

# Лекция 8

## МАГНИТОСТАТИКА

**Постоянное магнитное поле.**

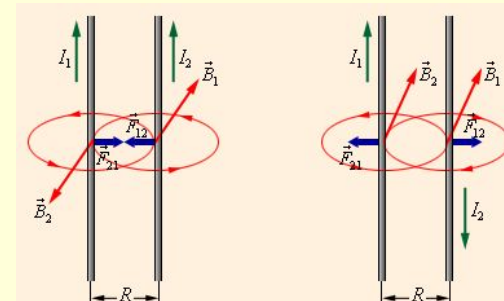
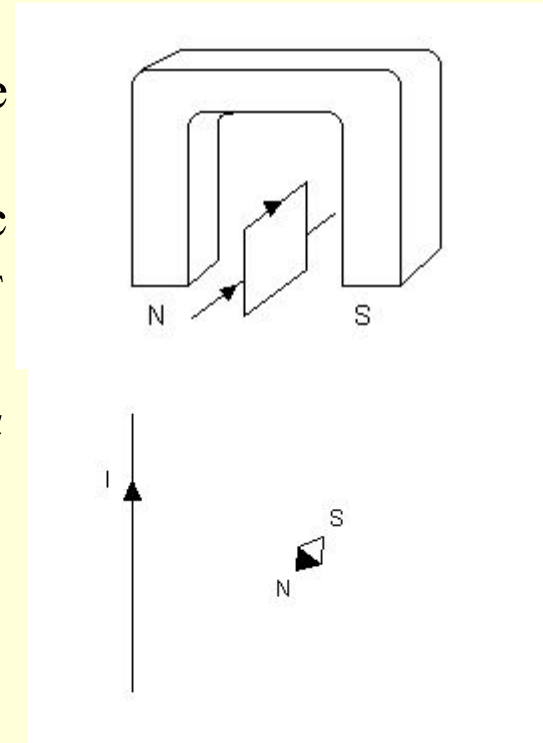
- 3.1. Взаимодействие проводников с током.  
Закон Ампера.
- 3.2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей.
- 3.3. Примеры вычисления магнитных полей с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

## 3.1. Взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

Известно, что постоянный магнит оказывает действие на проводник с током (например, рамку с током); известно также обратное явление – проводник с током оказывает действие на постоянный магнит (например, на магнитную стрелку компаса).

Естественно поставить *вопрос*: а не может ли *один проводник* с током оказывать непосредственное действие на *другой проводник* с током? Положительный ответ на этот вопрос дал в 1820г. *Ампер* (Ampere A., 1775-1836), установивший *силовой закон взаимодействия проводников с током*.

Так, два прямолинейных параллельных проводника *притягиваются*, если токи в них текут в *одном направлении* и *отталкиваются*, если токи имеют *противоположное направление*.



Для того, чтобы сформулировать закон Ампера в современном виде, введем понятие *элемента тока* как вектора, равного *произведению силы тока  $I$  на элемент длины проводника*. *Элемент тока* в магнитостатике играет ту же роль, что и *точечный заряд* в электростатике.

Своими опытами Ампер установил, что сила взаимодействия двух элементов тока:

$$1) \quad dF_{12} \sim I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2 \quad ;$$

$$2) \quad dF_{12} \sim \frac{1}{r^n}, n = 2 \quad ;$$

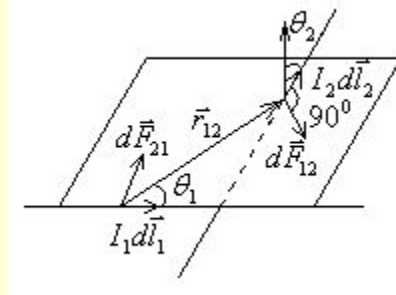
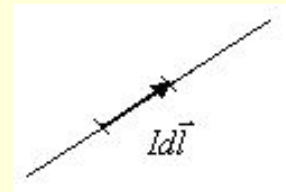
3)  $dF_{12}$  - зависит от взаимной ориентации элементов тока.

Объединяя эти результаты, можем написать **закон Ампера** в виде:

$$dF_{12} = k \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1 \cdot I_2 dl_2 \sin \theta_2}{r_{12}^2}$$

Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  характеризуют ориентацию элементов тока; Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от выбора системы единиц измерения.

В системе СИ:  $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{м} = 12,57 \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{м}$   
 - магнитная постоянная.



