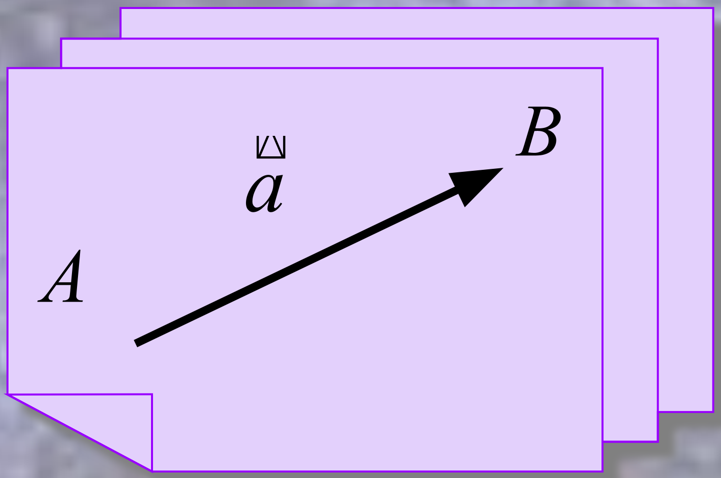
3. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

3.1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Направленный отрезок, на котором заданы начало, конец и направление, называется вектором.

Обозначается: $\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}$



Длиной ***или*** ***модулем*** ***вектора называется расстояние между его началом и концом.***

Обозначается: $|\vec{a}|;\ |\overrightarrow{AB}|$

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.

Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется нулевым.

В любой системе отсчета вектор характеризуется своими координатами.
Пусть в системе отсчета XYZ заданы координаты начала и конца вектора:

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

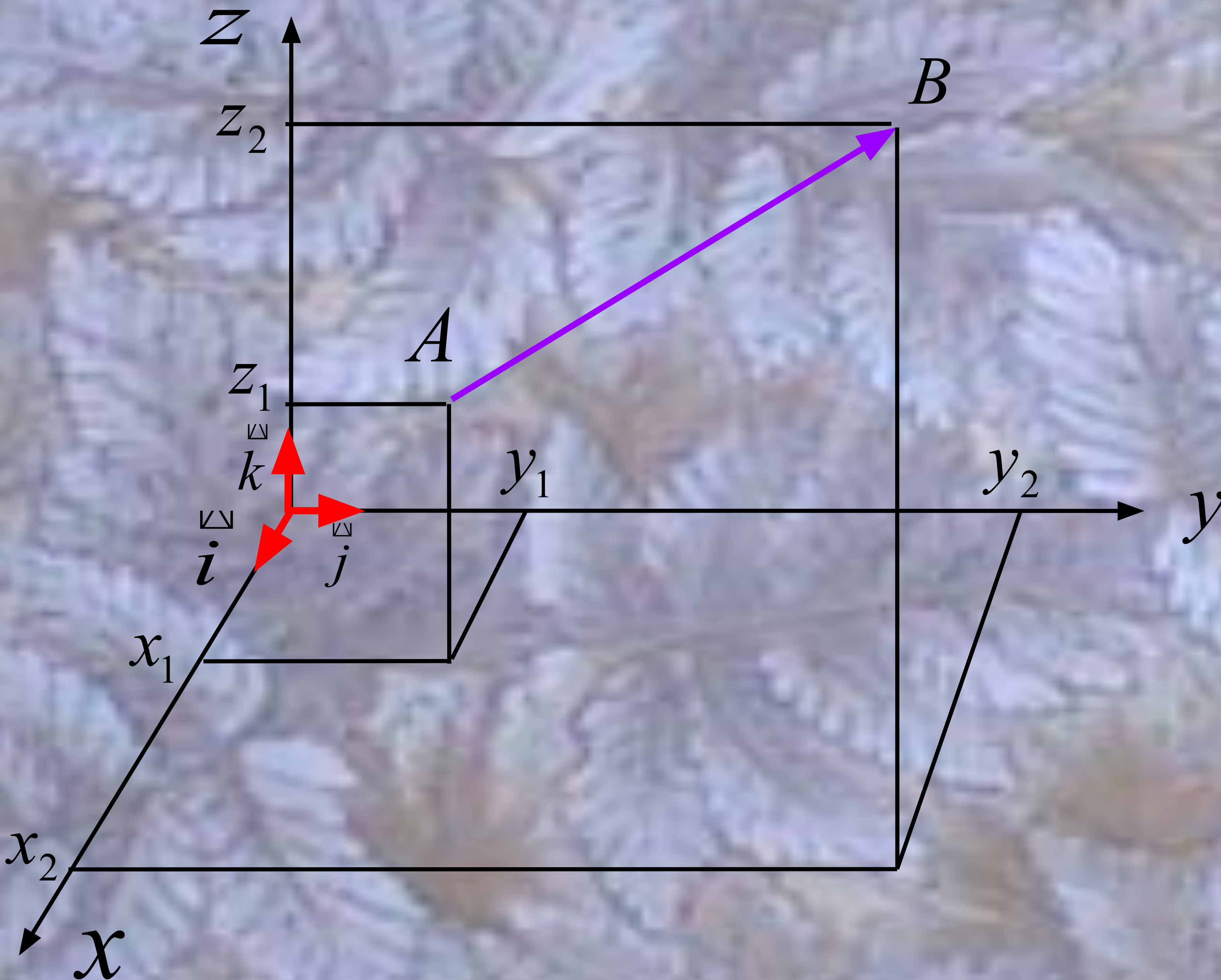
Тогда координаты вектора будут:

