

Лекция 6

Формулы Френеля

В отличие от геометрических законов, амплитуды отраженной и преломленной волн зависят от поляризации падающей волны.

Целесообразно рассматривать два случая отдельно, когда электрический вектор лежит в плоскости падения, либо перпендикулярно к ней.

Разложим амплитуды $\overset{\boxminus}{A}$, $\overset{\boxminus}{R}$, $\overset{\boxminus}{D}$
на компоненты p и s , лежащие
соответственно в плоскости
падения и \perp к ней.

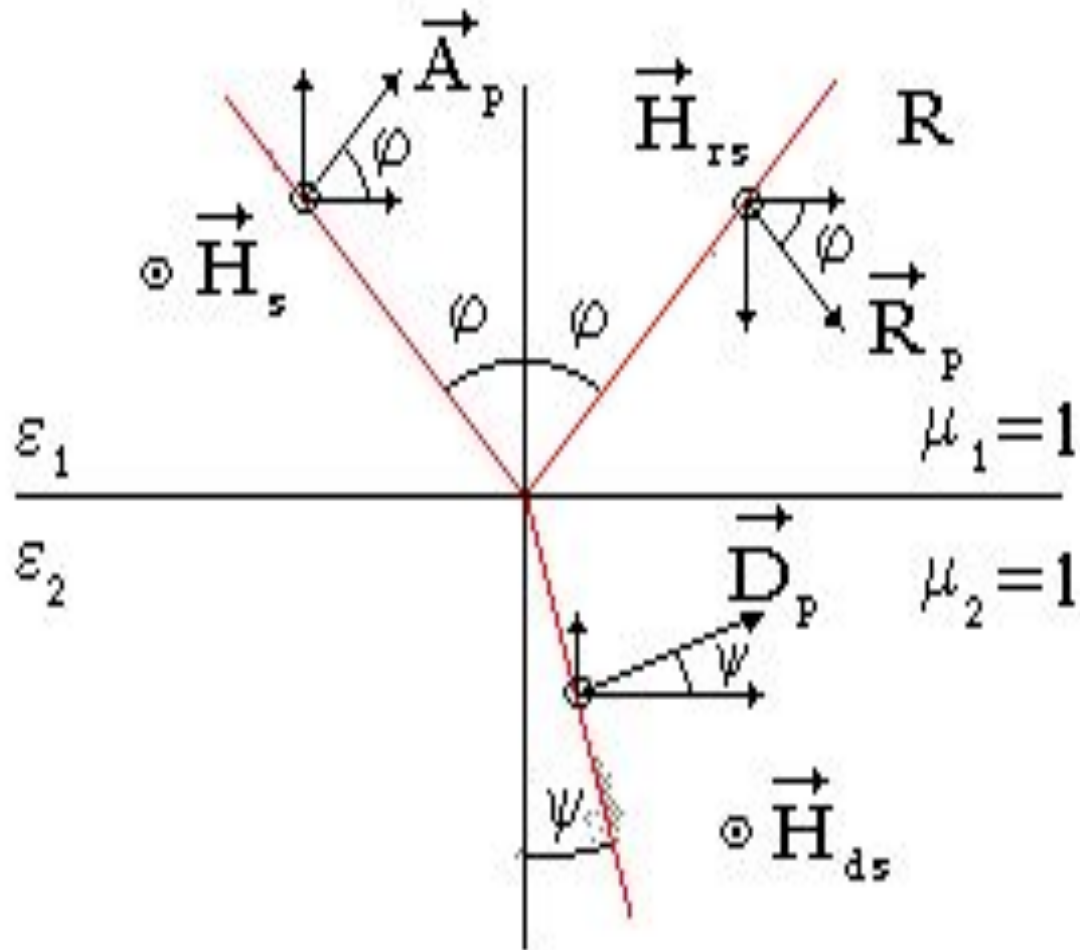
$$\overset{\sqcap}{A} = \overset{\sqcap}{A}_p + \overset{\sqcap}{A}_s$$

