

Тема:

«Показательная функция»



Показательная функция

Определение

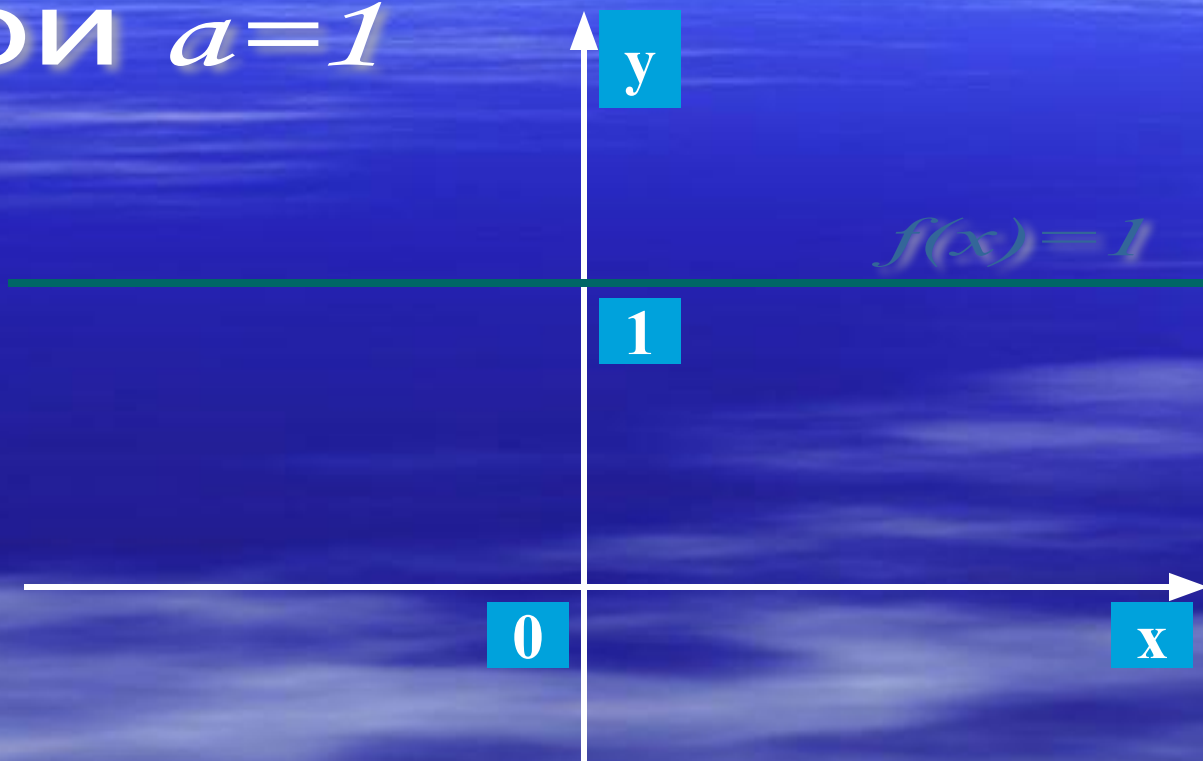
График

Свойства

Применения

График функции $f(x) = a^x$

при $a=1$



Определение

Функция вида $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$

называется **показательной** с основанием a .

Замечание.

Вместе с функцией $y = a^x$ показательной считают и функцию вида $y = Ca^x$, где C - некоторая постоянная.

Задание А1

Из предложенного списка функций, выбрать ту функцию, которая является показательной:

1. $y = 2x$;

2. $y = x^2$;

3. $y = 2^x$;