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

Где: $x = x_2 - x_1$ **Или:** $\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

$$y = y_2 - y_1$$

$$z = z_2 - z_1$$



z
z_2
B
A
z_1
$\vec{k}$
y_1
y_2
y
$\vec{i}$
$\vec{j}$
x_1
x_2
x

Длина вектора определяется по формуле:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Пусть два вектора заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Если эти вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты должны быть пропорциональны:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$$

Условие коллинеарности вектор

<u>Суммой</u> двух векторов будет вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат исходных векторов.

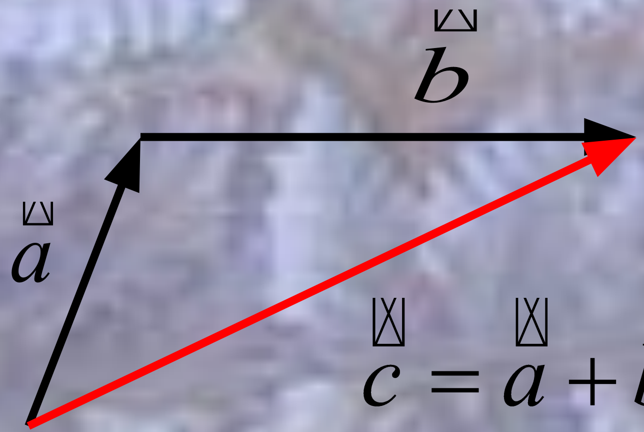
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$c_1 = a_1 + b_1 \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad c_3 = a_3 + b_3$$

Для построения суммы векторов, нужно совместить конец первого вектора с началом второго. Тогда вектор их суммы будет направлен от начала первого вектора к концу второго:

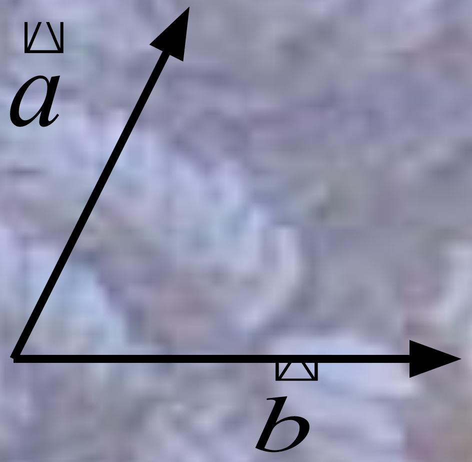


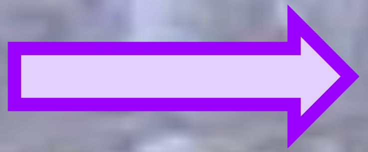
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

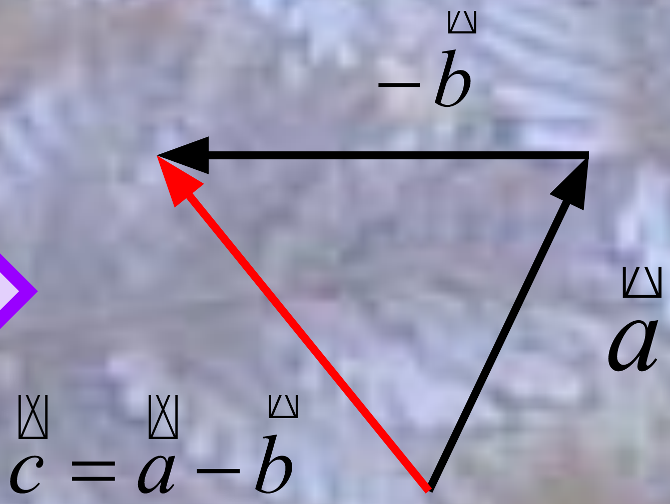
Аналогично определяется сумма нескольких векторов.

