

МЕТРОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Лекция 6. Погрешности измерений и
средств измерений

Основные понятия

Погрешностью результата измерения (погрешностью измерения) – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Погрешность средств измерений — разность между показаниями СИ и истинным значением измеряемой величины.

Точность измерений – понятие, под которым в общем случае понимается качество измерений, отражающее близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Точность средств измерений — это качество СИ, отражающее близость к нулю его погрешностей.

Качество измерений тем выше, чем ближе результат измерения к истинному значению величины. Однако непосредственно из результата измерений точность определить нельзя.

Обычно о точности говорят в качественном смысле, однако в некоторых случаях точность определяется количественно величиной, обратной модулю относительной погрешности:

$$\varepsilon = \frac{1}{|\delta|}$$

Требуемую точность измерений обычно выбирают исходя из соображений технической и экономической целесообразности. Повышение требований к точности измерений приводит к увеличению затрат на их проведение, а снижение указанных требований может привести к неправильным результатам оценивания состояния исследуемого явления или процесса.

Понятие неопределённости измерений

Неопределенность измерений – это понятие, связанное с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые можно приписать измеряемой величине.

Неопределенность измерений состоит из многих составляющих. В зависимости от того, как оценивают численные значения составляющих неопределенности измерений, различают оценки неопределенностей двух типов (категорий):

–оценка *типа А* определяется экспериментальным стандартным (среднеквадратическим, СКО) отклонением на основе статистической обработки серии наблюдений.

–оценка *типа В* также характеризуется стандартным отклонением и основана на распределении вероятностей, но здесь экспериментаторам дается право привлекать дополнительные данные, например, сведения из паспортных данных СИ, сведения из предварительных измерений, результаты экспертного оценивания и др.

Погрешности измерений

Погрешность измерения (погрешность результата измерения) может быть представлена как результат совместного воздействия различного рода факторов объективного и субъективного характера, что следует учитывать при проведении классификации погрешностей.

Классификация погрешностей измерений и погрешностей СИ по пяти признакам представлена в таблице

| <i>Вид погрешности</i> | <i>Погрешность измерений</i> | <i>Погрешность СИ</i> |
|---|------------------------------|-----------------------|
| По способу выражения | | |
| Абсолютная | + | + |
| Относительная | + | + |
| Приведённая | - | + |
| По характеру проявления | | |
| Случайная | + | + |
| Систематическая | + | + |
| Грубая | + | - |
| По источнику возникновения | | |
| Методическая | + | - |
| Инструментальная | + | - |
| Субъективная | + | - |
| По условиям измерений | | |
| Основная | - | + |
| Дополнительная | - | + |
| По соотношению быстродействия СИ и скорости изменения физической величины | | |
| Статическая | - | + |
| Динамическая | - | + |

Абсолютная и относительная погрешность измерений

Абсолютная погрешность измерения – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины:

$$\Delta = x_{\text{изм}} - x_{\text{и}}$$

где $x_{\text{изм}}$ – значение величины, полученное в результате ее измерения; $x_{\text{и}}$ – истинное значение величины. Истинное значение измеряемой величины – такое ее значение, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта.

Поскольку истинное значение величины неизвестно, то на практике используют понятие действительного значения величины ($x_{\text{д}}$) (условного истинного значения) – значение величины, найденное экспериментальным путем и настолько приближенное к истинному значению, что для данной цели может быть использовано вместо него. С учетом указанного обстоятельства

$$\Delta = x_{\text{изм}} - x_{\text{д}}$$

Относительная погрешность измерения – это отношение абсолютной погрешности измерения к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{\text{д}}} \cdot 100\%$$

Систематическая погрешность измерений

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины в одних и тех же условиях.

Постоянная систематическая погрешность – это погрешность, длительное время сохраняющая свое значение, например, в течение времени выполнения измерений. Изменяющиеся погрешности могут быть непрерывно возрастающими, непрерывно убывающими, изменяющимися периодически или по иной, более сложной закономерности.

Знание характера изменения систематической погрешности дает возможность принять меры по снижению влияния этой погрешности на результат измерения путем ее частичного исключения или компенсации посредством:

- устранения источников погрешностей;
- введением поправок, использованием поправочных формул или кривых, выражающих зависимость показаний приборов от внешних условий (например, температуры) и т.д.