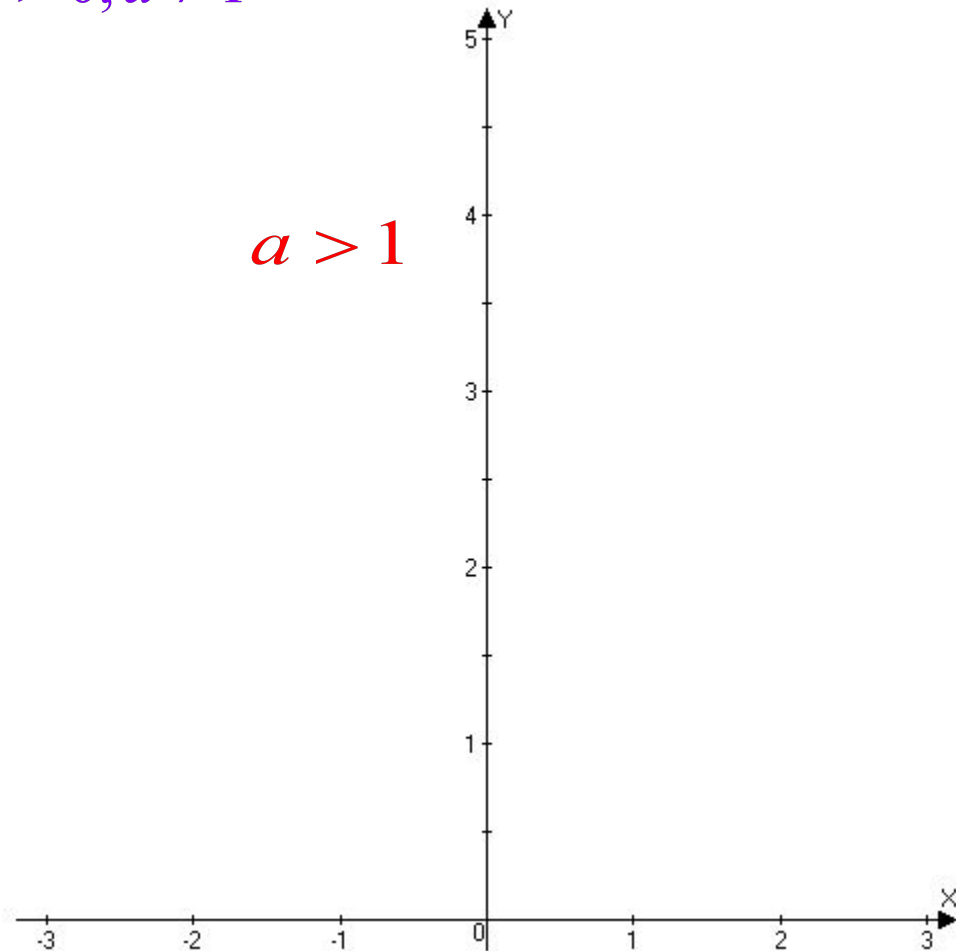
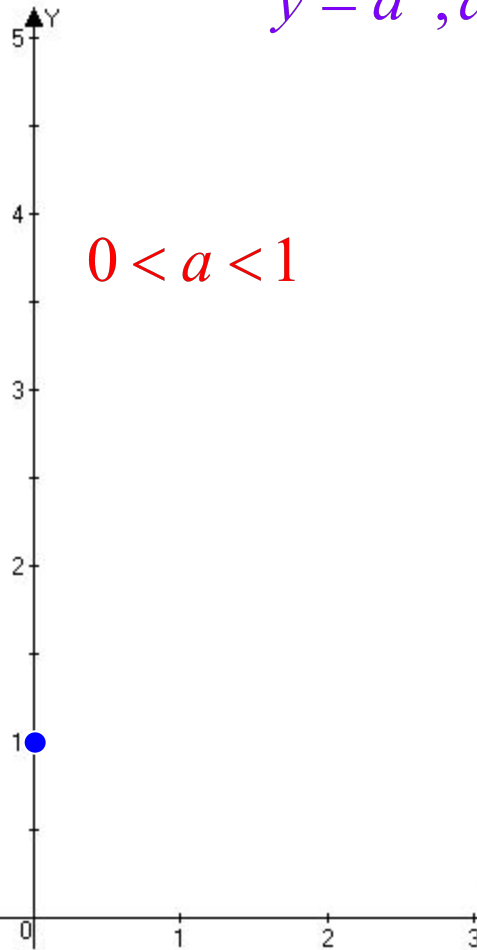
4. $y = \sqrt[3]{x}$.

График показательной функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$y = 4^x \quad y = 3^x \quad y = 2^x$$