<u>Разностью</u> двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$

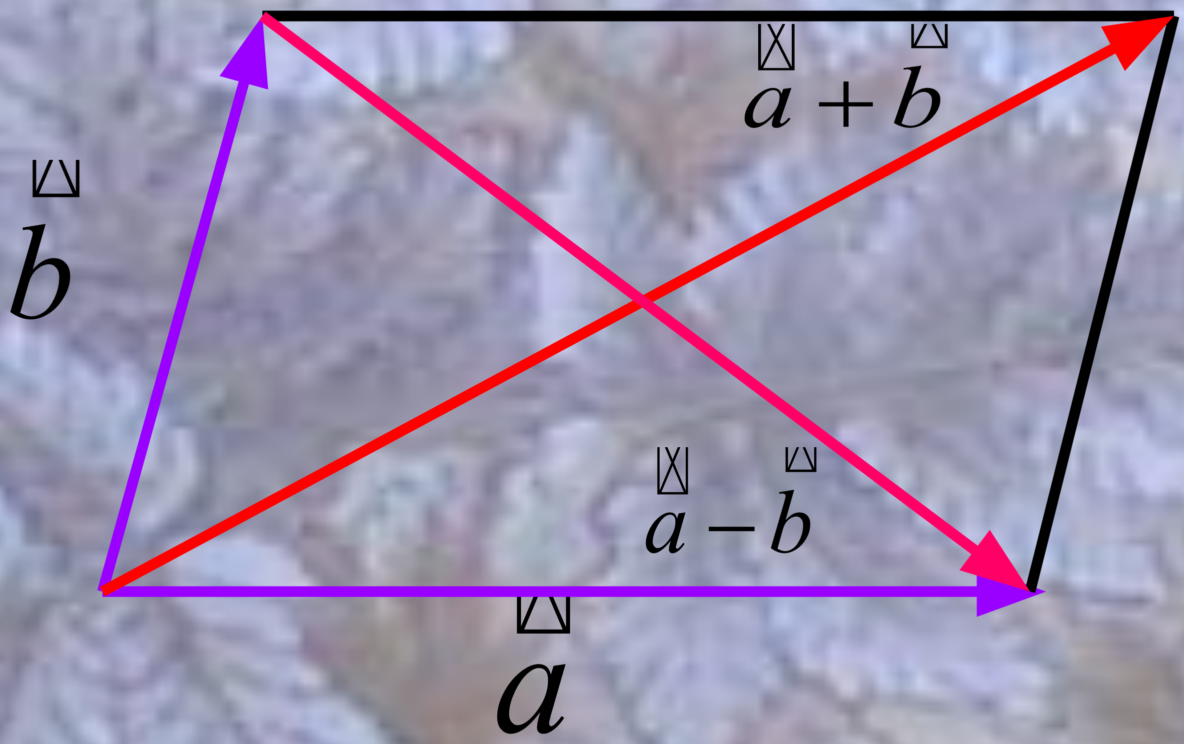
называется сумма векторов $\vec{a} + (-\vec{b})$







В параллелограмме, построенном на двух векторах, одна диагональ представляет собой сумму этих векторов, а другая – разность:



<u>Произведением</u> вектора на число будет вектор, координаты которого равны произведению соответствующих координат исходного вектора на это число.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{a} \cdot \lambda = \vec{c}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$c_1 = a_1 \cdot \lambda \qquad c_2 = a_2 \cdot \lambda \qquad c_3 = a_3 \cdot \lambda$$

Геометрически смысл умножения вектора
на число заключается в увеличении его длины в λ раз, если $|\lambda|>1$, и в ее сокращении
во столько же раз при $|\lambda|<1$.

Свойства операций сложения и умножения вектора на число

1

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

2

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

3

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

4

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

5

$$(\vec{a} + \vec{b})\alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

***<u>Скалярным произведением</u>* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.**

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}\,^{\wedge};\vec{b}\right)$$

Если два вектора заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

То скалярное произведение выразится следующим образом:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Отсюда можно выразить угол между двумя векторами:

$$\boxed{\cos\left(\vec{a} \,\hat{;}\, \vec{b}\right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Условие перпендикулярност векторов