



*Основы
алгебры логики*

17/03/20

Алгебра высказываний (логики) – это раздел математики, изучающий высказывания со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логические операции над ними.

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать истинно оно или ложно.

Например:

6 – четное число – это истинное высказывание

Рим – столица Франции – это ложное

Логические операции

Над логическим высказыванием в компьютере выполняется та или иная логическая операция.

Существует 5 основных логических операций:

- ***Инверсия;***
- ***Конъюнкция;***
- ***Дизъюнкция;***
- ***Импликация;***
- ***Эквиваленция.***

Отрицание (выражается словом «не») ИЛИ **инверсия.**

Обозначается чертой над высказыванием.
Функция, реализующая эту операцию,
записывается в виде

$$y = \overline{x}$$

**Эта функция истинна, если переменная
(высказывание) ложна.**

Составим таблицу истинности для данной операц

X	Y
0	1
1	0

Например, $2 + 2 = 3$ – ложь, значит ее отрицание - истинное высказывание.

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **инвертором** и обозначается следующим образом



Конъюнкция (выражается словом «и») ИЛИ логическое умножение.

Обозначается *, ^, &(амперсенд).

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

$$Y = X_1 * X_2 \text{ или } Y = X_1 \wedge X_2 \text{ или } Y = X_1 \& X_2.$$

Эта функция истинна тогда и только тогда, когда все переменные (высказывания) истинны одновременно.

Составим таблицу истинности для данной операции:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **конъюнктором** и обозначается следующим образом:



Дизъюнкция (выражается словом «или»)

ИЛИ логическое сложение.

Обозначается +, v.

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

$$Y = X_1 + X_2 \text{ или } Y = X_1 \vee X_2$$

Эта функция истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одна переменная (высказывание) истинна или истинны обе переменные (высказывания) одновременно.

Составим таблицу истинности для данной операции:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **дизъюнктором** и обозначается следующим образом:



Импликация («если...то», «из...следует») **ИЛИ** **ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ.**

Обозначается знаком \square .

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

$$Y = X_1 \square X_2.$$

Функция ложна тогда и только тогда, когда X_1 истинно, а X_2 ложно.

Составим таблицу истинности для данной операции:

X_1	X_2	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция («тогда и только тогда»), **ИЛИ** **двойная импликация.**

Обозначается знаком \leftrightarrow или \sim .

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

$$Y = X_1 \leftrightarrow X_2.$$

Функция истинна тогда и только тогда, когда значения X_1 и X_2 совпадают.

Составим таблицу истинности для данной операции:

X1	X2	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Законы логики

Закон	Для операции ИЛИ	Для операции И
1. Переместительный	$X \vee Y = Y \vee X$	$X \& Y = Y \& X$
2. Сочетательный	$X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$	$X \& (Y \& Z) = (X \& Y) \& Z$
3. Распределительный	$X \& (Y \vee Z) = X \& Y \vee X \& Z$ $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \& \overline{Y}$	$X \vee (Y \& Z) = (X \vee Y) \& (X \vee Z)$ $\overline{X \& Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$
4. Правила де Моргана		
5. Идемпотенции	$X \vee X = X$	$X \& X = X$
6. Поглощения	$(X \& Y) \vee (\overline{X} \& Y) = Y$	$(X \vee Y) \& (\overline{X} \vee Y) = Y$
7. Склеивания	$X \vee \overline{X} = 1$	$X \& \overline{X} = 0$
8. Инверсии		
9. Операции с константами	$X \vee 0 = X$ $X \vee 1 = 1$ $\overline{\overline{X}} = X$	$X \& 0 = 0$ $X \& 1 = X$

Алгоритм построения логических схем

1. *Определить число логических переменных.*
2. *Определить количество базовых логических операций и их порядок.*
3. *Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей вентиль.*
4. *Соединить вентили в порядке выполнения логических операций.*

Задание

Какие из формул являются

тождественно – истинными, а

какие являются **тождественно –**

ЛОЖНЫ

a) $\overline{A \& \overline{A} \vee B \& (A \& B \vee D)}$;

b) $((A \vee \overline{B}) \rightarrow B) \& (\overline{A} \vee B)$

c) $\overline{A \& B} \leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$

d) $A \& B \& (C \vee \overline{A} \vee D) \& \overline{B}$

e) $A \& (B \& (\overline{A} \vee \overline{B}))$

f) $\overline{(\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee C) \vee \overline{A} \vee C}$

g) $\overline{(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})}$

Домашнее задание

1. Построить таблицу истинности для логической формулы и упростить формулу, используя законы алгебры логики:

$$A \& D \& (\bar{A} \vee \bar{C} \& B \vee D) \vee A \& \bar{C} \vee \bar{A} \& B \& \bar{C}$$

2. Подготовиться к проверочной работе