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1$$

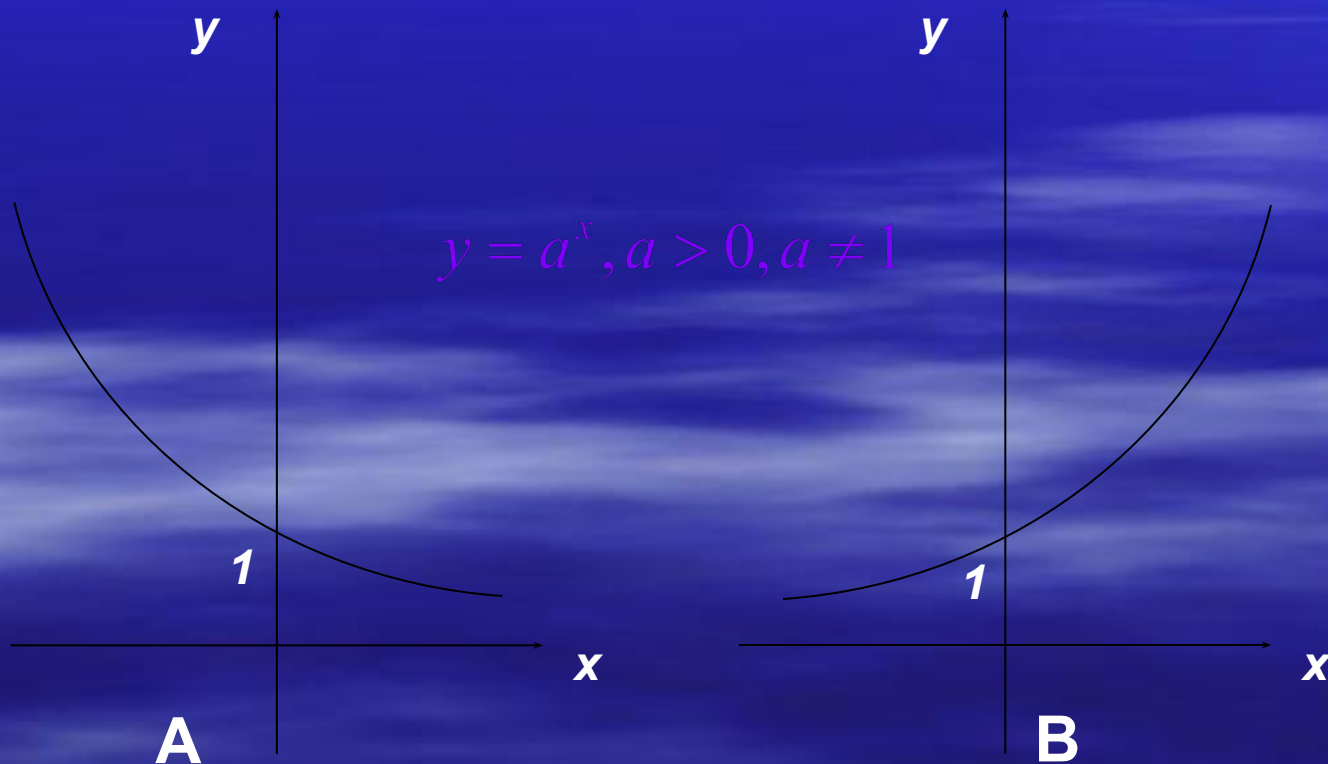


Задание А2

Укажите вид графика для функции

1. $y = \pi^x$

2. $y = 0,48^x$



Задание А3

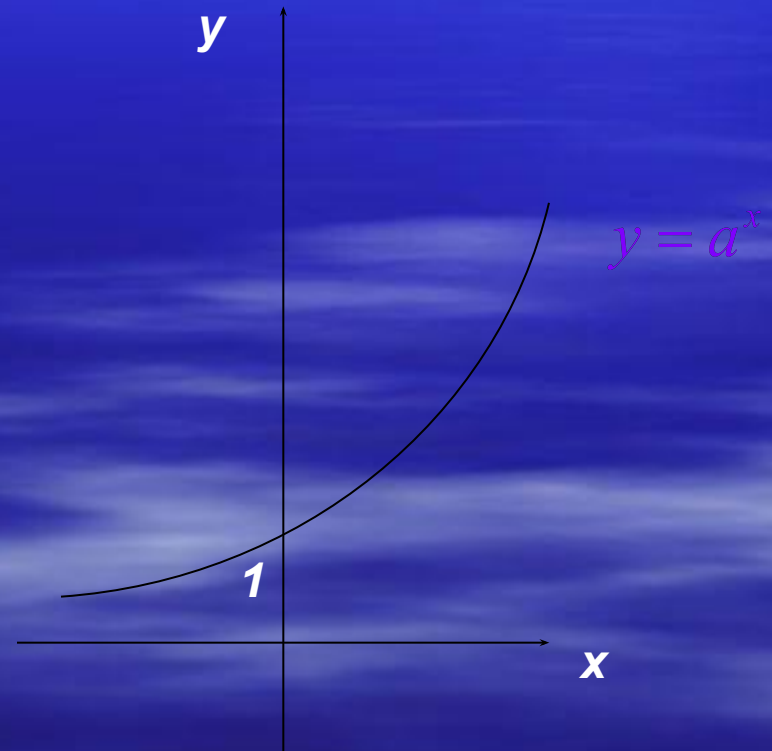
Из предложенных функций выберите ту, график которой изображён на рисунке.

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

2. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

3. $y = 2^x$;

4. $y = 2^{-x}$.

