 1,63[0,81(2+2)-2] + 1,63(1-0,81)(535,6+567,6) -$$

$$2\cdot 0,81\cdot 885,1\} = 3,4.$$

Оценку дисперсии воспроизводимости можно найти на основании результатов опытов, проведенных в центре плана

$$\bar{y} = \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} y_j^{э} = \frac{1}{5}(66{,}3 + 67{,}2 + 67{,}0 + 66{,}2 + 67{,}2) = 67$$

$$S^2_{воспр} = \frac{1}{N_0 - 1}\sum_{j=1}^{N_0}(y_j^{э} - \bar{y}) = 0{,}3$$

Эта величина найдена при числе степеней свободы $f = N_0 - 1 = 5 - 1 = 4$

Оценки дисперсий в определении коэффициентов регрессии

$$S_{b_0}^2 = \frac{2AB(n+2)}{N} S_{воспр}^2 = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}81(2+2)0{,}3}{13} = 0{,}0748$$

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{N - N_0} = \frac{0{,}3}{13-5} = 0{,}0375$$

$$S_{b_{ik}}^2 = \frac{C^2 S_y^2}{N} = \frac{(1{,}63)^2 0{,}3}{13} = 0{,}0613$$

$$\boldsymbol{S_{b_{ii}}^2} = \frac{\boldsymbol{AC^2 S_y^2}}{\boldsymbol{N}} [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n}+1) - (\boldsymbol{n}-1)] =$$

$$= \frac{0{,}5(1{,}63)^2 0{,}3}{13} [0{,}81(2+1) - (2-1)] = 0{,}0438$$

Пользуясь таблицей значений критерия Стьюдента, находим $t_{\alpha,n} = 2{,}78$

для $f = 4$ и $P = 0{,}95$

$$S_{b_0} t_{\alpha,n} = 0{,}274 \cdot 2{,}78 = 0{,}761$$

$$S_{b_i} t_{\alpha,n} = 0{,}194 \cdot 2{,}78 = 0{,}539$$

$$S_{b_{ik}} t_{\alpha,n} = 0{,}248 \cdot 2{,}78 = 0{,}689$$

$$S_{b_{ii}} t_{\alpha,n} = 0{,}209 \cdot 2{,}78 = 0{,}581$$

Для проверки значимости коэффициентов регрессии рассмотрим соотношения:

$$|b_0| = 66{,}7 > S_{b_0} t_{\alpha,n}$$

$$|b_1| = 1{,}89 > S_{b_i} t_{\alpha,n}$$

$$|b_2| = 2{,}41 > S_{b_i} t_{\alpha,n}$$

$$|b_{12}| = 1{,}61 > S_{b_{ik}} t_{\alpha,n}$$

$$|b_{11}| = 0{,}61 > S_{b_{ii}} t_{\alpha,n}$$

$$|b_{22}| = 3{,}4 > S_{b_{ii}} t_{\alpha,n}$$

Все коэффициенты регрессии значимы.

Вычисляем оценку дисперсии адекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} (y_j^э - y_j^p)^2 - S_{воспр}^2 (N_0 - 1)}{N - \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)} = \frac{3{,}81 - 0{,}3 \cdot 4}{13 - \dfrac{4 \cdot 3}{2} - 4} = 0{,}87$$

Число степеней свободы, связанных с этой оценкой дисперсии

$$f_{ад} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1) = 13 - \frac{4 \cdot 3}{2} - 4 = 3$$

Расчетное значение критерия Фишера

$$F = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{воспр}} = \frac{0{,}87}{0{,}3} = 2{,}9$$

Из таблицы значений критерия Фишера соответствующее значение критерия $F_T = 6{,}6$.

Условие $F_p \le F_T$ выполнено, следовательно, уравнение регрессии

$$y = 66{,}7 - 1{,}89X_1 + 2{,}41X_2 - 1{,}61X_1X_2 - 0{,}61X_1^2 + 3{,}40X_2^2$$

адекватно представленным результатам эксперимента

Перейдем в уравнение регрессии от кодированных переменных к физическим

Пусть в нашем примере кодированные переменные X_1 и X_2 представляют собой температуру и концентрацию, причем координаты центра плана x_{01}= 60°С и x_{02}= 30%, а шаги варьирования Δx_1= 5°С и Δx_2= 1% . Тогда

$$X_1 = \frac{x_1 - x_{01}}{\Delta x_1} = 0{,}2x_1 - 12 \qquad X_2 = \frac{x_2 - x_{02}}{\Delta x_2} = x_2 - 30$$

Подставляя их в полученное в этом примере уравнение регрессии, преобразуем его к виду

$$y = 2409 + 9{,}57x_1 + 19{,}7x_2 - 0{,}32x_1x_2 - 0{,}0244x_1^2 + 3{,}4x_2^2$$

Пользуясь таким уравнением, исследователь избавляется от необходимости переводить всякий раз условия опыта в кодированные переменные