Модуль 1.
Арифметико-логические основы информатики

Содержание:

Лекция 1. Основные понятия информатики

Лекция 2. Системы счисления. Кодирование информации

Цели изучения:

- Сформировать представление об информационном обществе
- Объяснить роль и назначение информатики
- Определить понятие информации, её свойства, измерение и характеристики
- Получить знания о кодировании и представлении информации в ЭВМ

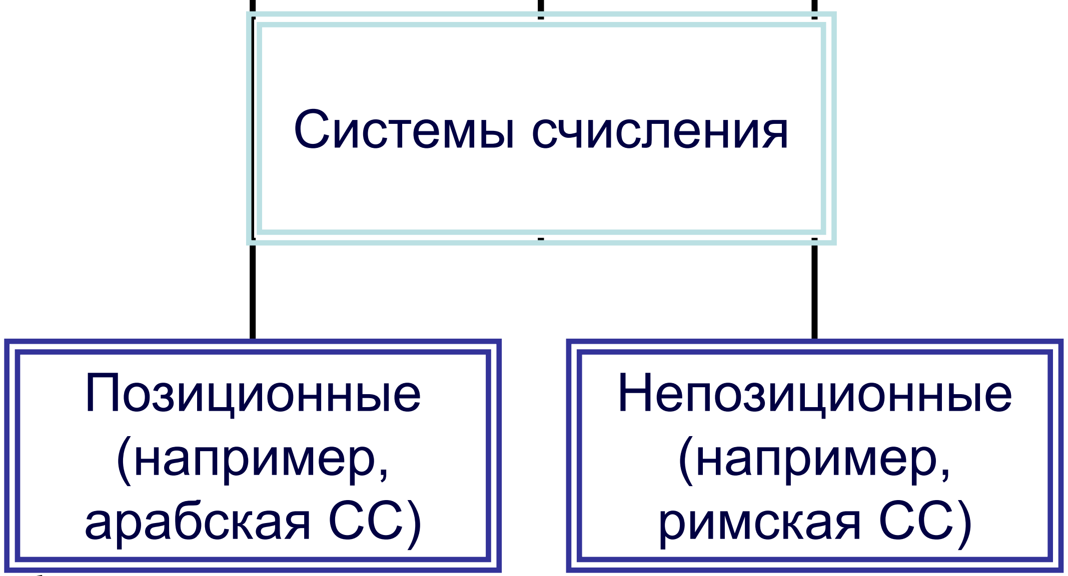
Лекция 2.
Системы счисления. Кодирование информации

Содержание:

- Системы счисления
- Формы представления чисел
- Перевод чисел из одной системы счисления в другую
- Кодирование чисел
- Варианты представления информации в ЭВМ

Системы счисления

- **Система счисления (СС)**– это способ наименования и изображения чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения.
- **Цифры** – *с*имволы, используемые для записи чисел.
- **Алфавит** – множество цифр, образующих систему счисления.



Системы счисления

- В ***непозиционной*** системе значение цифры не зависит от ее положения в записи числа. К таким системам счисления относится, например, римская система счисления.

Позиционные системы счисления

- Система счисления называется ***позиционной***, если одна и та же цифра имеет различные значения, определяемые позицией цифры в последовательности цифр, изображающей число.

- ***Основание*** системы счисления – количество (***P***) различных цифр, используемых для изображения числа в позиционной СС.

Пример

- Значения цифр лежат в пределах от 0 до *P*-1.

Позиционные системы счисления

Десятичная система счисления

Основание P = 10

Цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

9745

тысячи

сотни

десятки

единицы

Позиционные системы счисления

- Любое число ***C*** в позиционной системе счисления с основанием ***P*** может быть представлено в виде полинома

$$C = C_n P^n + C_{n-1} P^{n-1} + \ldots + C_1 P^1 + C_0 P^0 + C_{-1} P^{-1} + \ldots + C_{-m} P^{-m}$$

или

$$C = \sum_{i=-m}^{n} c_i p^i,$$

Пример 1

Пример 2

где

C_i – любые из *P* цифр алфавита,

нижние индексы определяют местоположение цифры в числе (разряд):

положительные значения индексов – для целой части числа (*n* разрядов);

отрицательные значения – для дробной (*m* разрядов).

Десятичная СС, Р = 10

$9745{,}24 =$

$= 9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 +$

$+ 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

Двоичная система счисления. P = 2

Цифры: 0, 1.

$$1011{,}101_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 +$$
$$+\ 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

Формы представления чисел

В вычислительных системах применяют две формы представления чисел

естественная форма - форма с фиксированной запятой (точкой)

нормальная форма - форма с плавающей запятой (точкой)

Естественная форма

- Числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением запятой, отделяющей целую часть от дробной.

$$C = C_n\, C_{n\text{-}1} \ldots C_1\, C_0,\, C_{-1} \ldots\, C_{-m}$$

- Запятая опускается, если дробная часть отсутствует.
- Позиции цифр в такой записи называются ***разрядами***.
- Разряды нумеруются влево от запятой, начиная с нуля: 0-й,1-й,...(n-1)-й, n-й; и вправо от запятой: 1-й, 2-й,...(m-й).

С фиксированной запятой

- Значение C_i цифры c_i в позиционных системах счисления определяется номером разряда:

$$\boldsymbol{C_i = c_i P_i}$$

- Величина P_i называется ***весом***, или значением, i-го разряда. В позиционных системах счисления значения соседних разрядов отличаются в P раз: левый в P раз больше правого.

- Пример – см. слайд 10, 11

Естественная форма

Максимальное целое число, которое может быть представлено в n разрядах:

$$\boxed{N_{\max} = P^n - 1}$$

Минимальное значащее (не равное 0) число, которое можно записать в m разрядах дробной части:

$$\boxed{N_{\min} = P^{-m}}$$

Пример

Имея в целой части числа n, а в дробной части m разрядов, можно записать всего $\boldsymbol{P^{n+m}}$ разных чисел.

Естественная форма

Пример

Двоичная система счисления.

$P = 2$.

$n = 10$, $m = 6$.

$0{,}015 < N < 1024$.

Нормальная форма

- Каждое число изображается в виде двух групп цифр.

Первая группа цифр называется ***мантиссой***, а вторая ***порядком.***

$$\boxed{N = \pm M P^{\pm r}}$$

где

М – мантисса числа ($|M| < 1$);

r – порядок числа (r - целое число);

P – основание системы счисления.

Пример

Нормальная форма

Пример

$$+721,355 = +0,721355 \cdot 10^{3}$$

$$+0,00328 = +0,328 \cdot 10^{-2}$$

$$-10301,20260 = -0,103012026 \cdot 10^{5}$$

Нормальная форма

- **Нормальная форма** представления имеет огромный диапазон отображения чисел и является основной в современных ЭВМ.

Пример

Диапазон значащих чисел в системе счисления с основанием P при наличии m разрядов у мантиссы и s разрядов у порядка (без учета знаковых разрядов у порядка и мантиссы) будет:

$$\boxed{P^{-m} P^{-(P^{s}-1)} \le N \le (1-P^{-m}) P^{(P^{s}-1)}}$$

Пример (продолжение)

Двоичная система счисления.

$P = 2$.

$m = 10$ – количество разрядов для мантиссы

$s = 6$ – количество разрядов для порядка

диапазон чисел простирается примерно

от $\mathbf{10^{-19}}$ до $\mathbf{10^{19}}$.

Системы счисления, используемые при работе с ЭВМ

Двоичная система счисления

- Основание *P* = 2.
- Алфавит включает две двоичные цифры: 0, 1.
- Любое число есть сумма степеней числа 2.

$$C = C_n \cdot 2^n + C_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot 2^1 + C_0 \cdot 2^0 + C_{-1} \cdot 2^{-1} + \ldots + C_{-m} \cdot 2^{-m}$$

Пример

$$101011{,}11_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} =$$

$$= 32 + 8 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 43{,}75_{10}.$$

Веса разрядов в двоичной системе счисления равны 1, 4, 8,16,... влево от запятой и 0,5; 0,25; 0,125; 0,625;... вправо от запятой.

Системы счисления, используемые при работе с ЭВМ

Шестнадцатеричная система счисления

- Алфавит включает

  цифры **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

  латинские буквы **A, B, C, D, E, F**

Таблица кодов в различных системах счисления

Десятичная система	Двоичная система	Шестнадцатеричная система
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Системы счисления, используемые при работе с ЭВМ

Двоично-десятичная система счисления

- В этой системе счисления все десятичные цифры отдельно кодируются четырьмя двоичными цифрами.

Пример

Десятичное число 9703 в двоично-десятичной системе выглядит так:

$$\underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0011}_{3}$$

Системы счисления, используемые при работе с ЭВМ

Преимущества двоичной системы счисления с точки зрения ЭВМ в следующем:

→ требуются элементы с двумя устойчивыми состояниями;

→ существенно упрощаются арифметические операции;

→ оборудования требуется в 1,5 раза меньше;

→ позволяет применить аппарат математической логики для анализа и синтеза схем.

Недостатки двоичной системы счисления:

→ большая длина записи чисел;

→ при вводе и выводе информации требуется перевод в десятичную систему счисления.

Двоичная арифметика

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
0 + 0 = 0	0 – 0 = 0	0 x 0 = 0	0 : 1 = 0
0 + 1 = 1	1 – 0 = 1	0 x 1 = 0	1 : 1 = 1
1 + 0 = 1	1 – 1 = 0	1 x 0 = 0	
1 + 1 = 10	10 – 1 = 1	1 x 1 = 1	

Правила арифметики

→ сложение, умножение и вычитание начинают с младших разрядов, деление - со старших.

→ при сложении единица переноса складывается с цифрами соседнего старшего разряда.

→ при вычитании единица заёма старшего разряда дает две единицы в младшем соседнем разряде.

Двоичная арифметика

Примеры

```
1)  110111,01        55,25          2)  11011,10        27,5
  + 10011,10       + 19,5              - 1101,01      - 13,25
   1001010,11        74,75                1110,01        14,25
```

```
3)          1011,1
         x  101,01
             10111
           10111          - сдвинутое на 2 разряда влево множимое
         10111            - сдвинутое на 4 разряда влево множимое
         111100,011
```

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Правило 1. Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное надо каждую цифру заменить четырехразрядным двоичным числом. Незначащие нули отбросить.

Пример

$305{,}4_{16} = 0011\ 0000\ 0101{,}0100_2 = 1100000101{,}01_2$

Правило 2. Для перевода числа из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную надо число разбить на четверки влево и вправо от запятой. Крайние группы, если необходимо дополнить нулями. Затем каждую четверку

Примечание

Это правило также используется для перевода двоичных чисел в восьмеричную СС и обратно (2^3=8)

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Правило 3. Задано число *C*, представленное в системе счисления с основанием *S*: $C = C_n\ C_{n-1}\ \ldots C_1\ C_0\ C_{-1}\ C_{-m}$. Нужно перевести его в h-систему, выполняя действия в новой системе счисления.

Для этого нужно представить его в виде суммы степеней S :

$C = C_n S^n + C_{n-1} S^{n-1} + \ldots + C_1 S^1 + C_0 S^0 + C_{-1} S^{-1} + \ldots + C_{-m} S^{-m}$,

где основание *S*, коэффициенты *C* и номера разрядов *i* выражены в новой *h*-системе.

Все действия надо выполнять в *h*-системе.

- *Этот способ удобен при $S < h$ и особенно для ручного перевода в десятичную систему счисления.*

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Пример

1. Перевести $2E5,A_{16}$ в десятичную систему счисления:

$$2E5,A_{16} = 2 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^{-1}$$
$$=741,625_{10}.$$

2. Перевести 52_{10} в двоичную систему счисления:

$$52_{10} = 101 \cdot 1010^1 + 10 \cdot 1010^0 = 110010+10 = 110100_2.$$

3. Перевести $1101,101_2$ в десятичную систему счисления:

$$1101,101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} =$$
$$= 13,625_{10}.$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Правило 4. Для перевода целого числа из S-системы в h-систему счисления в арифметике S-системы нужно последовательно делить это число и получающиеся частные на h до тех пор, пока частное не станет меньше h. Старшей цифрой в новой записи числа будет последнее частное, а следующие за ней цифры дают остатки, вписанные в последовательность, обратную их получению. Все вычисления производятся в старой S-системе. (При $S < h$ прежде, чем записать число, надо получившиеся остатки переписать в цифры h-системы).

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Примеры

1. Перевести число 70 в двоичную систему счисления

70 | 2
0 35 | 2
1 17 | 2
1 8 | 2
0 4 | 2
0 2 | 2
0 **1**

$70_{10} = \mathbf{1000110_2}$

2. Перевести 10000000 в десятичную систему счисления

10000000 | 1010
\- 1010   1100 | 1010
1100   - 1010   **1**
\- 1010 $10 = \mathbf{2}_{10}$
$1000 = \mathbf{8}_{10}$

$10000000_2 = \mathbf{128}_{10}$

Кодирование чисел

В ЭВМ используется коды чисел:

- ***прямой***,
- ***обратный***,
- ***дополнительный***.

Знак “+” кодируется нулем (**0**), знак “–” кодируется единицей (**1**), которые записываются в дополнительном старшем разряде – ***знаковом разряде***.

При помощи этих кодов:

- автоматически определяется знак результата;
- операция вычитания сводится к арифметическому сложению кодов чисел;
- упрощается операционная часть ЭВМ.

Прямой код числа

Прямой код числа $C = \underline{+}\, C_n\, C_{n-1}\, C_{n-2} \ldots C_1\, C_0$

$$\boxed{C_{np} = \begin{cases} |C| & npu \quad C > 0 \\ P^{n+1} + |C| & npu \quad C < 0 \end{cases}}$$

Для отрицательных двоичных чисел имеем:

$C_{пр} = 2 + |\text{-}\, C_n\, C_{n-1} \ldots C_0\,| = \mathbf{1.}C_n\, C_{n-1} \ldots C_0$,

где точкой отделен знаковый разряд.

→ Таким образом, для получения прямого кода числа надо в знаковый разряд записать **0** для положительных и **1** для отрицательных чисел.

Пример

C = +10110	C = -10110
$C_{пр}$= 0.10110	$C_{пр}$= 1.10110.

Обратный код числа

Обратный код числа $C = \underline{+} C_n C^{n-1} C^{n-2} \ldots C^1 C^0$

$$C_{обр} = \begin{cases} |C| & при \quad C > 0 \\ P^{n+2} - P^0 - |C| & при \quad C < 0 \end{cases}$$

Для отрицательных двоичных чисел имеем:

$C_{обр} = 2^{n+2} - 1 - |- C_n C_{n-1} \ldots C_0| = 11..1 - 0.C_n C_{n-1} \ldots C_0 = 1.\bar{C}_n \bar{C}_{n-1} \ldots \bar{C}_0$,

где $\bar{C}_i = 1$ при $C_i = 0$ и $\bar{C}_i = 0$ при $C_i = 1$.

→ Таким образом, для представления двоичных чисел в обратном коде надо в знаковый разряд записать 0 или 1, в случае *отрицательных* чисел для получения обратного кода надо значение разрядов инвертировать: вместо 0 записать 1, вместо 1 – 0.

Пример

$C = +10110$	$C = -10110$
$C_{обр} = 0.10110$	$C_{обр} = 1.01001$

Дополнительный код числа

Дополнительный код числа $C = \underline{+}\, C_n\, C^{n-1}\, C^{n-2} \ldots C^1\, C^0$

$$\boxed{C_{доп} = \begin{cases} |C| & при \quad C > 0 \\ P^{n+2} - |C| & при \quad C < 0 \end{cases}}$$

→ При представлении двоичного отрицательного числа в дополнительном коде в знаковый разряд надо записать 1, а цифровую часть заменить дополнением числа до 2^{n+1} .

→ Дополнительный код отрицательных чисел получается из обратного прибавлением единицы в младший разряд.

$$\mathbf{C_{доп} = C_{обр} + 1, \qquad при \quad C < 0} \,.$$

Пример

$C = +10110$ $\qquad$ $C = -10110$

$C_{доп} = 0.10110$ $\qquad$ $C_{доп} = C_{обр} + 1 = 1.01001 + 1 = 1.01010$

Кодирование чисел

Пример

Найти дополнительный код числа -65_{10}

65 | 2
1 32 | 2
0 16 | 2
0 8 | 2
0 4 | 2
0 2 | 2
0 1

$65_{10} = 1000001_2$

1.1000001 – прямой код

1.0111110 – обратный код
+ 1

1.0111111 – дополнительный код

В знаковом разряде – **1**,
т.к. число отрицательное

Кодирование чисел

→ Числа в ЭВМ кодируются в полях, кратных целому числу байт. 1 байт = 8 разрядов (битов). Это необходимо учитывать при нахождении специальных кодов числа.

Например:

Найдем дополнительный код числа $x = -4$

$x_{пр.} = 1.0000100$ – прямой код

$x_{обр.} = 1.1111011$ – обратный код (инвертируем разряды)

$+ \qquad 1$

$x_{доп.} =$ **1.1111100** – дополнительный код

Выводы:

→ Только для отрицательных чисел прямой, обратный и дополнительный коды имеют различные значения.

→ У положительных чисел прямой, обратный и дополнительный коды совпадают!

→ При вычитании чисел в прямом коде возникают затруднения – нужно сначала определить больший модуль, от него отнять меньший и результату присвоить знак большего модуля. Поэтому применяют обратный и дополнительный коды чисел.

Сложение чисел в прямом и дополнительном коде

Правило 1. При сложении дополнительных кодов чисел знаковые разряды складываются аналогично остальным, перенос из знакового разряда теряется, результат получается в дополнительном коде.

Правило 2. При сложении чисел в обратном коде знаковые разряды складываются аналогично остальным, перенос из знакового разряда прибавляется к младшему разряду результата (так называемый циклический перенос), результат получается в обратном коде.

Кодирование чисел

Примеры

1) $X = 0.0101 \qquad Y = -0.0011$

$X_{доп} = 0.0101, \qquad Y_{доп} = 1.1101$

$$
\begin{array}{r}
X_{доп} + Y_{доп} = 0{,}0101 \\
+\underline{1{,}1101} \\
\cancel{1}\mathbf{0{,}0010}
\end{array}
$$
(единица переноса теряется)

2) $A = +0{,}10111 \qquad B = -0{,}01010$

$A_{обр} = 0{,}10111 \qquad B_{обр} = 1{,}10101$

$$
\begin{array}{r}
A_{обр} + B_{обр} = 0{,}10111 \\
+\underline{1{,}10101} \\
10{,}01100 \\
\underline{\qquad 1} \\
\mathbf{0{,}01101}
\end{array}
$$
(циклический перенос)

Варианты представления информации в ПК

→ Вся информация (данные) представлена в виде двоичных кодов.

→ Для удобства работы введены термины, обозначающие совокупности двоичных разрядов (см. табл.)

Единицы измерения информации в ЭВМ

Количество двоичных разрядов в группе	1	8	16	8*1024	$8*1024^2$	$8*1024^3$	$8*1024^4$
Наименование единицы измерения	Бит	Байт	Слово	Кбайт	Мбайт	Гбайт	Тбайт

–

1 Кбайт (килобайт) = 2^{10} байтов
1 Мбайт (мегабайт) = 2^{20} байтов
1 Гбайт (гигабайт) = 2^{30} байтов
1 Тбайт (терабайт) = 2^{40} байтов

Варианты представления информации в ПК

Кодирование символов

→ Однобайтная кодировка ***ASCII*** (American Code for Information Interchange) – американский код обмена информацией. В одном байте можно закодировать значение одного символа из 256 возможных ($2^8 = 256$).

→ Двухбайтная кодировка ***Unicode***, в ней коды символов могут иметь значение от 0 до 65535 ($2^{16} = 65536$). В этой кодировке имеются коды для практически всех применяемых символов (букв алфавитов разных языков, математических, декоративных символов и т. д.).

–

Варианты представления информации в ПК

→ Последовательность нескольких битов или байтов часто называют ***полем данных***.

→ Биты в числе (в слове, в поле и т.п.) нумеруются *справа налево*, начиная с 0-го разряда.

→ В ПК могут обрабатываться поля постоянной и переменной длины.

Поля постоянной длины:

- слово – 2 байта;
- полуслово – 1 байт;
- двойное слово – 4 байта;
- расширенное слово – 8 байт.

Поля переменной длины могут иметь любой размер от 0 до 256 байт, но обязательно равный целому числу байтов.

–

Варианты представления информации в ПК

Пример

Структурно запись числа $-193_{10} = -11000001_2$ в разрядной сетке ПК выглядит следующим образом.

Число с фиксированной запятой формата слово со знаком:

	Знак	Абсолютная величина числа														
N разряда	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Число	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1

–