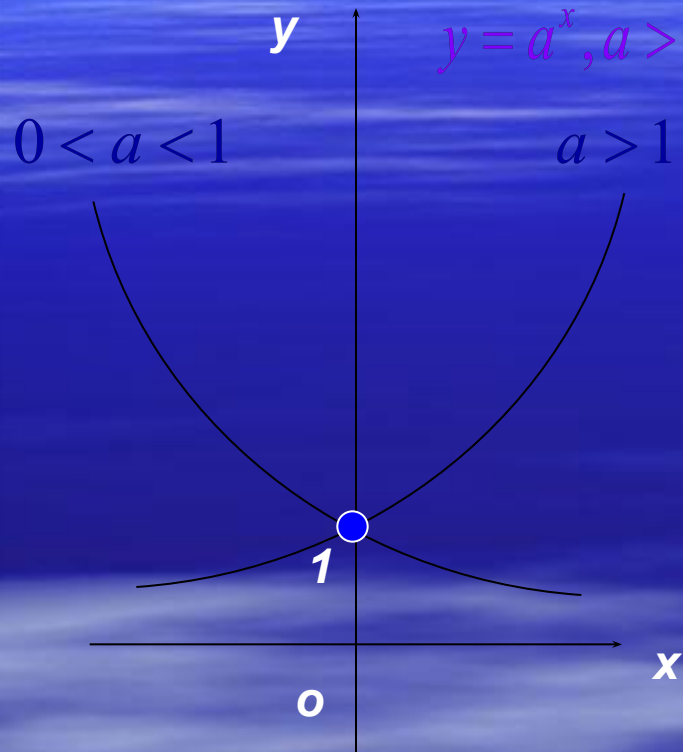


Свойства функции

Проанализируем по *схеме*:

- 1. область определения функции
- 2. множество значений функции
- 3. нули функции
- 4. промежутки знакопостоянства функции
- 5. четность или нечётность функции
- 6. монотонность функции
- 7. наибольшее и наименьшее значения
- 8. периодичность функции
- 9. ограниченность функции

Показательная функция, её график и свойства



- 1) Область определения – множество всех действительных чисел ($D(y)=\mathbb{R}$).
- 2) Множество значений – множество всех положительных чисел ($E(y)=\mathbb{R}_+$).
- 3) Нулей нет.
- 4) $y > 0$ при $x \in \mathbb{R}$.
- 5) Функция ни чётная, ни нечётная.
- 6) Функция монотонна: возрастает на \mathbb{R} при $a > 1$ и убывает на \mathbb{R} при $0 < a < 1$.
- 7) Наибольшего и наименьшего значений у функции нет.
- 8) Функция неперiodична.
- 9) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

Задание А4

Выберите функцию возрастающую на \mathbb{R} :

1. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

2. $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

4. $y = 10^{-x}$

Задание А5

Выберите функцию убывающую на \mathbb{R} :

1. $y = 5^x$;

2. $y = 10^x + 1$;

3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;

4. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$.

Задание В1

Укажите область значений функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1:$$

1. $(0; +\infty)$;

2. $(-1; +\infty)$;

3. $[0; +\infty)$;

4. $(-\infty; -1)$.

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$

Задание В2

Какое из указанных чисел входит в область значений функции

$$y = 2^x + 4?$$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5.

Решение:

Для любого $x \in \mathbb{R}$: $2^x > 0$;

$$2^x + 4 > 4;$$

$$y > 4.$$

$$E(y) = (4; +\infty)$$



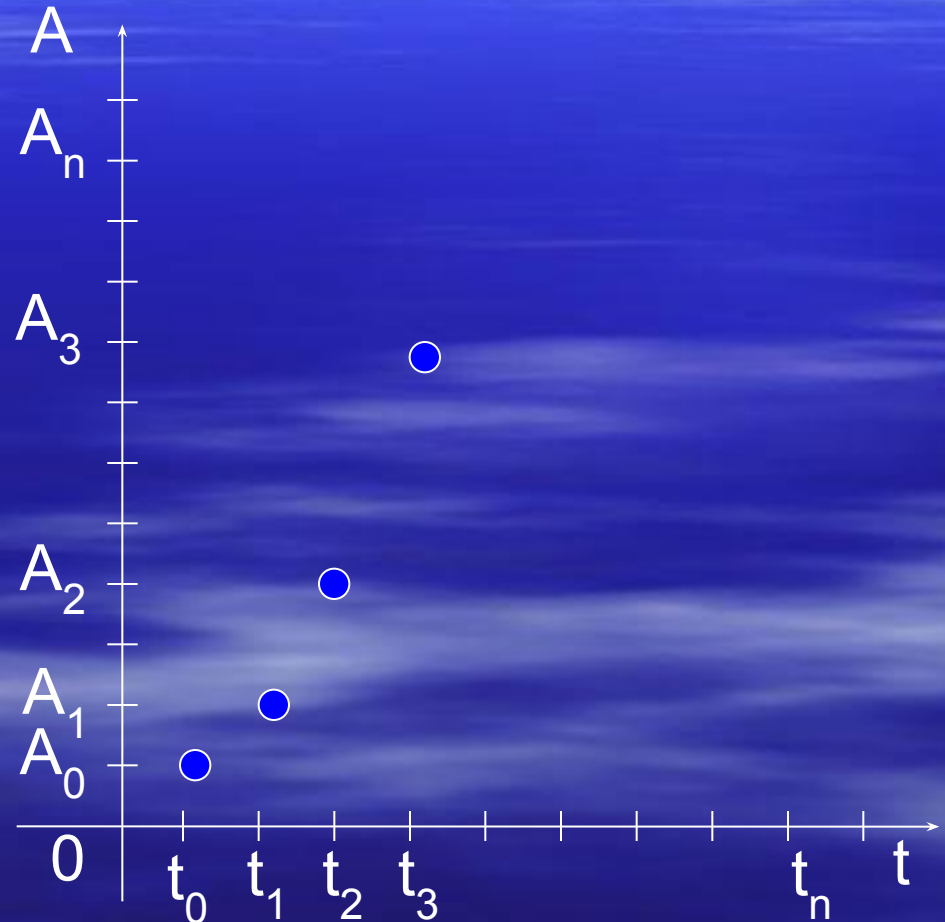
$$5 \in E(y)$$

Ответ: 5.

Применения показательной функции



Рост древесины происходит по закону $A = A_0 a^{k \cdot t}$, где:
A- изменение количества древесины во времени;
A₀- начальное количество древесины;
t-время, **k, a**- некоторые постоянные.



Давление воздуха убывает с высотой по закону: $P = P_0 \cdot a^{-k \cdot h}$, где:

P - давление на высоте h ,

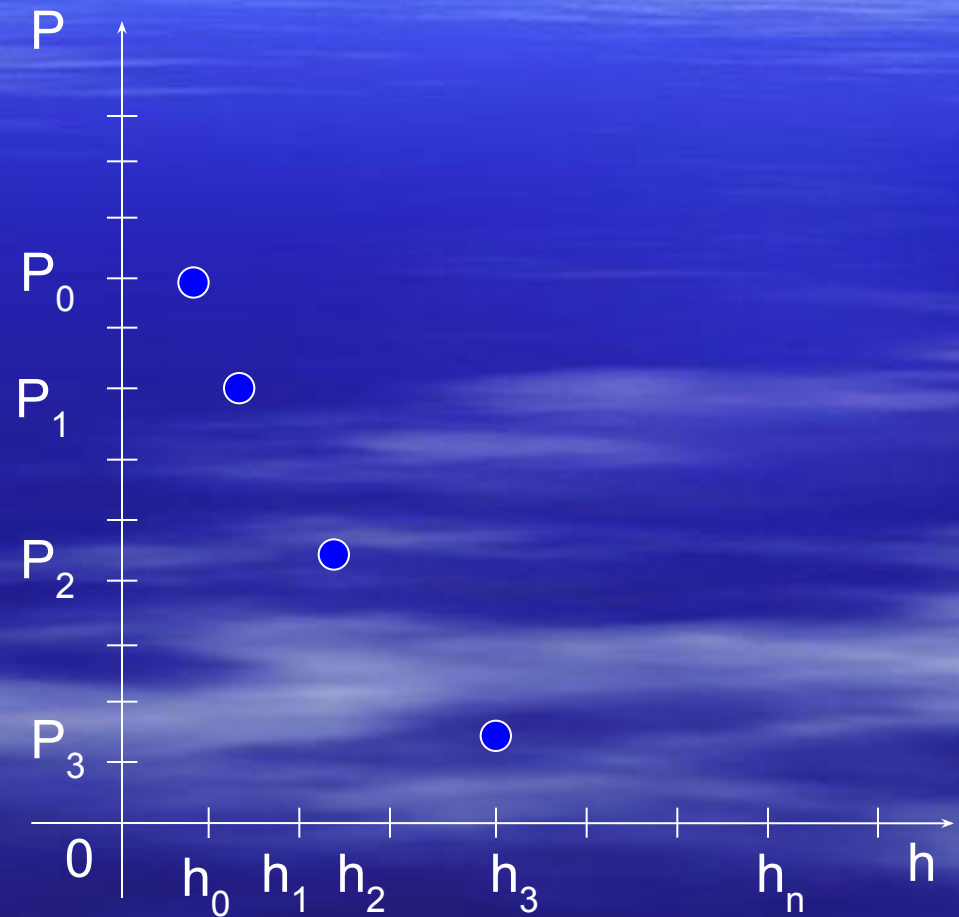
P_0 - давление на уровне моря,

h - высота,

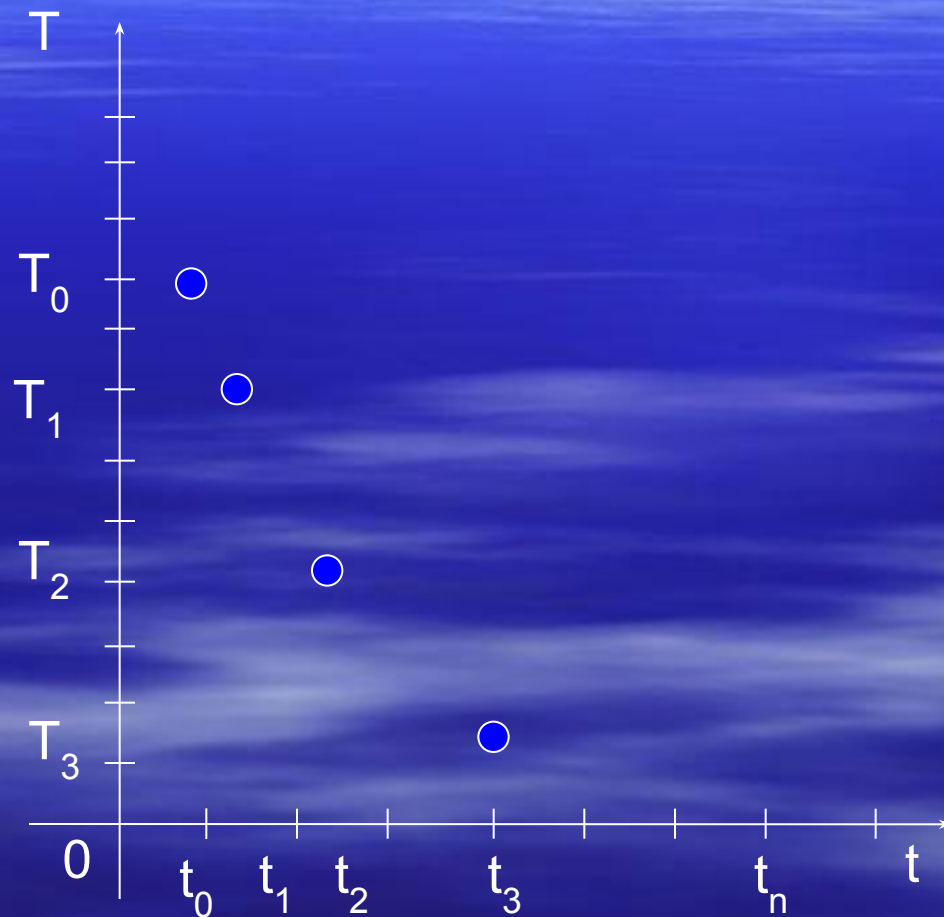
a, k - некоторые постоянные.



$T = \text{const}$



Температура чайника изменяется по закону $T = T_0 a^{-k \cdot t}$, где:
T- изменение температуры чайника со временем;
 T_0 - температура кипения воды;
t- время,
k, a- некоторые постоянные.



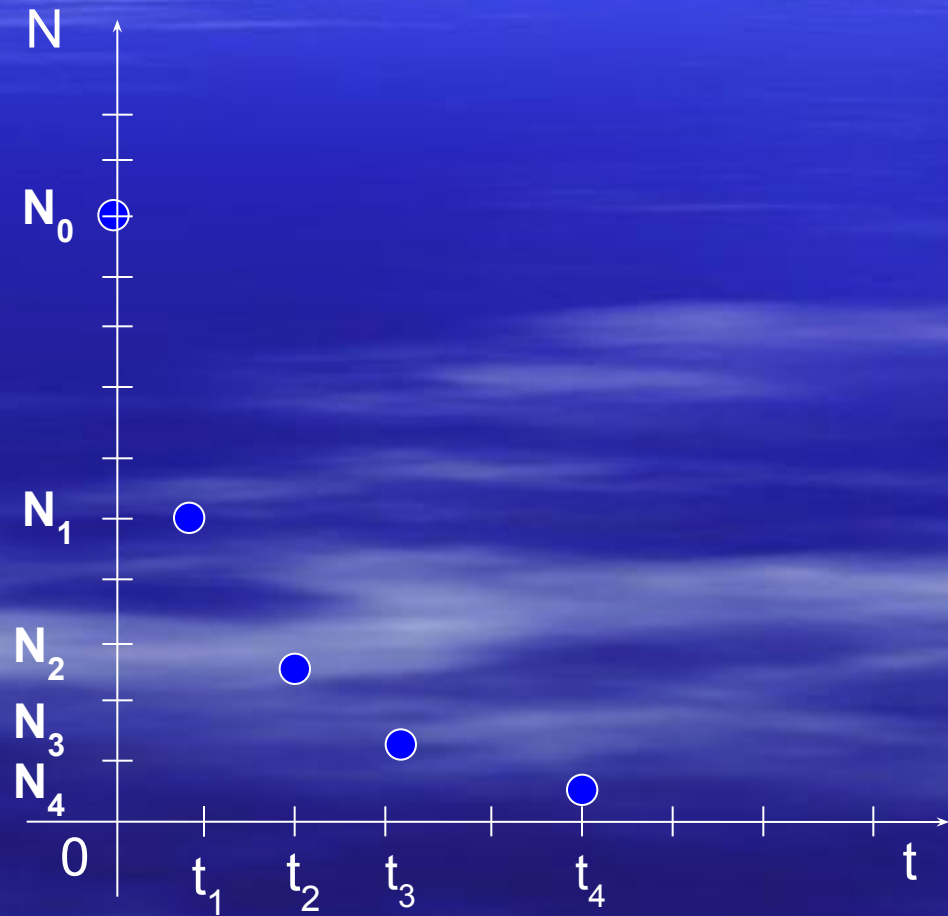
Радиоактивный распад происходит по закону $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где:

N - число нераспавшихся атомов в любой момент времени t ;

N_0 - начальное число атомов (в момент времени $t=0$);

t -время;

T - период полураспада.