Ту часть погрешности, которая остается после принятия мер по устранению, принято называть неисключенной систематической погрешностью (неисключенным остатком систематической погрешности).

Чем меньше систематическая погрешность, тем правильнее проведено измерение, а если систематическая погрешность отсутствует, то результат измерения называется исправленным.

Случайная погрешность измерений

Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях одной и той же величины, проведенных в одних и тех же условиях.

Случайные погрешности возникают вследствие одновременного влияния на результат измерения трудно поддающихся анализу причин: воздействие внешних электромагнитных полей, случайные изменения самой измеряемой величины, случайные погрешности используемых СИ и др. В каждый момент времени указанные влияющие причины проявляют себя по-разному, поэтому вызываемая ими погрешность относится к разряду случайных.

Случайные погрешности неизбежны, и главной их особенностью является непредсказуемость при проведении очередного отсчета. Следовательно, в основу процедуры оценивания случайных погрешностей должен быть положен вероятностный подход с использованием теории вероятностей и математической статистики, где случайная погрешность ($\overset{\circ}{\Delta}$) рассматривается как случайная величина, принимающая различные значения ($\overset{\circ}{\Delta}_i$).

Характеристики случайной погрешности

Основной характеристикой случайной погрешности является *интегральный* и *дифференциальный* законы (функции) распределения вероятностей, которые устанавливают связь между возможным значением случайной величины и вероятностью их появления при многократных наблюдениях.

Интегральная функция (закон) распределения определяет вероятность того, что случайная погрешность Δ_i в i -отсчете принимает значение меньше текущего значения Δ :

$$F(\Delta) = P(\Delta_i < \Delta)$$

Функция $F(\Delta)$ обладает следующими известными свойствами:

$$\begin{aligned} F(\Delta) &\geq 0 ; \\ F(\Delta_2) &\geq F(\Delta_1) \quad \Delta_2 > \Delta_1 ; \\ F(-\infty) &= 0, \quad F(+\infty) = 1. \end{aligned}$$

Вероятность того, что случайная величина Δ примет значение, лежащее в интервале (Δ_1, Δ_2) , равна разности значений функции распределения на концах этого интервала, т.е.

$$P(\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2) = F(\Delta_2) - F(\Delta_1)$$

Характеристики случайной погрешности

Поскольку случайная погрешность Δ по своей природе является величиной непрерывной и дифференцируемой, то для ее описания в метрологии широко используют более наглядную дифференциальную форму закона распределения – плотность распределения

$$f(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta}$$

Графики дифференциальных функций распределения (кривые распределения) случайных погрешностей обладают максимумом при $\Delta = 0$. Функция $f(\Delta)$ неотрицательна и подчиняется условию нормирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta) d\Delta = 1.$$

Это означает, что площадь, заключенная между кривой дифференциальной функции распределения и осью абсцисс, равна единице. Вероятность попадания случайной погрешности Δ в интервал (Δ_1, Δ_2) определяется по формуле