*Закон Ампера* является аналогом *закона Кулона* в магнитостатике и выражает собой силу взаимодействия двух элементов тока. Однако в отличие от *закона Кулона*, он имеет более сложное написание, что обусловлено тем, что элемент тока (в отличие от точечного заряда) характеризуется не только величиной, но и направлением в пространстве. Заметим, что согласно *закону Ампера*

$$d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21}$$

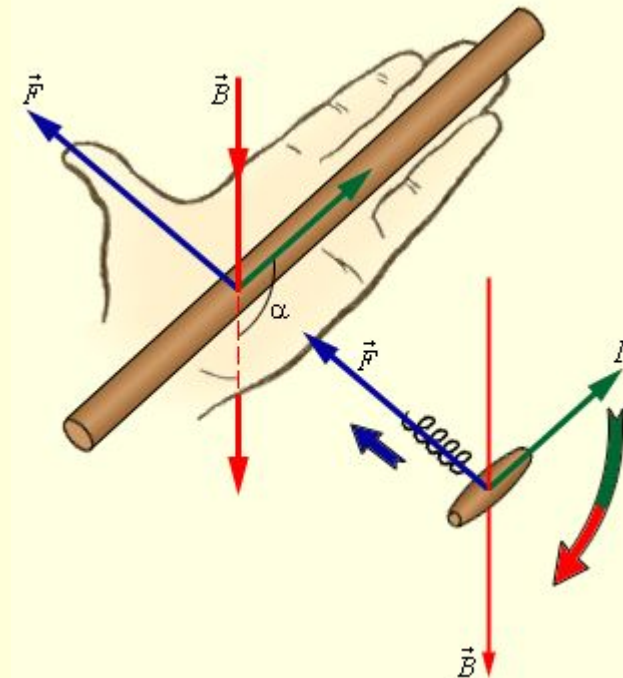
. Это кажущееся противоречие с *третьим законом Ньютона* связано с тем, что в действительности мы имеем дело не с элементами токов, а с *замкнутыми макроскопическими* токами, для которых *третий закон Ньютона выполняется*.

В векторной форме *закон Ампера* записывается следующим образом:

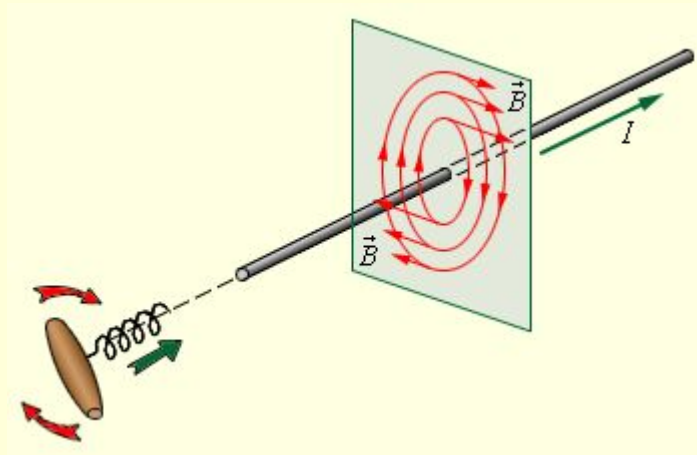
$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \left[ d\vec{l}_2 \left[ d\vec{l}_1 \vec{r}_{12} \right] \right]$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  и направлению тока, текущего по проводнику. Для определения направления силы Ампера обычно используют **правило левой руки**: если расположить левую руку так, чтобы линии индукции  $\vec{B}$  входили в ладонь, а вытянутые пальцы были направлены вдоль тока, то отведенный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник.

Если угол  $\alpha$  между направлениями вектора  $\vec{B}$  и тока в проводнике отличен от  $90^\circ$ , то для определения направления силы Ампера более удобно пользоваться **правилом буравчика**: воображаемый буравчик располагается перпендикулярно плоскости, содержащей вектор  $\vec{B}$  и проводник с током, затем его рукоятка поворачивается от направления тока к направлению вектора  $\vec{B}$ . Поступательное перемещение буравчика будет показывать направление силы Ампера  $\vec{F}$ . Правило буравчика часто называют **правилом правого винта**.



Для определения направления вектора магнитного поля прямолинейного проводника также можно пользоваться правилом буравчика: направление вращения рукоятки буравчика совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$  если при вращении буравчик перемещается в направлении тока.



## 3.2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей.

Движущиеся электрические заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем *магнитное поле*. Это поле проявляется в том, что на помещенные в нем проводники с током действуют силы. *Силовой характеристикой* магнитного поля является *индукция поля*, играющая роль аналога напряженности электрического поля, которая характеризует силовое действие электрического поля на заряды.