- **Существенное свойство процессов органического**
- **изменения величин состоит в том, что**

за равные промежутки времени значение величины изменяется
в одном и том же отношении

К процессам органического изменения величин относятся:

Рост древесины

$$A = A_0 a^{k \cdot t}$$

Изменение температуры чайника

$$T = T_0 a^{-k \cdot t}$$

Изменение давления воздуха

$$P = P_0 \cdot a^{-k \cdot h}$$

Радиоактивный распад

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$y = C \cdot a^{k \cdot x}$$



$$C = 1, k = 1$$

$$y = a^x$$

Пример 1. Сравните числа $1,3^{34}$ и $1,3^{40}$.

Общий метод решения.

1. Представить числа в виде степени с одинаковым основанием (если это необходимо)

$$1,3^{34} \text{ и } 1,3^{40}.$$

2. Выяснить, возрастающей или убывающей является показательная функция

$a=1,3$; $a>1$, след-но показательная функция возрастает.

3. Сравнить показатели степеней (или аргументы функций)

$$34 < 40.$$

4. Используя свойство возрастания (убывания) функции, сравнить степени с одинаковым основанием (или значения функций)

$$1,3^{34} < 1,3^{40}.$$

5. Сравнить исходные числа.

Сравните:

$$а) (0,65)^{-\sqrt{2}} \text{ и } (0,65)^{\frac{1}{2}};$$

$$б) \left(\frac{7}{9}\right)^{16,2} \text{ и } \left(\frac{9}{7}\right)^{-3};$$

$$в) \left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} \text{ и } 1; \quad г) \left(\frac{1}{16}\right)^{-3} \text{ и } 64^{\sqrt{3}}.$$

Пример 2. Решите графически уравнение $3^x=4-x$.

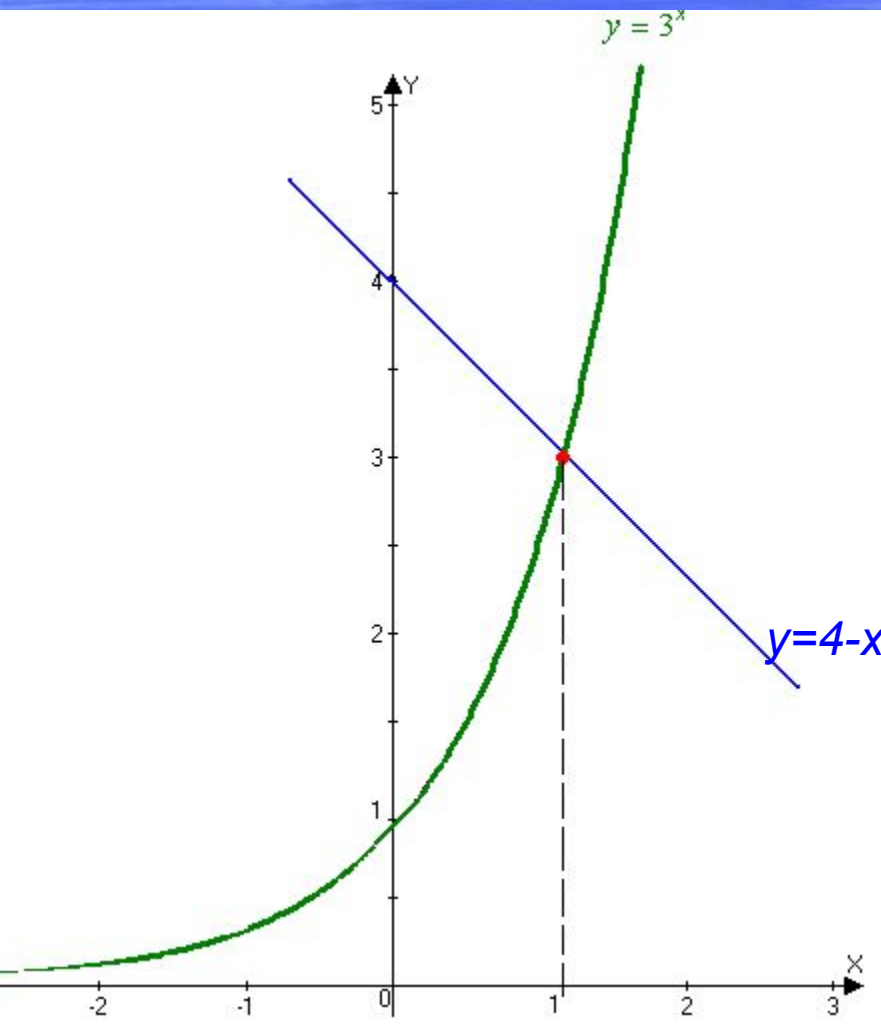
Решение.

Используем функционально-графический метод решения уравнений:

построим в одной системе координат графики функций $y=3^x$ и $y=4-x$. Замечаем, что они имеют одну общую точку $(1;3)$. Значит, уравнение имеет

единственный корень $x=1$.

Ответ: 1



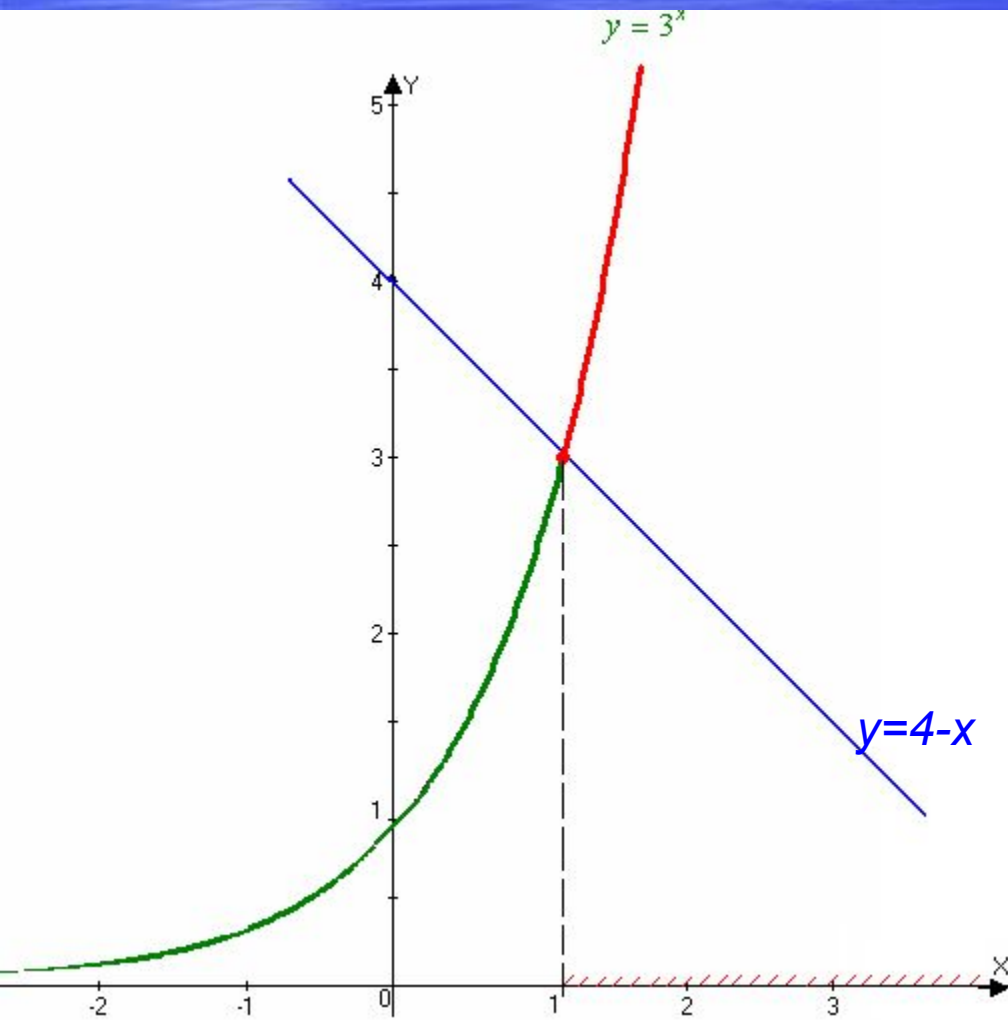
Решите графически уравнения:

- 1) $2^x=1$; 1) (0)
- 2) $(1/2)^x=x+3$; 2) (-1)
- 3) $4^x+1=6-x$; 3) (1)
- 4) $3^{1-x}=2x-1$; 4) (1)
- 5) $3^{-x}=-3/x$; 5) (-1)
- 6) $2^x-1=\sqrt{x}$. 6) (1)

Пример 3. Решите графически неравенство $3^x > 4-x$.

Решение.

Используем функционально-графический метод решения неравенств:



1. Построим в одной системе координат графики функций $y = 3^x$ и $y = 4 - x$.
2. Выделим часть графика функции $y = 3^x$, расположенную выше (т. к. знак $>$) графика функции $y = 4 - x$.
3. Отметим на оси x ту часть, которая соответствует выделенной части графика (иначе: спроецируем выделенную часть графика на ось x).
4. Запишем ответ в виде интервала:
Ответ: $(1; +\infty)$.

Решите графически неравенства:

1) $2^x > 1;$

2) $2^x < 4 ;$

3) $(1/3)^x < 3;$

4) $(1/2)^x \leq x+3;$

5) $5^x \geq 6-x ;$

6) $(1/3)^x \geq x+1.$