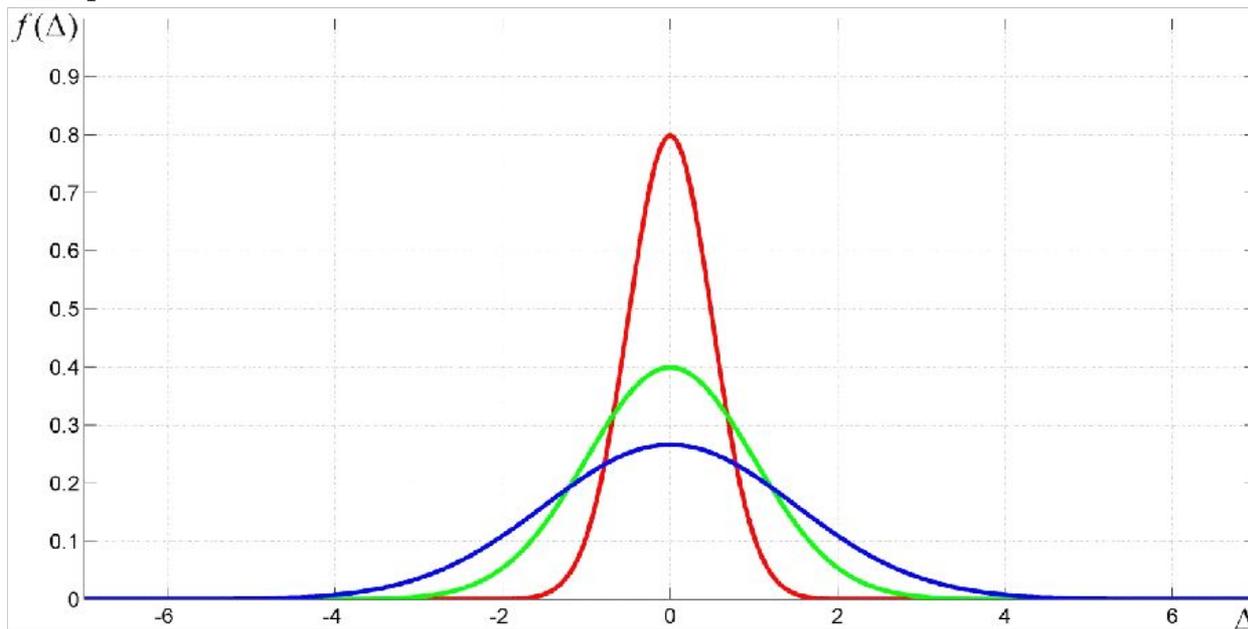
$$P(\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} f(\Delta) d\Delta$$

Законы распределения случайной погрешности. Нормальный закон

В метрологической практике используют различные законы распределения случайной погрешности, однако наиболее часто применяют нормальное и равномерное распределение вероятностей.

Нормальный закон распределения вероятностей для описания случайных погрешностей применяют обычно в случаях, когда справедливы три аксиомы.

1. Погрешности могут принимать непрерывный ряд значений.
2. Вероятности появления погрешностей, равных по величине, но противоположных по знаку, одинаковы.
3. Вероятности появления малых погрешностей больше вероятностей появления больших погрешностей.



Нормальный закон распределения с $\sigma_1 = 0.5$ (красный), $\sigma_2 = 1$ (зелёный) и $\sigma_3 = 1.5$ (синий)

Законы распределения случайной погрешности. Нормальный закон

Функция плотности распределения погрешностей (плотности вероятности) для нормального закона описывается известным выражением

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение погрешности, характеризующее точность измерения.

Вероятность попадания случайной погрешности в симметричный интервал с границами от $-\Delta_1$ до $+\Delta_1$ для нормального закона находится по формуле

$$P(-\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_1) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta_1} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) d\Delta$$

Интеграл удобно вычислять, если заменить переменную Δ на $t = \frac{\Delta}{\sigma}$. Правая часть равенства преобразуется в этом случае в известную функцию Лапласа, называемую интегралом вероятности. При этом его верхний предел заменяется на $z = \frac{\Delta_1}{\sigma}$:

$$P(-z \leq t \leq z) = \Psi(z) = 2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Пользуясь таблицами, по заданной $\Psi(z)$ находят z , а затем рассчитывают $\Delta_1 = z\sigma$.

Законы распределения случайной погрешности. Нормальный закон

Вероятность $P_\delta = \Psi(z)$ называется доверительной вероятностью, а назначенный интервал возможных значений погрешностей – доверительным интервалом $(-\Delta_1, +\Delta_1)$.

При заданном доверительном интервале $(-\Delta_1, +\Delta_1)$, выраженном в долях σ , можно найти доверительную вероятность P_δ . Вероятность того, что данное измерение будет иметь погрешность, выходящую за пределы $\pm\Delta_1$, будет равна $1 - P_\delta$, а число наблюдений n , при котором в среднем одно измерение будет иметь погрешность, выходящую за пределы $\pm\Delta_1$, будет равно $\frac{1}{(1 - P_\delta)}$.