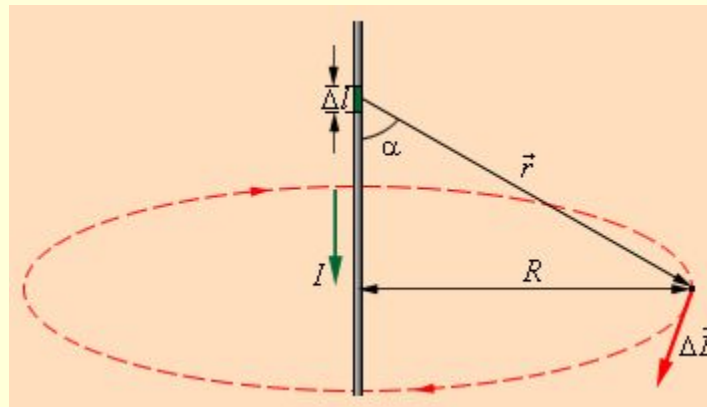
Как установили на опыте *Био* (Biot J., 1774-1862) и *Савар* (Savart F., 1791-1841) индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с током различной конфигурации, во всех случаях пропорциональна силе тока в проводнике  $I$  и зависит от расстояния  $r$  до точки, в которой определяется поле. Анализируя результаты опытов Био и Савара, *Лаплас* (Laplace P., 1749-1827) пришел к выводу, что *магнитное поле любого тока* может быть вычислено как *результат векторного сложения (суперпозиции) магнитных полей*, создаваемых отдельными элементами тока. Это правило получило название *принципа суперпозиции магнитных полей*.



Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока  $\Delta l$ , Лаплас получил формулу, названную впоследствии **законом Био-Савара-Лапласа**:

$$d\vec{B} = k \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3},$$

где коэффициент  $k$  имеет то же значение, что и в законе Ампера (в СИ:  $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ).  
 Направление вектора  $d\vec{B}$  образует с векторами  $\vec{r}$  и  $d\vec{l}$  правовинтовую систему.



Наряду с индукцией  $\vec{B}$ , для характеристики магнитного поля вводят также понятие *напряженности магнитного поля*  $H$  - величины, определяемой в вакууме как:

$$H = \frac{\vec{B}}{\mu_0} .$$

Единицей измерения индукции поля  $\vec{B}$  в СИ является  $T$  (Тесла)

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} ;$$

напряженность магнитного поля  $H$  измеряется в  $A/m$ .

С помощью закона Био-Савара-Лапласа *напряженность магнитного поля*, создаваемого элементом тока  $I d\vec{l}$  в точке  $\vec{r}$ , рассчитывается по формуле:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi \cdot r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}] .$$

Или в скалярном виде:

где  $\theta$  – угол между элементом длины тока  $d\vec{l}$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным в точку наблюдения.

Возвращаясь к закону Ампера, мы можем сказать, сила взаимодействия между двумя элементами тока есть результат *действия* магнитного поля одного элемента тока на другой. Другими словами, можем написать:

$$dF_{12} = \mu_0 I_2 [dl_2 dH_{12}] = I_2 [dl_2 dB_{12}] ,$$

где

$$dH_{12} = \frac{1}{4\pi r_{12}^3} I_1 [dl_1 r_{12}]$$

- напряженность магнитного поля, созданного элементом первого тока в том месте, где находится элемент второго тока.

Следовательно, на любой элемент  $Idl$  проводника с током, находящегося в магнитном поле с индукцией  $B$ , действует сила:

$$dF = I [dl B] .$$

Эта формула является аналогом соответствующей формулы в электростатике

$$F = qE ,$$

определяющей силу, действующую на точечный заряд  $q$ , помещенный в электрическое поле напряженностью  $E$ .

Полная сила, действующая на проводник с током, находящийся в магнитном поле, определяется по формуле:

$$F = I \int [dl B] ,$$

где интегрирование производится по всей длине проводника.

В частности, для прямолинейного отрезка проводника с током длиной  $l$ , расположенного под углом  $\theta$  к силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией  $B$ , имеем:

Эту формулу часто называют *силой Ампера*.