$$\overset{\sqcap}{R} = \overset{\sqcap}{R}_p + \overset{\sqcap}{R}_s$$

$$\overset{\sqcap}{D} = \overset{\sqcap}{D}_p + \overset{\sqcap}{D}_s$$

Выразим R_p и D_p через A_p , ϕ и ψ
 R_s и D_s через A_s , ϕ и ψ

1) Свет линейно поляризован в плоскости падения



Граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_p + \vec{R}_p$$

$$\vec{E}_2 = \vec{D}_p$$

$$A_p \cos \varphi + R_p \cos \varphi = D_p \cos \psi$$

$$\varepsilon_1 (A_p \sin \varphi - R_p \sin \varphi) = \varepsilon_2 D_p \sin \psi$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$A_p + R_p = \frac{D_p \cos \psi}{\cos \varphi}; A_p - R_p = \frac{\varepsilon_2 D_p \sin \psi}{\varepsilon_1 \sin \varphi} = D_p \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \psi} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{D_p \sin \varphi}{\sin \psi}$$

$$\frac{A_p + R_p}{A_p - R_p} = \frac{1 + \frac{R_p}{A_p}}{1 - \frac{R_p}{A_p}} = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$$

$$\frac{1+x}{1-x} = A \Rightarrow 1+x = A - Ax \Rightarrow x(A+1) = (A-1) \Rightarrow x = \frac{A-1}{A+1}$$

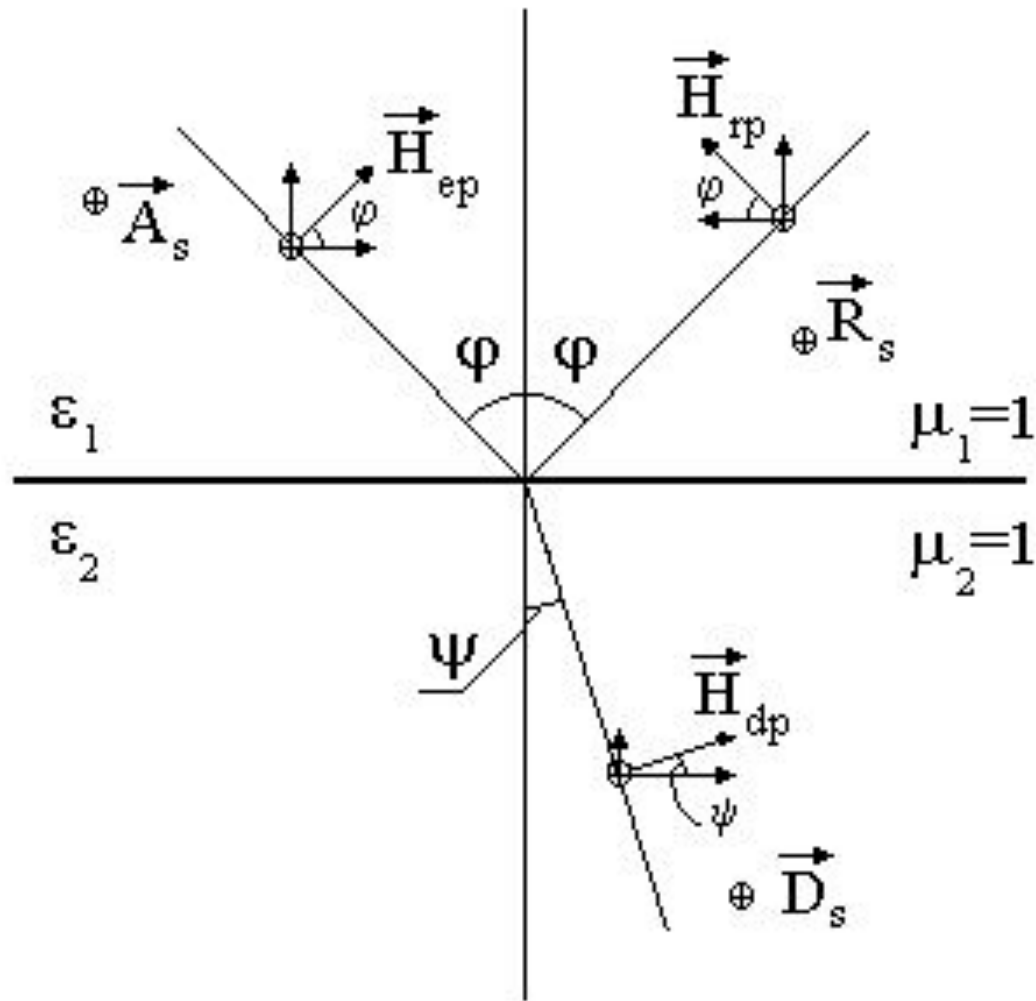
$$\begin{aligned} \frac{R_p}{A_p} &= \frac{\sin\psi \cos\psi - \sin\varphi \cos\varphi}{\sin\psi \cos\psi + \sin\varphi \cos\varphi} = \frac{1/2(\sin 2\varphi - \sin 2\psi)}{1/2(\sin 2\varphi + \sin 2\psi)} = \\ &= -\frac{2\cos(\varphi + \psi)\sin(\varphi - \psi)}{2\sin(\varphi + \psi)\cos(\varphi - \psi)} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \end{aligned}$$

$$\frac{R_p}{A_p} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_p}{A_p} &= \left(1 + \frac{R_p}{A_p}\right) \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \left(\frac{2\sin\psi \cos\psi}{\sin\psi \cos\psi + \sin\varphi \cos\varphi}\right) \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \\ &= \frac{2\sin\psi \cos\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\psi} = \frac{2\sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} \end{aligned}$$

$$\frac{D_p}{A_p} = \frac{2\sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}$$

2) Свет линейно поляризован в плоскости,
перпендикулярной плоскости падения.



$$\overset{\sphericalangle}{H}_1 = \overset{\sphericalangle}{H}_{ep} + \overset{\sphericalangle}{H}_{rp}$$

Граничные условия:

$$H_{1n} = H_{2n} \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

$$H_{ep} \sin \varphi + H_{rp} \sin \varphi = H_{dp} \sin \psi$$

$$H_{ep} \cos \varphi - H_{rp} \cos \varphi = H_{dp} \cos \psi$$

Так как:

$$\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H \quad \sqrt{\varepsilon_1} A_s = H_{ep}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} R_s = H_{rp} \quad \sqrt{\varepsilon_2} D_s = H_{dp}$$

TO

$$\begin{cases} (A_s + R_s) \sqrt{\varepsilon_1} \sin \varphi = \sqrt{\varepsilon_2} D_s \sin \psi \\ (A_s - R_s) \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon_2} D_s \cos \psi \end{cases}$$

Разделим одно соотношение на другое, тогда получим:

$$\frac{A_s + R_s}{A_s - R_s} = \frac{1 + \frac{R_s}{A_s}}{1 - \frac{R_s}{A_s}} = \frac{\sin \psi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi}$$

Обозначим

$$\frac{1 + y}{1 - y} = B$$

тогда

$$y = \frac{B - 1}{B + 1}$$

Делаем подстановку:

$$\frac{R_s}{A_s} = \frac{\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi}{\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}$$

$$\frac{D_s}{A_s} = \left(1 + \frac{R_s}{A_s}\right) \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon_2} \sin \psi} = \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

$$\sqrt{r_p} = \frac{R_p}{A_p}$$

- коэффициент отражения по амплитуде р-компонента

$$\sqrt{r_s} = \frac{R_s}{A_s}$$

- коэффициент отражения по амплитуде s-компонента

$$r_p = \left(\frac{R_p}{A_p} \right)^2$$

- коэффициент отражения по мощности р-компонента

$$r_s = \left(\frac{R_s}{A_s} \right)^2$$

- коэффициент отражения по мощности s-компонента

Нормальное падение

Для случая нормального падения ($\phi = \psi = 0$) формулы Френеля приобретают неопределенный вид $0/0$. Для того чтобы вскрыть эту неопределенность, воспользуемся тем, что при малых углах \sin и tg могут быть заменены самими углами, а $\cos \approx 1$. Тогда

$$\frac{R_p}{A_p} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \approx -\frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi} = -\frac{\frac{\varphi}{\psi} - 1}{\frac{\varphi}{\psi} + 1} = -\frac{n - 1}{n + 1}$$

$$\frac{D_p}{A_p} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} \approx \frac{2\psi \cdot 1}{(\varphi + \psi) \cdot 1} = \frac{2}{\frac{\varphi}{\psi} + 1} = \frac{2}{n + 1}$$

$$\frac{R_s}{A_s} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \approx -\frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi} = -\frac{n-1}{n+1}$$

$$\frac{D_s}{A_s} = \frac{2\sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{2\psi}{\varphi + \psi} = \frac{2}{n+1}$$

Коэффициент отражения от диэлектрика

При опытной проверке формул Френеля
мы имеем дело не с амплитудой
световой волны, а с интенсивностью
света, пропорциональной квадрату
амплитуды

$$r_p = \frac{R_p^2}{A_p^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)} \quad r_s = \frac{R_s^2}{A_s^2} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}$$

$$\varphi = 0^\circ \quad r_p = r_s = r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

$$n = 1.5 \quad r_p = r_s = r = 0,04 = 4\%$$

$$\varphi = 90^\circ \quad r_p = r_s = r = 1$$

т.е. при скользющем падении света происходит полное отражение света. С ЭТИМ, в частности, связаны яркие изображения предметов в спокойной воде (берега рек, фонари, заходящее солнце, лунная дорожка), блеск лысой головы и пр.

$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \rightarrow R_p$ обращается в ноль, $R_s \neq 0$.

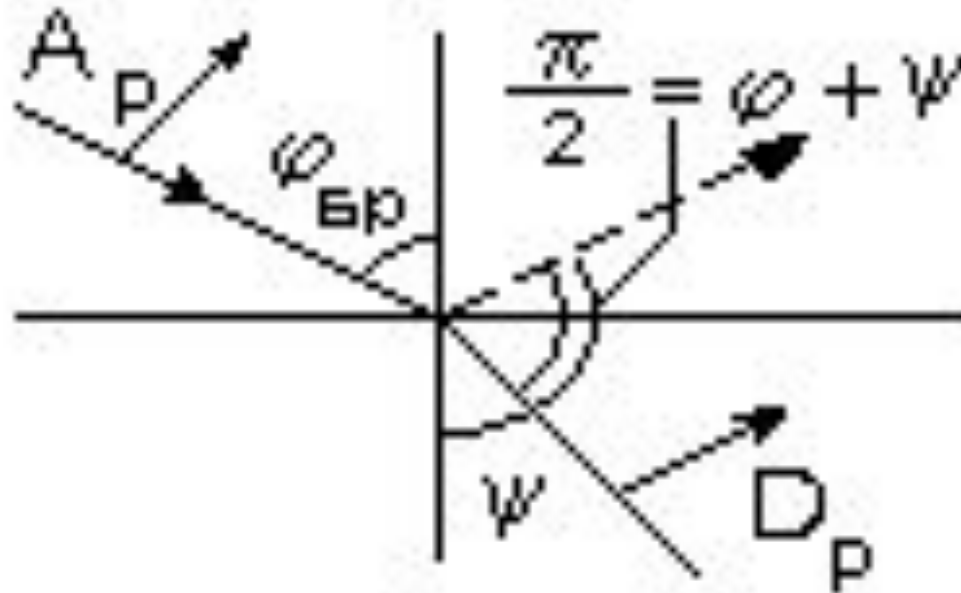
В этом случае:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n = \frac{\sin \varphi}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)} = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Бр}} = n$$