Значения доверительного интервала, заданного в единицах σ , доверительной вероятности и числа измерений, при которых в среднем одно измерение имеет погрешность, выходящую за пределы доверительного интервала, приведены в таблице.

| | | | | |
|---------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\pm\Delta_1$ | $-2\sigma / 3 \dots 2\sigma / 3$ | $-\sigma \dots +\sigma$ | $-2\sigma \dots + 2\sigma$ | $-3\sigma \dots + 3\sigma$ |
| P_δ | 0,5 | 0,683 | 0,955 | 0,997 |
| n | 2 | 3 | 22 | 370 |

Законы распределения случайной погрешности. Нормальный закон

Из таблицы видно, что появление погрешности, большей или меньшей $\frac{\pm 2\sigma}{3}$, равновероятно ($P_0 = \frac{1}{2}$), т.е. на каждые два измерения ($n = 2$) одно измерение в среднем выходит за пределы доверительного интервала. Такая погрешность получила название *срединной*, или *равновероятной*.

Для интервала $A = \pm 3\sigma$ можно утверждать, что в 369 из 370 наблюдений с вероятностью 0,997 погрешность заключена в интервале $\pm 3\sigma$ и лишь в одном измерении может выйти за его пределы:

$$P_0(|\Delta| < 3\sigma) = 0.997$$

Эту погрешность называют *предельной* (максимально возможной).

Таким образом, можно утверждать, что все возможные случайные погрешности измерения, распределенные по нормальному закону, практически не превышают по абсолютному значению 3σ . Погрешности, выходящие за эти пределы, считают грубыми.

При технических измерениях доверительную вероятность принято считать равной 0,95.

Законы распределения случайной погрешности. Равномерный закон

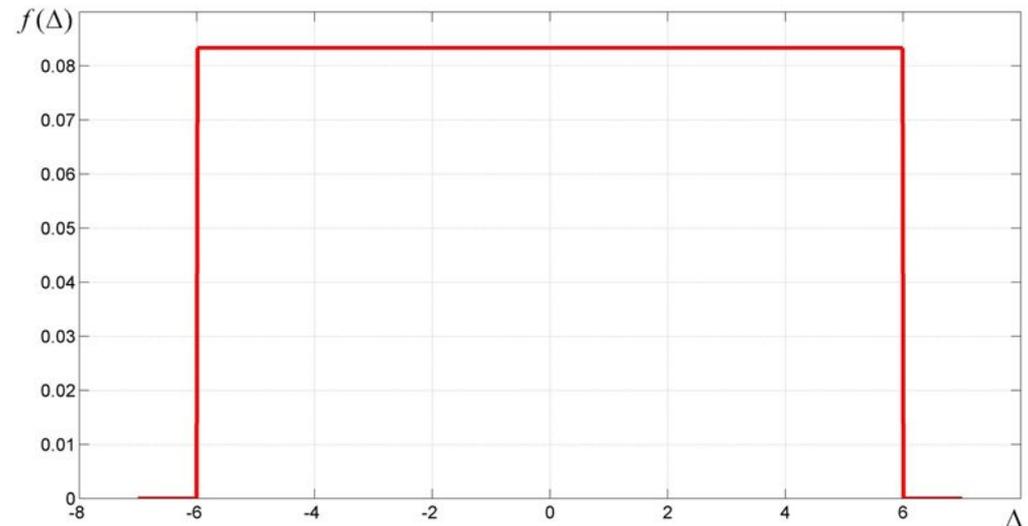
При равномерном распределении погрешность измерений с одинаковой вероятностью может принимать любые значения, не выходящие за некоторые границы. При этом плотность вероятности погрешности $f(\Delta)$ постоянна внутри этих границ и равна нулю вне этих границ. Аналитически равномерный закон распределения погрешности может быть записан следующим выражением:

$$f(\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_1} & \text{при } -\Delta_1 \leq \Delta \leq +\Delta_1, \\ 0 & \text{при } \Delta < -\Delta_1 \text{ и } \Delta > +\Delta_1. \end{cases}$$

Для равномерного распределения дисперсия D и среднеквадратическое отклонение σ определяются следующим образом:

$$D = \sigma^2 = \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{\Delta_1} \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} \Delta^2 d\Delta = \frac{\Delta_1^2}{12},$$

$$\sigma = \frac{\Delta_1}{2\sqrt{3}}$$



Моменты случайных величин

Законы распределения погрешности Δ дают исчерпывающую информацию об этой величине, однако на практике при определении погрешности во многих случаях достаточно знать только числовые характеристики законов распределения. К таким характеристикам при описании свойств случайных погрешностей относятся начальные и центральные моменты.