### 3.3. Примеры вычисления магнитных полей с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

#### 1) Напряженность магнитного поля в центре кругового витка с током.

В данном случае имеем, согласно закону Био-Савара-Лапласа:

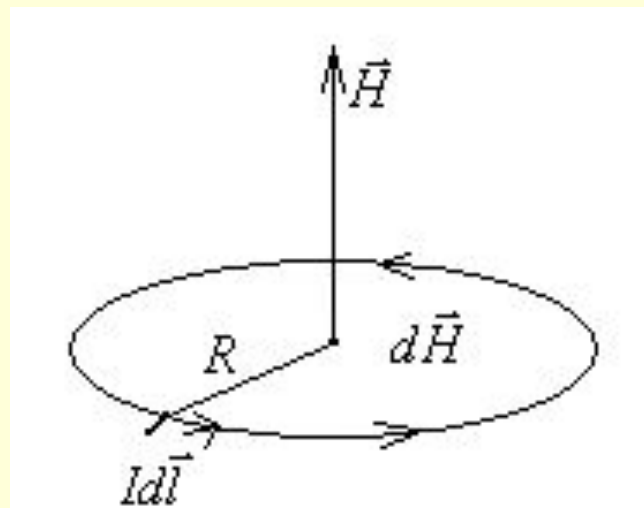
$$dH = \frac{Idl}{4\pi R^2}$$

откуда находим после интегрирования по всей длине витка – окружности радиуса

R:

$$H = \int_0^{2\pi R} \frac{Idl}{4\pi R^2} = \frac{I \cdot 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{I}{2R}$$

$$H = \frac{I}{2R}$$



## 2) Отрезок проводника с током конечной длины и бесконечно длинный проводник с током

В этом случае имеем

$$dH = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi \cdot r^2}$$

где  $\sin \theta = \frac{a}{r}$      $r = \sqrt{a^2 + x^2}$      $dl = dx$

тогда 
$$dH = \frac{Idxa}{4\pi \cdot r^3} = \frac{Idxa}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $-x_1$  до  $x_2$ , находим:

$$H = \frac{Ia}{4\pi} \int_{-x_1}^{x_2} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Ia}{4\pi} \cdot \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \Big|_{-x_1}^{x_2} = \frac{I}{4\pi a} \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + a^2}} \right) = \frac{I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

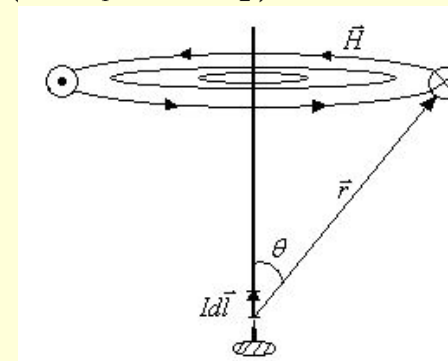
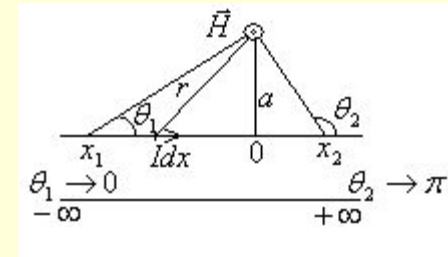
где  $\cos \theta_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}}$ ,  $\cos(\pi - \theta_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + a^2}}$

$$H = \frac{I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Переходя в этой формуле к пределу при  $\theta_1 \rightarrow 0$  и  $\theta_2 \rightarrow \pi$

, получим формулу для расчета напряженности магнитного поля прямолинейного проводника с током *бесконечной* длины:

$$H_\infty = \frac{I}{2\pi a}$$



### 3) Магнитное поле движущегося заряда.

Любой проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Но ток в проводнике – есть направленное движение зарядов. Следовательно, можно допустить, что источником магнитного поля являются движущиеся заряды. Тогда магнитное поле, созданное проводником с током в некоторой точке пространства, будет представлять собой суперпозицию магнитных полей, созданных в этой же точке пространства каждым из движущихся зарядов в отдельности.

Пусть  $v$  – скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике;  $q$  – заряд носителя тока (в металлах  $q = -e$ ). Для элемента тока можно написать:

$$Idl = nqvSdl = dNq v$$

где  $n = dN/dV$  – концентрация зарядов,  $dN$  – число зарядов в элементе объема  $dV = Sdl$ .

На основании закона Био-Савара-Лапласа, напряженность магнитного поля, созданного одним движущимся зарядом, будет:

$$H = \frac{dH}{dN} = \frac{qv \sin \theta}{4\pi r^2}$$

или в векторном виде

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q[\vec{v}r]}{r^3}$$

Эта формула отражает *релятивистскую* (относительную) сущность магнитного поля. Она показывает, что магнитное поле проявляется как результат относительного движения заряда. Отметим, что приведенная формула справедлива при скоростях движения заряда  $v \ll c$  ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме).