



Направление подготовки
31.05.01 Лечебное дело (врач лечебник)

Учебный План утвержден решениями Ученого совета НГМУ
Протокол №3 от 17.04.2018 г.:

Учебная дисциплина
Б1.Б.11 МАТЕМАТИКА

(Примечание: См. Вид-Страница заметок к слайду)



КАФЕДРА
МАТЕМАТИКИ
НГМУ



ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ

Тема:

Введение в теорию вероятностей.

Логические операции над множествами.

Элементы комбинаторики.

Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления.



**КАФЕДРА
МАТЕМАТИКИ**



МАТЕМАТИКА

Рабочая программа дисциплины

(лекционные занятия)

Раздел 1. Теория вероятностей

8 час

- | | | |
|---|---|-------|
| 1 | Тема-1.1 Введение в теорию вероятностей. Логические операции над множествами. Элементы комбинаторики. Вероятность события -определения, основные свойства и формулы вычисления. | 2 час |
| 2 | Тема-1.2 Алгебра событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса. Формула Бернулли и формула Пуассона. | 2 час |
| 3 | Тема-1.3 Случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения дискретных случайных величин. | 2 час |
| 4 | Тема-1.4 Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения непрерывных случайных величин. Правило трех сигм. | 2 час |

Раздел 2. Математическая статистика

4 час

- | | | |
|---|---|-------|
| 5 | Тема-2.1 Основные понятия математической статистики. Статистические оценки параметров распределения. | 2 час |
| 6 | Тема-2.2 Основные понятия теории статистических гипотез. Проверка статистических гипотез. Основы теории корреляции. | 2 час |



Тема - 1.1

План лекционного занятия

(лекционное занятие)

Введение в теорию вероятностей

- | | | |
|---|---|--------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none">• Предмет теории вероятностей, цель и задачи.• Краткая историческая справка. Основоположники теории вероятностей.• Вклад российских математиков в развитие теории вероятностей.• Области применения теории вероятностей. | 15 мин |
|---|---|--------|

Логические операции над множествами

- | | | |
|---|--|--------|
| 2 | <ul style="list-style-type: none">• Множества, их элементы и выборки элементов• Инверсия (отрицание) и дополнение• Объединение (сложение, дизъюнкция) и пересечение (умножение, конъюнкция)• Разность (вычитание) и симметрическая разность | 15 мин |
|---|--|--------|

Элементы комбинаторики

- | | | |
|---|--|--------|
| 3 | <ul style="list-style-type: none">• Соединения, их классификация - перестановки, размещения, сочетания• Перестановки• Размещения• Сочетания | 30 мин |
|---|--|--------|

Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления

- | | | |
|---|--|--------|
| 4 | <ul style="list-style-type: none">• Случайные события – основные определения• Классическое определение вероятности• Геометрическое определение вероятности• Относительная частота события, статистическая вероятность• Аксиоматическое определение вероятности | 30 мин |
|---|--|--------|



1. Введение в теорию вероятностей :

- Предмет теории вероятностей , цель и задачи

Предметом теории вероятностей (одного из разделов математики) являются закономерности, свойственные множественным однотипным случайным явлениям (экспериментам).

Цель применения вероятностных методов в исследованиях в том, чтобы минуя слишком сложное (зачастую практически невозможное) изучение отдельного явления (эксперимента), результаты которого обусловлены большим количеством влияющих факторов, обратиться к закономерностям, присущим множествам подобных однотипных случайных явлений.

Задачи использования вероятностных методов заключаются в том, чтобы сделать научный прогноз (определить количественную меру возможности появления ожидаемого события) в предметной области изучаемых случайных явлений (проводимых экспериментах) и целенаправленно влиять на их ход, контролировать и ограничивать сферу действия случайностей (случайных факторов), снижать их влияние на результат экспериментов.



1. Введение в теорию вероятностей :

- Краткая историческая справка.

Основоположники теории вероятностей.



Блез Паскаль
(*Blaise Pascal*)
1623-1662
Франция



Пьер Ферма
(*Pierre de Fermat*)
1601-1665
Франция



Христиан Гюйгенс
(*Christiaan Huygens*)
1629-1695
Голландия



Якоб Бернулли
(*Jakob Bernoulli*)
1655-1705
Швейцария



Пьер-Симон Лаплас
(*Pierre-Simon de Laplace*)
1749-1827
Франция

Первые научные работы Б. Паскаля, П. Ферма и Х. Гюйнеса по теории вероятностей, которые позднее развил Я. Бернулли, появились в связи с анализом закономерностей при игре в кости.

П-С. Лаплас придал теории вероятностей практически законченный вид.





1. Ведение в теорию вероятностей :

- Вклад российских математиков в развитие теории вероятностей.



П.Л. Чебышев
1821-1894



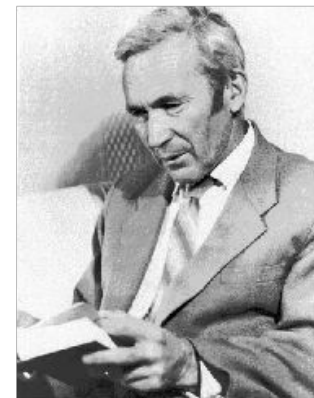
А.М. Ляпунов
1857-1918



А.А. Марков
1856-1922



С.Н. Бернштейн
1880-1968



А.Н. Колмогоров
1903-1987

П.Л. Чебышев и его ученики А.М. Ляпунов и А.А. Марков поставили и решили ряд общих задач в теории вероятностей, обобщающих теоремы Бернулли и Лапласа.

Труды С.Н. Бернштейна и А.Н. Колмогорова позволили теории вероятностей приобрести строгий математический вид. Теория вероятностей стала окончательно восприниматься как один из разделов математики.



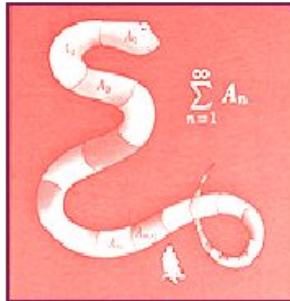
1. Введение в теорию вероятностей :

- Области применения теории вероятностей.

Внедрение методов теории вероятностей в сферы практической деятельности началось в 20 веке.



Сельское хозяйство, биометрия (начало XX в. Англия)



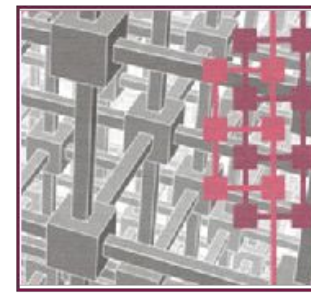
Медицина и фармакология



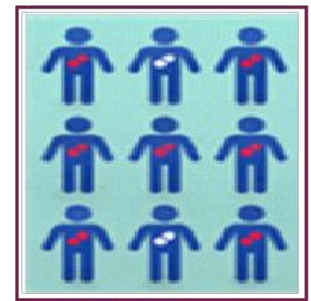
Биология и биоинформатика



Астрономия, физика и астрофизика



Надежность технических систем



Прикладная статистика и другие



С середины 1980-х годов возникла возможность широкого использования компьютеров - фактор, революционизировавший применение всех приложений теории вероятностей.

Методом прямых вычислительных экспериментов на математических моделях стало возможно получать результаты, которые ранее были недоступны – thinking of unthinkable.





Тема - 1.1

План лекционного занятия

(лекционное занятие)

Введение в теорию вероятностей

- | | | |
|---|---|--------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none">• Предмет теории вероятностей, цель и задачи.• Краткая историческая справка. Основоположники теории вероятностей.• Вклад российских математиков в развитие теории вероятностей.• Области применения теории вероятностей. | 15 мин |
|---|---|--------|

Логические операции над множествами

- | | | |
|---|--|--------|
| 2 | <ul style="list-style-type: none">• Множества, их элементы и выборки элементов• Инверсия (отрицание) и дополнение• Объединение (сложение, дизъюнкция) и пересечение (умножение, конъюнкция)• Разность (вычитание) и симметрическая разность | 15 мин |
|---|--|--------|

Элементы комбинаторики

- | | | |
|---|--|--------|
| 3 | <ul style="list-style-type: none">• Соединения, их классификация - перестановки, размещения, сочетания• Перестановки• Размещения• Сочетания | 30 мин |
|---|--|--------|

Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления

- | | | |
|---|--|--------|
| 4 | <ul style="list-style-type: none">• Случайные события – основные определения• Классическое определение вероятности• Геометрическое определение вероятности• Относительная частота события, статистическая вероятность• Аксиоматическое определение вероятности | 30 мин |
|---|--|--------|



2. Логические операции над множествами:

- Множества, их элементы и выборки элементов

Множество – это совокупность любых объектов (элементов, обозначаемых малыми латинскими буквами) материальных или абстрактных (мысленных), которые понимаются как единое целое и обозначаются большими латинскими буквами.

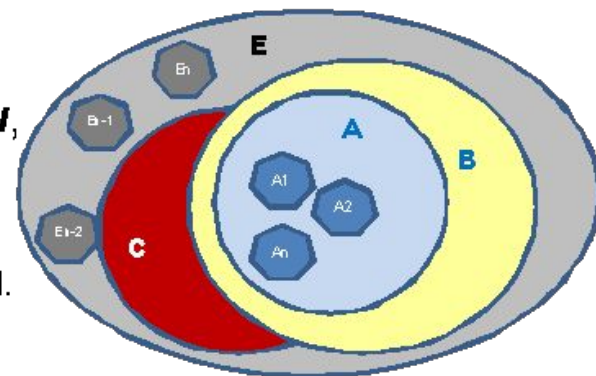
Принадлежность элементов к множеству записывается как: $a_n \in A$;

Множество состоит из всех его **элементов**: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
и/или подмножеств $E = \{A, B, C, \dots, e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Включенность **подмножества** в множество записывается как: $A \subset B \subset E$;

Правило суммы: Если из заданного множества **E** некоторый **элемент** e_1 может быть выбран (**m**) **способами**, а другой **элемент** e_2 может быть выбран (**n**) **способами**, то выбрать **либо** e_1 , **либо** e_2 можно (**m+n**) **способами**.

Правило произведения: Если из заданного множества **E** некоторый **элемент** e_1 может быть выбран (**m**) **способами**, и после каждого такого выбора другой **элемент** e_2 может быть выбран (**n**) **способами**, то пара элементов (e_1, e_2) в указанном порядке может быть выбрана (**m n**) **способами**.





2. Логические операции над множествами:

• Инверсия (отрицание) и дополнение

Название логической операции	Обозначение, символьная запись	Таблица истинности	Диаграмма Эйлера	Логический элемент цифровой схемы
Инверсия, отрицание множества A	A	$A = 1; A = 0$ $A = 0; A = 1$		

Если множество A есть единое целое, содержащее все его элементы ($A=1$), тогда множество A есть пустое множество ($A=0$) и не содержит никаких элементов.

Название логической операции	Обозначение, символьная запись	Таблица истинности	Диаграмма Эйлера	Логический элемент цифровой схемы
Дополнение	A'	$A + A' = 1$ $1' = 0; 0' = 1$		

Если некое множество, представляет собой единое целое, и состоит из двух подмножеств A и A' , содержащих в себе все элементы единого множества ($A+A'=1$), то подмножество A' является дополнением подмножества A до единого целого.

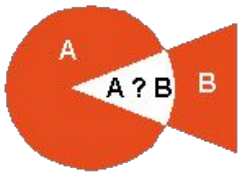
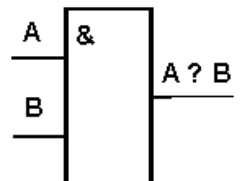


2. Логические операции над множествами:

• Объединение и пересечение

Название логической операции	Обозначение, символьная запись	Таблица истинности	Диаграмма Эйлера	Логический элемент цифровой схемы
Объединение (сложение, дизъюнкция)	$A \vee B$ $A \text{ or } B$ $A + B$	$0 \vee 0 = 0$ $0 \vee 1 = 1$ $1 \vee 0 = 1$ $1 \vee 1 = 1$	 $A \subset (A \vee B)$ $B \subset (A \vee B)$	

Элементами множества $(A \vee B)$ будут являться все элементы, которые принадлежат или подмножеству A , или подмножеству B , то есть образуют множество (фигуру), являющееся результатом объединения двух исходных подмножеств.

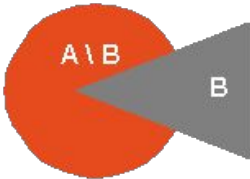
Название логической операции	Обозначение, символьная запись	Таблица истинности	Диаграмма Эйлера	Логический элемент цифровой схемы
Пересечение (умножение, конъюнкция)	$A \wedge B$ $A \text{ and } B$ $A \cdot B$	$0 \wedge 0 = 0$ $0 \wedge 1 = 0$ $1 \wedge 0 = 0$ $1 \wedge 1 = 1$	 $(A \wedge B) \subset A$ $(A \wedge B) \subset B$	

Элементами подмножества $(A \wedge B)$ будут являться только те элементы, которые одновременно принадлежат и множеству A , и множеству B , то есть образуют подмножество (фигуру), являющееся результатом пересечения двух исходных множеств.



2. Логические операции над множествами:

• Разность и симметрическая разность

Название логической операции	Обозначение, символьная запись	Таблица истинности	Диаграмма Эйлера	Логический элемент цифровой схемы
Разность	$A \setminus B$	нет		нет

Элементами подмножества $(A \setminus B)$ будут являться те и только те элементы исходного множества A , которые одновременно не принадлежат множеству B .

Название логической операции	Обозначение, символьная запись	Таблица истинности	Диаграмма Эйлера	Логический элемент цифровой схемы
Симметрическая разность	$A \oplus B$	нет		нет

Элементами множества $A \oplus B$ будут являться те и только те элементы исходных множеств A или B , которые не принадлежат им одновременно.



Тема - 1.1

План лекционного занятия

(лекционное занятие)

Введение в теорию вероятностей

- | | | |
|---|--|--------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none">• Предмет теории вероятностей, цель и задачи.• Краткая историческая справка. Основатели теории вероятностей.• Вклад российских математиков в развитие теории вероятностей.• Области применения теории вероятностей. | 15 мин |
|---|--|--------|

Логические операции над множествами

- | | | |
|---|--|--------|
| 2 | <ul style="list-style-type: none">• Множества, их элементы и выборки элементов• Инверсия (отрицание) и дополнение• Объединение (сложение, дизъюнкция) и пересечение (умножение, конъюнкция)• Разность (вычитание) и симметрическая разность | 15 мин |
|---|--|--------|

Элементы комбинаторики

- | | | |
|---|--|--------|
| 3 | <ul style="list-style-type: none">• Соединения, их классификация - перестановки, размещения, сочетания• Перестановки• Размещения• Сочетания | 30 мин |
|---|--|--------|

Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления

- | | | |
|---|--|--------|
| 4 | <ul style="list-style-type: none">• Случайные события – основные определения• Классическое определение вероятности• Геометрическое определение вероятности• Относительная частота события, статистическая вероятность• Аксиоматическое определение вероятности | 30 мин |
|---|--|--------|



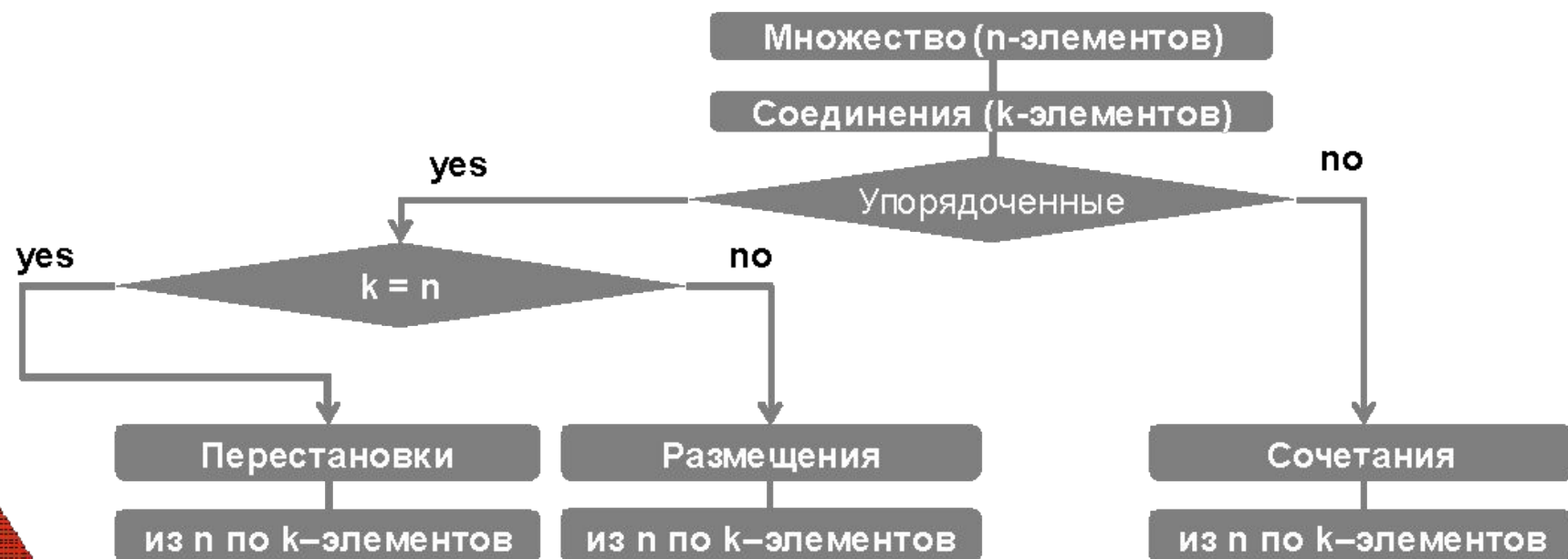
3. Элементы комбинаторики

• соединения, их классификация - перестановки, размещения, сочетания



Комбинаторика – раздел математики, изучающий различного рода **соединения** элементов в множестве: *перестановки, размещения, сочетания*.

Соединения – это выборки элементов из заданного множества, отличающиеся одна от другой или наборами элементов, или при одинаковых наборах, порядком расположения этих элементов в выборке.





3. Элементы комбинаторики

- перестановки

Перестановками (Permutation) P_n из множества **n** называются такие упорядоченные соединения из всех **n** – элементов заданного множества, которые отличаются друг от друга порядком расположения этих элементов.

Количество перестановок из всех **n** – элементов заданного множества определяется формулой:

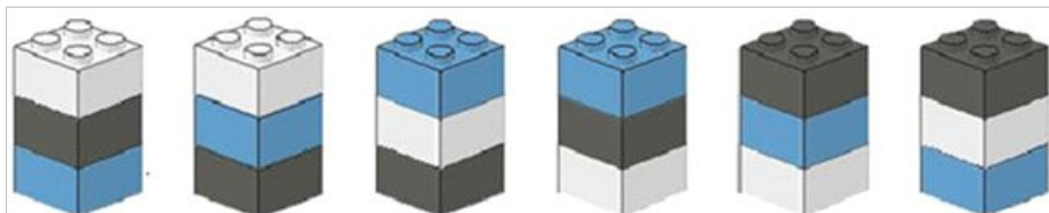
$$P_n = n!$$

где, «**n-факториал**» – это произведение всех натуральных чисел упорядоченного ряда от **n** до **1** включительно, определяемое по формуле:

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1, \text{ где } n > 2, \text{ причем } 1! = 1 \text{ также как } 0! = 1$$

Пример: количество перестановок из 3-х однотипных элементов равно шести.

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$





3. Элементы комбинаторики

- размещения

Размещениями (Accommodation) A_n^k из n – элементов по k заданного множества называются упорядоченные соединения по k – элементов в каждом, отличающиеся между собой либо набором элементов, либо их порядком.

Максимально возможное количество размещений из n – элементов по k определяется формулой:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

при $n = k$ количество размещений равно количеству перестановок.

Примечание :

техника сокращений

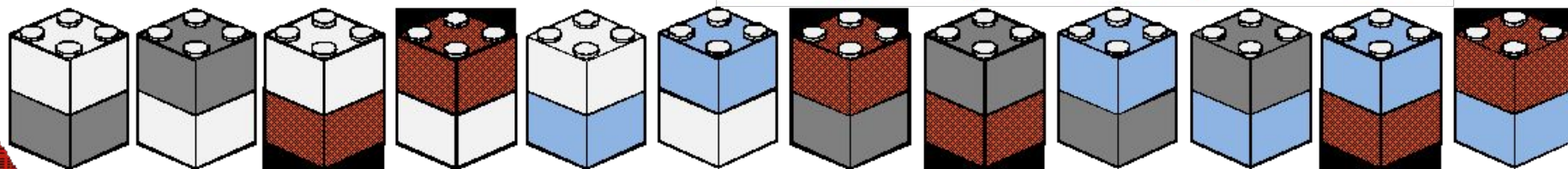
$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 5040$$

Пример: максимальное количество размещений

по 2-элемента из 4-х однотипных

элементов равно двенадцати.

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$





3. Элементы комбинаторики

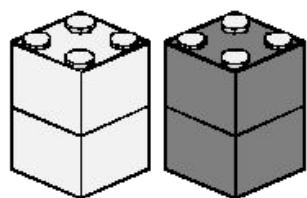
- размещения: размещения с повторениями

Размещениями с повторениями \bar{A}_n^k из n – элементов по k заданного множества называются размещения, у которых в соединениях по k – элементов могут участвовать повторяющиеся элементы, при этом их порядок в соединениях равнозначен.

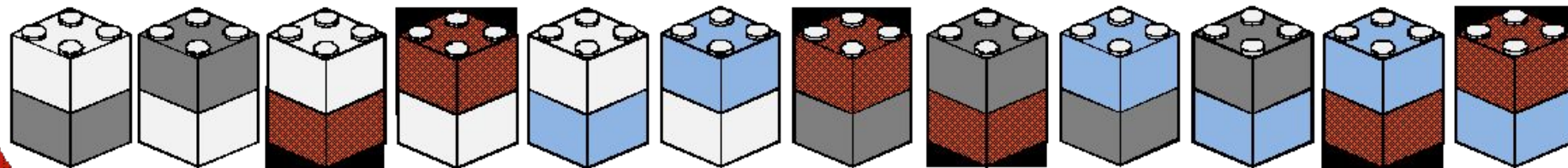
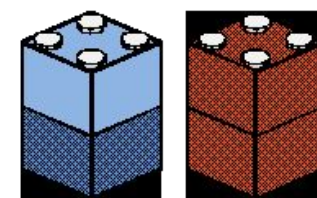
Максимально возможное количество размещений с повторениями из n – элементов по k определяется формулой:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Пример: максимальное количество размещений с повторениями по 2-элемента из 4-х однотипных элементов равно шестнадцати.



$$\bar{A}_4^2 = 4^2 = 16$$





3. Элементы комбинаторики

• сочетания

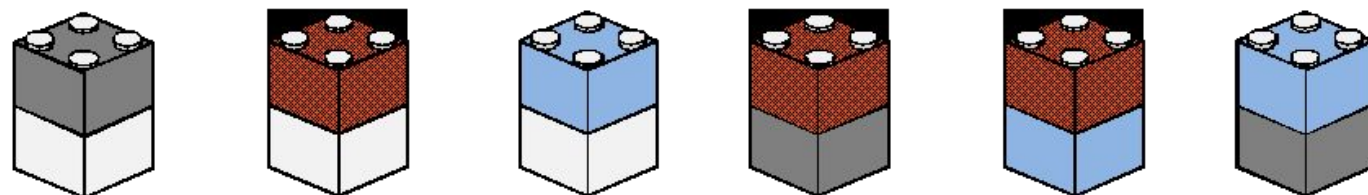
Сочетаниями (Combination) C_n^k из n – элементов по k заданного множества называются неупорядоченные соединения по k – элементов в каждом, отличающиеся между собой хотя бы одним элементом.

Максимально возможное количество сочетаний из n – элементов по k определяется формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n - k)! \times k!}$$

Пример: максимальное количество сочетаний по 2-элемента из 4-х однотипных элементов равно шести.

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4 - 2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6$$





3. Элементы комбинаторики

• сочетания: сочетания с повторениями

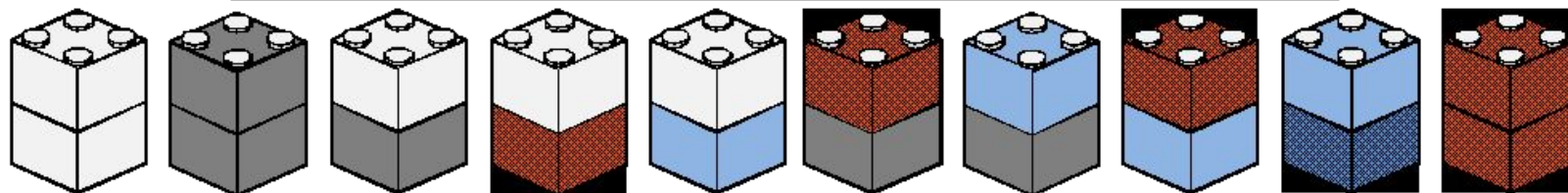
Сочетаниями с повторениями \bar{C}_n^k из n – элементов по k заданного множества называются сочетания, которые могут содержать повторяющиеся элементы сколько угодно раз от 1 до k включительно, или не содержать их вовсе.

Максимально возможное количество сочетаний с повторениями из n – элементов по k определяется формулой:

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! \times k!}$$

Пример: максимальное количество размещений с повторениями по 2-элемента из 4-х однотипных элементов равно десяти.

$$\bar{C}_4^2 = \frac{(4 + 2 - 1)!}{(4 - 1)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10$$





3. Элементы комбинаторики

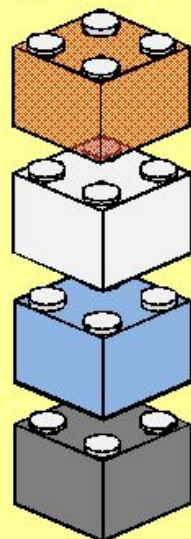
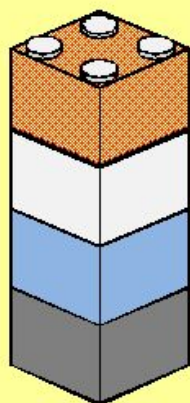
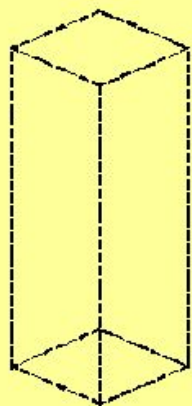
• сочетания: количественные свойства сочетаний

Количественные свойства сочетаний

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

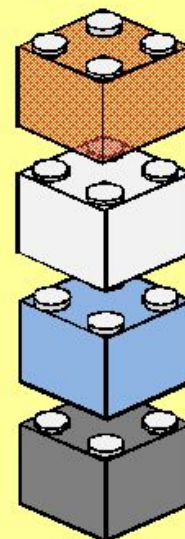
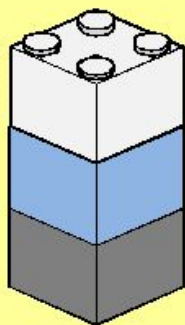
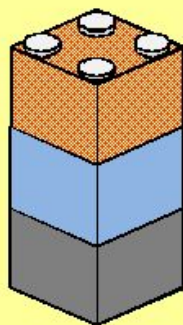
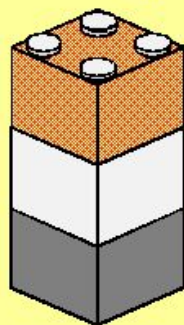
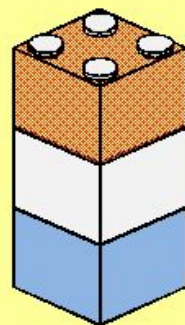


Пример: для $n=4$

$$C_n^m = C_n^{(n-m)}$$

$$C_4^{4-3} = 4$$

$$C_4^3 = 4$$



Пример: для $n=4$; $m=3$.

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$



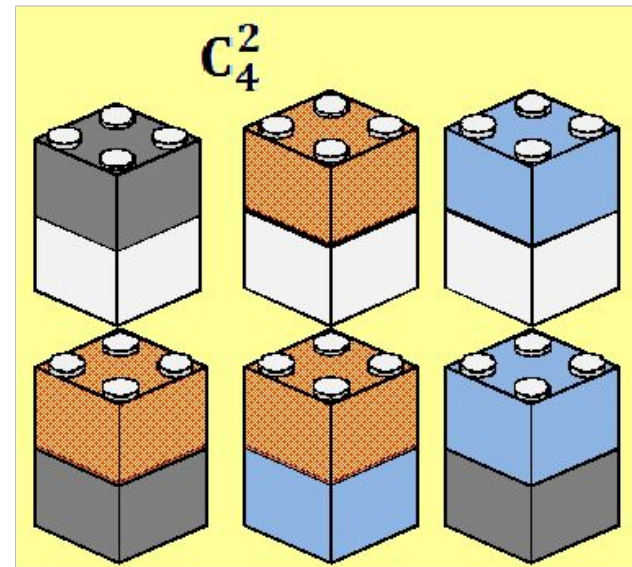
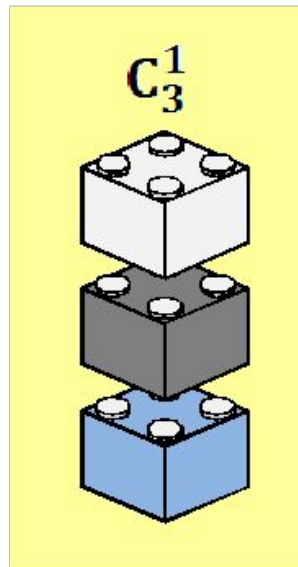
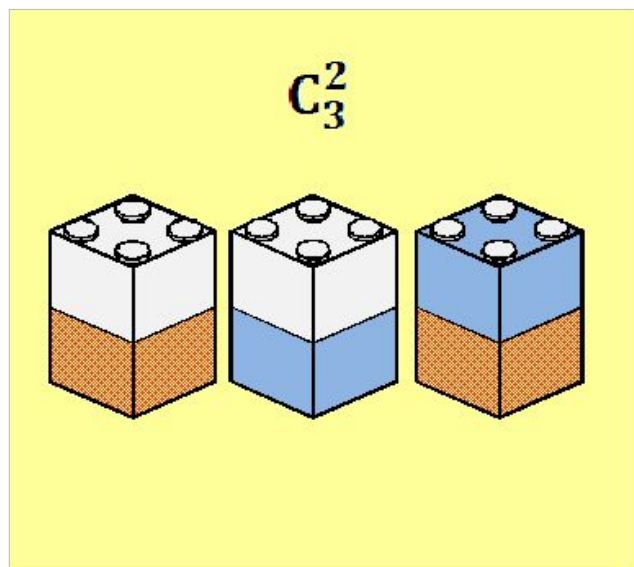
3. Элементы комбинаторики

• сочетания: количественные свойства сочетаний

Количественные свойства сочетаний

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{(n+1)}^k$$

Пример: $C_3^2 + C_3^1 = C_4^2$





Тема - 1.1

План лекционного занятия

(лекционное занятие)

Введение в теорию вероятностей

- | | | |
|---|---|--------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none">• Предмет теории вероятностей, цель и задачи.• Краткая историческая справка. Основоположники теории вероятностей.• Вклад российских математиков в развитие теории вероятностей.• Области применения теории вероятностей. | 15 мин |
|---|---|--------|

Логические операции над множествами

- | | | |
|---|--|--------|
| 2 | <ul style="list-style-type: none">• Множества, их элементы и выборки элементов• Инверсия (отрицание) и дополнение• Объединение (сложение, дизъюнкция) и пересечение (умножение, конъюнкция)• Разность (вычитание) и симметрическая разность | 15 мин |
|---|--|--------|

Элементы комбинаторики

- | | | |
|---|--|--------|
| 3 | <ul style="list-style-type: none">• Соединения, их классификация - перестановки, размещения, сочетания• Перестановки• Размещения• Сочетания | 30 мин |
|---|--|--------|

Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления

- | | | |
|---|--|--------|
| 4 | <ul style="list-style-type: none">• Случайные события – основные определения• Классическое определение вероятности• Геометрическое определение вероятности• Относительная частота события, статистическая вероятность• Аксиоматическое определение вероятности | 30 мин |
|---|--|--------|



4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления :

• случайные события - основные определения

Случайное событие – это результат эксперимента (при заданной совокупности условий S), состоящий в том, что ожидаемое единичное элементарное событие A может произойти или не произойти.

Вероятность случайного события $P(A)$ – это численная величина, отражающая меру того, что ожидаемое в результате эксперимента случайное событие произойдет.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Невозможное событие – это случайное событие $P(O)$, которое никогда не произойдет, как ожидаемое, в результате эксперимента. $P(O) = 0$

Достоверное событие – это случайное событие $P(?)$, которое обязательно произойдет, как ожидаемое, в результате эксперимента. $P(?) = 1$

Несовместные события – это события, когда появление одного из них, исключает появление других в одном и том же эксперименте.





4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления :

- Классическое определение вероятности

Вероятность (Probabilitas) события: классическое определение.

Вероятностью $P(A)$ события **A** называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n** всех единственных и равновозможных элементарных исходов эксперимента.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример: Совокупность условий S: в лототроне размещены 1 белый, 2 красных и 3 синих шара одинаковых по размеру и массе. Выпадение любого из них равновозможно.

$$P(B) = \frac{1}{6};$$

$$P(K) = \frac{2}{6};$$

$$P(C) = \frac{3}{6};$$

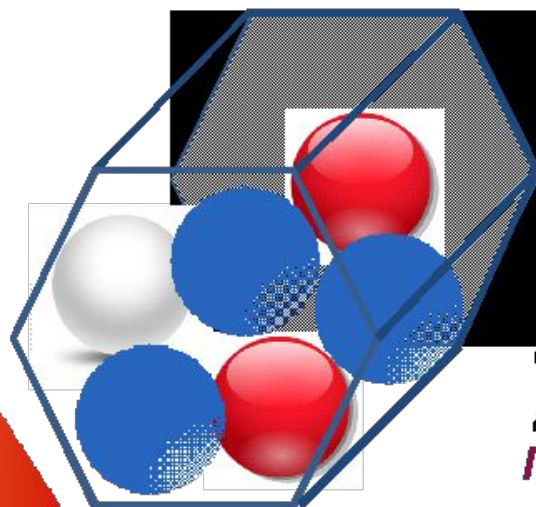
$$P(\text{Цв}) = \frac{5}{6};$$

Полная группа событий: это группа таких событий, из которых хотя бы одно обязательно произойдет.

$$P(B) + P(K) + P(C) = 1;$$

Единственно возможные события: это случайные события, исход одного (любого) из которых будет достоверен для ожидаемого результата эксперимента $P(A)=1$;

Противоположенные события: пара единственно возможных событий, образующих полную группу. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$;





4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления:

• Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью $P(A)$ события **A** называют отношение геометрической меры **g** (длина, площадь, объем), выражающей количество благоприятствующих событию **A** исходов, к аналогичной геометрической мере **G** , выражающей общее количество всех возможных и равновероятных исходов в эксперименте.

$$P(A) = \frac{g}{G}$$

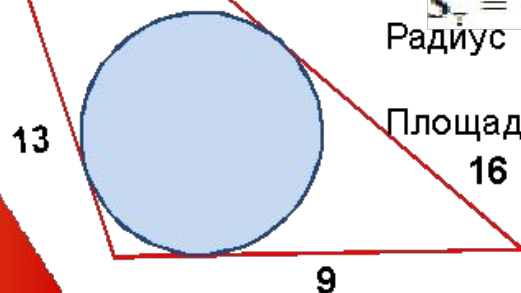
Пример №1. На участке телефонной линии между 40-м и 70-м километрами произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

$$P(A_{50-55}) = \frac{(55 - 50)}{(70 - 40)} = \frac{1}{6} \text{ или } 16,67\%$$

Пример №2. В треугольнике со сторонами 16, 13 и 9 (ед.) вписан круг. Точка **M** произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка **M** попадёт в круг. Общему числу положительных исходов соответствует площадь круга, а общему числу исходов площадь треугольника. Полупериметр треугольника $p = 1/2(16+13+9) = 19$ (ед.). Площадь треугольника по формуле Герона

$$S_T = \sqrt{19 \times (19 - 16) \times (19 - 13) \times (19 - 9)} = 6\sqrt{95} \text{ (ед.)}^2$$

Радиус вписанного в треугольник круга $r = S_T/p$.



Площадь круга

$$S_K = \pi r^2 = \pi \left(\frac{S_T}{p} \right)^2 = \pi \left(\frac{6\sqrt{95}}{19} \right)^2 = \frac{180\pi}{19} \text{ (ед.)}^2$$

Тогда:

$$P(M) = \frac{S_K}{S_T} = \frac{180\pi}{19 \times 6\sqrt{95}} \approx 0,51 \text{ или } 51\%$$

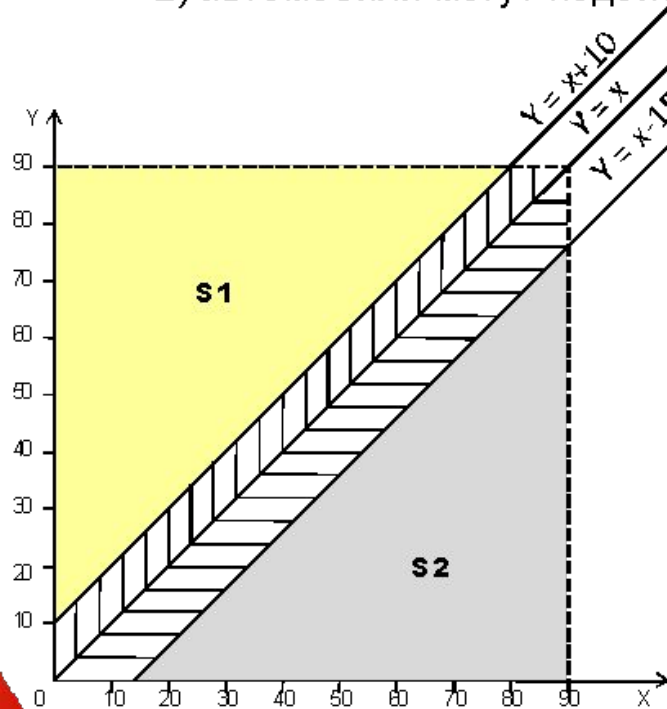


4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления:

- Геометрическое определение вероятности

Пример №3. Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 11.00 до 12.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

- 1) автомобили могут подойти на погрузку в любом порядке;
- 2) автомобили могут подойти на погрузку в любые моменты времени в течение 1,5 час.



Общему множеству исходов будет соответствовать площадь квадрата со стороной 90ед. (мин).

Множеству исходов, когда машины пересекутся во времени, соответствует площадь заштрихованной фигуры.

$$S_{\text{КВ}} = 90 \times 90 = 8100 \text{ (кв. ед)}$$

$$S_{\text{фиг}} = S_{\text{КВ}} - (S_1 + S_2)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{80 \times 80}{2} + \frac{75 \times 75}{2} = 6012,5 \text{ (кв. ед)}$$

$$P(A) = \frac{S_{\text{фиг}}}{S_{\text{КВ}}} = \frac{8100 - 6012,5}{8100} \approx 0,26 \text{ или } 26\%$$



4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления:

- Относительная частота события, статистическая вероятность

Относительная частота $W(A)$ события **A** это отношение числа экспериментов **m**, в которых данное событие появилось, к общему числу **n** фактически проведенных экспериментов

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Статистическая вероятность $P(A)$ события **A** это число, к которому стремится значение относительной частоты **W(A)** в точке устойчивости при увеличении числа фактически проведенных экспериментов

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A)$$



Пример:

$$W(A_{100}) = \frac{83}{100} = 0,83$$

$$W(A_{10000}) = \frac{8437}{10000} = 0,8437$$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow 10000} W(A) = 0,84$$



4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления:

- Относительная частота события, статистическая вероятность

Вероятность отклонения относительной частоты от статистической вероятности в различных сериях экспериментов на величину не более чем ?

приблизительно равна

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \delta\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \text{ где } q = (1 - p); \Phi - \text{функция Лапласа, численное значение которой берется из таблицы}$$

Пример: В некотором регионе в результате многолетнего статистического наблюдения установлена вероятность рождения мальчиков 52%. С какой вероятностью можно утверждать, что среди следующей тысячи новорожденных, относительная частота появления мальчика отклонится от соответствующей вероятности не более чем на 2%

Задано: $p=0,52$; $q=(1-0,52)=0,48$; $n=1000$; $\delta=0,02$.

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0,52\right| \leq 0,02\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0,02\sqrt{1000}}{\sqrt{0,52 \times 0,48}}\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi(1,27) \approx 2 \times 0,3980 = 0,796 \text{ или } 79,6\%$$

Тогда, $(p - \delta) \leq \frac{m}{1000} \leq (p + \delta)$ или $(0,52 - 0,02) \leq \frac{m}{1000} \leq (0,52 + 0,02)$

$$0,50 \leq \frac{m}{1000} \leq 0,54 \text{ или } 500 \leq m \leq 540$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11
0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23
0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35
0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47
0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59
0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71
0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83
0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07
1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31
1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40	1,41	1,42	1,43
1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67
1,68	1,69	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77	1,78	1,79
1,80	1,81	1,82	1,83	1,84	1,85	1,86	1,87	1,88	1,89	1,90	1,91
1,92	1,93	1,94	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02	2,03
2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09	2,10	2,11	2,12	2,13	2,14	2,15
2,16	2,17	2,18	2,19	2,20	2,21	2,22	2,23	2,24	2,25	2,26	2,27
2,28	2,29	2,30	2,31	2,32	2,33	2,34	2,35	2,36	2,37	2,38	2,39
2,40	2,41	2,42	2,43	2,44	2,45	2,46	2,47	2,48	2,49	2,50	2,51
2,52	2,53	2,54	2,55	2,56	2,57	2,58	2,59	2,60	2,61	2,62	2,63
2,64	2,65	2,66	2,67	2,68	2,69	2,70	2,71	2,72	2,73	2,74	2,75
2,76	2,77	2,78	2,79	2,80	2,81	2,82	2,83	2,84	2,85	2,86	2,87
2,88	2,89	2,90	2,91	2,92	2,93	2,94	2,95	2,96	2,97	2,98	2,99
3,00	3,01	3,02	3,03	3,04	3,05	3,06	3,07	3,08	3,09	3,10	3,11
3,12	3,13	3,14	3,15	3,16	3,17	3,18	3,19	3,20	3,21	3,22	3,23
3,24	3,25	3,26	3,27	3,28	3,29	3,30	3,31	3,32	3,33	3,34	3,35
3,36	3,37	3,38	3,39	3,40	3,41	3,42	3,43	3,44	3,45	3,46	3,47
3,48	3,49	3,50	3,51	3,52	3,53	3,54	3,55	3,56	3,57	3,58	3,59
3,60	3,61	3,62	3,63	3,64	3,65	3,66	3,67	3,68	3,69	3,70	3,71
3,72	3,73	3,74	3,75	3,76	3,77	3,78	3,79	3,80	3,81	3,82	3,83
3,84	3,85	3,86	3,87	3,88	3,89	3,90	3,91	3,92	3,93	3,94	3,95
3,96	3,97	3,98	3,99	4,00	4,01	4,02	4,03	4,04	4,05	4,06	4,07
4,08	4,09	4,10	4,11	4,12	4,13	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,19
4,20	4,21	4,22	4,23	4,24	4,25	4,26	4,27	4,28	4,29	4,30	4,31
4,32	4,33	4,34	4,35	4,36	4,37	4,38	4,39	4,40	4,41	4,42	4,43
4,44	4,45	4,46	4,47	4,48	4,49	4,50	4,51	4,52	4,53	4,54	4,55
4,56	4,57	4,58	4,59	4,60	4,61	4,62	4,63	4,64	4,65	4,66	4,67
4,68	4,69	4,70	4,71	4,72	4,73	4,74	4,75	4,76	4,77	4,78	4,79
4,80	4,81	4,82	4,83	4,84	4,85	4,86	4,87	4,88	4,89	4,90	4,91
4,92	4,93	4,94	4,95	4,96	4,97	4,98	4,99	5,00	5,01	5,02	5,03
5,04	5,05	5,06	5,07	5,08	5,09	5,10	5,11	5,12	5,13	5,14	5,15
5,16	5,17	5,18	5,19	5,20	5,21	5,22	5,23	5,24	5,25	5,26	5,27
5,28	5,29	5,30	5,31	5,32	5,33	5,34	5,35	5,36	5,37	5,38	5,39
5,40	5,41	5,42	5,43	5,44	5,45	5,46	5,47	5,48	5,49	5,50	5,51
5,52	5,53	5,54	5,55	5,56	5,57	5,58	5,59	5,60	5,61	5,62	5,63
5,64	5,65	5,66	5,67	5,68	5,69	5,70	5,71	5,72	5,73	5,74	5,75
5,76	5,77	5,78	5,79	5,80	5,81	5,82	5,83	5,84	5,85	5,86	5,87
5,88	5,89	5,90	5,91	5,92	5,93	5,94	5,95	5,96	5,97	5,98	5,99
6,00	6,01	6,02	6,03	6,04	6,05	6,06	6,07	6,08	6,09	6,10	6,11
6,12	6,13	6,14	6,15	6,16	6,17	6,18	6,19	6,20	6,21	6,22	6,23
6,24	6,25	6,26	6,27	6,28	6,29	6,30	6,31	6,32	6,33	6,34	6,35
6,36	6,37	6,38	6,39	6,40	6,41	6,42	6,43	6,44	6,45	6,46	6,47
6,48	6,49	6,50	6,51	6,52	6,53	6,54	6,55	6,56	6,57	6,58	6,59
6,60	6,61	6,62	6,63	6,64	6,65	6,66	6,67	6,68	6,69	6,70	6,71
6,72	6,73	6,74	6,75	6,76	6,77	6,78	6,79	6,80	6,81	6,82	6,83
6,84	6,85	6,86	6,87	6,88	6,89	6,90	6,91	6,92	6,93	6,94	6,95
6,96	6,97	6,98	6,99	7,00	7,01	7,02	7,03	7,04	7,05	7,06	7,07
7,08	7,09	7,10	7,11	7,12	7,13	7,14	7,15	7,16	7,17	7,18	7,19
7,20	7,21	7,22	7,23	7,24	7,25	7,26	7,27	7,28	7,29	7,30	7,31
7,32	7,33	7,34	7,35	7,36	7,37	7,38	7,39	7,40	7,41	7,42	7,43
7,44	7,45	7,46	7,47	7,48	7,49	7,50	7,51	7,52	7,53	7,54	7,55
7,56	7,57	7,58	7,59	7,60	7,61	7,62	7,63	7,64	7,65	7,66	7,67
7,68	7,69	7,70	7,71	7,72	7,73	7,74	7,75	7,76	7,77	7,78	7,79
7,80	7,81	7,82	7,83	7,84	7,85	7,86	7,87	7,88	7,89	7,90	7,91
7,92	7,93	7,94	7,95	7,96	7,97	7,98	7,99	8,00	8,01	8,02	8,03
8,04	8,05	8,06	8,07	8,08	8,09	8,10	8,11	8,12	8,13	8,14	8,15
8,16	8,17	8,18	8,19	8,20	8,21	8,22	8,23	8,24	8,25	8,26	8,27
8,28	8,29	8,30	8,31	8,32	8,33	8,34	8,35	8,36	8,37	8,38	8,39
8,40	8,41	8,42	8,43	8,44	8,45	8,46	8,47	8,48	8,49	8,50	8,51
8,52	8,53	8,54	8,55	8,56	8,57	8,58	8,59	8,60	8,61	8,62	8,63
8,64	8,65	8,66	8,67	8,68	8,69	8,70	8,71	8,72	8,73	8,74	8,75
8,76	8,77	8,78	8,79	8,80	8,81	8,82	8,83	8,84	8,85	8,86	8,87
8,88	8,89	8,90	8,91	8,92	8,93	8,94	8,95	8,96	8,97	8,98	8,99
9,00	9,01	9,02	9,03	9,04	9,05	9,06	9,07	9,08	9,09	9,10	9,11
9,12	9,13	9,14	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23
9,24	9,25	9,26	9,27	9,28	9,29	9,30	9,31	9,32	9,33	9,34	9,35
9,36	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41	9,42	9,43	9,44	9,45	9,46	9,47
9,48	9,49	9,50	9,51	9,52	9,53	9,54	9,55	9,56	9,57	9,58	9,59
9,60	9,61	9,62	9,63	9,64	9,65	9,66	9,67	9,68	9,69	9,70	9,71
9,72	9,73	9,74	9,75	9,76	9,77	9,78	9,79	9,80	9,81	9,82	9,83
9,84	9,85	9,86	9,87	9,88	9,89	9,90	9,91	9,92	9,93	9,94	9,95
9,96	9,97	9,98	9,99	10,00	10,01	10,02	10,03	10,04	10,05	10,06	10,07
10,08	10,09	10,10	10,11	10,12	10,13	10,14	10,15	10,16	10,17	10,18	10,19
10,20	10,21	10,22	10,23	10,24	10,25	10,26	10,27	10,28	10,29	10,30	10,31
10,32	10,33	10,34	10,35	10,36	10,37	10,38	10,39	10,40	10,41	10,42	10,43
10,44	10,45	10,46	10,47	10,48	10,49	10,50	10,51	10,52	10,53	10,54	10,55
10,56	10,57	10,58	10,59	10,60	10,61	10,62	10,63	10,64	10,65	10,66	10,67
10,68	10,69	10,70	10,71	10,72	10,73	10,74	10,75	10,76	10,77	10,78	10,79
10,80	10,81	10,82	10,83	10,84	10,85	10,86	10,87	10,88	10,89	10,90	10,91
10,92	10,93	10,94	10,95	10,96	10,97	10,98	10,99	11,00	11,01	11,02	11,03
11,04	11,05	11,06	11,07	11,08	11,09	11,10	11,11	11,12	11,13	11,14	11,15
11,16	11,17	11,18	11,19	11,20	11,21	11,22	11,23	11,24	11,25	11,26	11,27
11,28	11,29	11,30	11,31	11,32	11,33	11,34	11,35	11,36	11,37	11,38	11,39
11,40	11,41	11,42	11,43	11,44	11,45	11,46	11,47	11,48	11,49	11,50	11,51
11,52	11,53	11,54	11,55	11,56	11,57	11,58	11,59	11,60	11,61	11,62	11,63
11,64	11,65	11,66	11,67	11,68	11,69	11,70	11,71	11,72	11,73</		



4. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления:

- Аксиоматическое определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ события A , рассматриваемого множества событий E , называется число, которое сопоставляется каждому событию ($A \subset E$) и которое, удовлетворяет следующим аксиомам :

Аксиома 1: (неотрицательности). Вероятность любого события $P(A) \geq 0$.

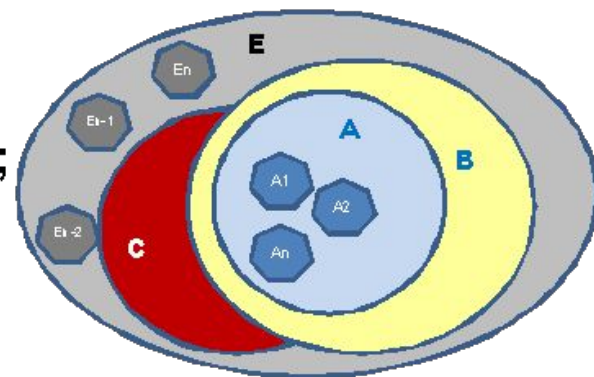
Аксиома 2: (нормировки). Вероятность достоверного события равна $P(?) = 1$.

Аксиома 3: (сложения). Вероятность суммы любого конечного множества попарно несовместных событий (A_1, A_2, \dots, A_n) равна сумме их вероятностей $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Аксиома 4: (однозначности). Эквивалентные события имеют равные вероятности.

Следствия аксиом:

- 1). Вероятность невозможного события равна $P(O) = 0$;
- 2). Вероятность противоположного события $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- 3). Вероятность любого события $0 \leq P(A) \leq 1$;
- 4). Если $A \subset B \subset E$, то $P(A) \leq P(B)$;





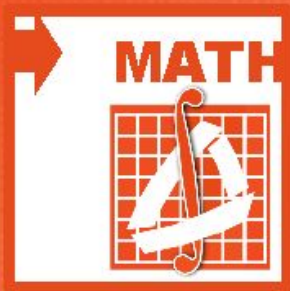
Задание для самостоятельной работы

- решите предлагаемую задачу

Задание: Студент и студентка обедают в столовой с 13 до 14 часов. Каждый из них приходит в столовую в произвольный момент времени и обедает в течение 10 минут.

Какова вероятность их встречи?





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