Для непрерывных случайных величин Δ начальный момент k -го порядка определяется следующей формулой:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^k f(\Delta) d\Delta$$

Центральный момент k -го порядка рассчитывается по формуле

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta - m_1)^k f(\Delta) d\Delta$$

где m_1 – математическое ожидание случайной величины при $k = 1$.

Второй центральный момент называется дисперсией случайной погрешности

$$D(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta - m_1)^2 f(\Delta) d\Delta$$

Она характеризует рассеяние отдельных значений случайной величины относительно математического ожидания (центра рассеяния). Поскольку дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, то на практике используется более удобная величина — среднее квадратическое отклонение (СКО), которое имеет размерность самой случайной величины:

$$\sigma(\Delta) = \sqrt{D(\Delta)}$$

Грубая погрешность

Грубой называется погрешность, существенно превышающая ожидаемую погрешность в данных условиях измерения. Чаще всего является следствием кратковременного изменения неучтенных внешних воздействий на результат измерения. Например, кратковременное изменение питающего измерительный прибор напряжения, механическое воздействие на измерительную установку и др. Грубые погрешности по своей природе случайны. Они обычно выявляются при обработке результатов повторных измерений значения измеряемой величины и из дальнейшего рассмотрения исключаются.

Грубые погрешности, появляющиеся вследствие неправильных действий оператора, называют также промахами. Причинами промахов могут быть, например, ошибки в результате неправильной записи результата измерения, ошибки вследствие неправильного отсчета по шкале прибора и др.

Методическая погрешность

Методической погрешностью (погрешность метода измерений) называется составляющая погрешности измерения, происходящая от несовершенства метода измерений.

Причины возникновения этой погрешности могут быть различными:

- недостаточность изученности объекта измерения;
- невозможность точного учета влияния внешних факторов;
- несовершенство теории физических явлений при исследовании конкретной величины и др.

Методические погрешности нельзя найти путем анализа характеристик используемого для измерений измерительного прибора. Они определяются лишь путем создания математических или имитационных моделей объекта измерения.

В общем случае задача оценки методической погрешности относится к разряду сложных задач. Однако во многих случаях методические погрешности могут быть вычислены до проведения измерений (априорно) и исключены из результатов измерений.

Инструментальная погрешность

Инструментальной называется составляющая погрешности измерения, зависящая от погрешностей применяемых СИ. Иначе говоря, инструментальная погрешность измерения проявляется как совокупность погрешностей, обусловленных несовершенством свойств используемых СИ. Различают три составляющих инструментальной погрешности: схемную, технологическую и эксплуатационную.

Схемная погрешность (погрешность схемы или конструкции) — это инструментальная погрешность, присущая самой структурной или кинематической схеме (конструкции) СИ. Эта погрешность не связана с недостатками изготовления СИ.

Технологическая погрешность – это инструментальная погрешность, возникающая в результате несовершенства технологии изготовления СИ. Например, к технологическим относятся погрешности неточного нанесения отметок шкалы (погрешности градуировки).

Эксплуатационная погрешность – это инструментальная погрешность, возникающая в процессе эксплуатации СИ (износ, старение, неисправности).

Субъективная погрешность

Субъективной называется погрешность измерения, которая является следствием индивидуальных свойств человека, обусловленных физиологическими особенностями его организма, скоростью реакции или укоренившимися неправильными навыками.

К субъективной погрешности следует отнести прежде всего погрешность отсчитывания, происходящую от недостаточно точного отсчитывания показаний СИ. Одной из составляющих погрешности отсчитывания является погрешность интерполяции, возникающая от недостаточно точного оценивания на глаз доли деления шкалы, соответствующей положению указателя. Другой составляющей погрешности отсчитывания является погрешность параллакса, происходящая вследствие визирования стрелки, расположенной на некотором расстоянии от поверхности шкалы, в направлении, не перпендикулярном поверхности шкалы.

Заметим, что погрешность отсчитывания устраняется при использовании цифровых отсчетных устройств, где погрешность округляется и является инструментальной погрешностью.