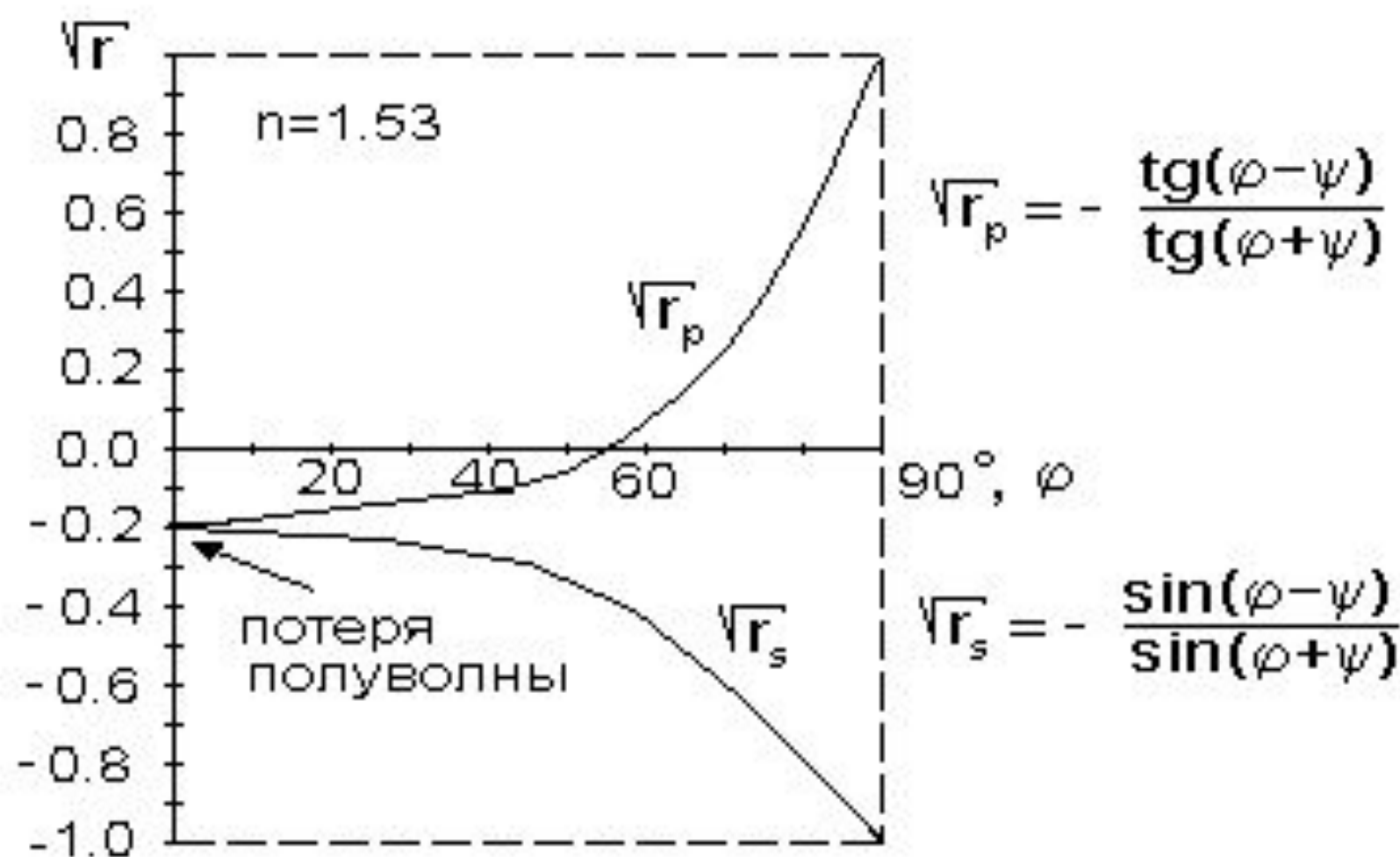
Закон Брюстера

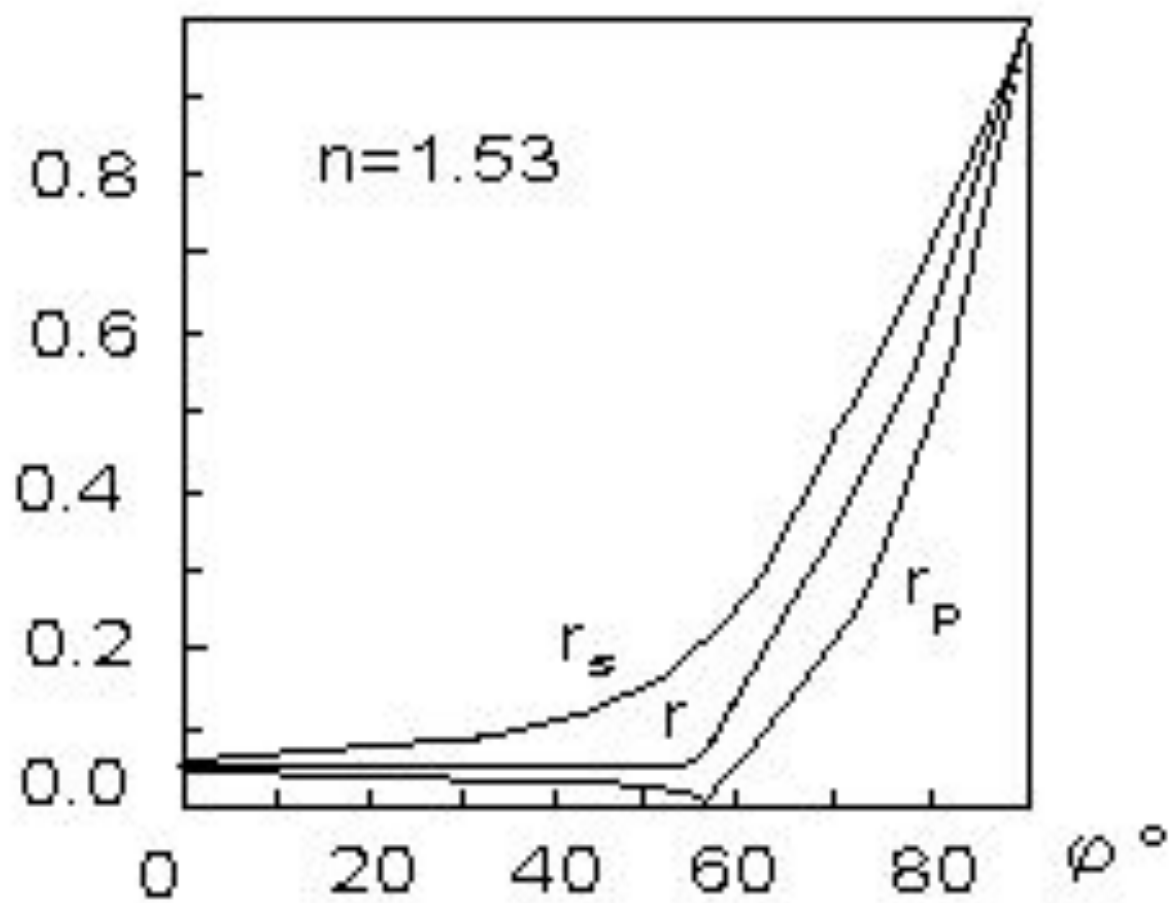
$$\varphi_{Br} = \text{arctg } n$$



При $n=1,53$ (стекло, роговой слой
КОЖИ В ВИДИМОМ ДИАПАЗОНЕ)

$$\phi_{\text{Бр}} \approx 57^\circ$$





$$r = \frac{1}{2} (r_p + r_s)$$

Следствия из формул Френеля

Комментарий: изменение *знака*
амплитуды эквивалентно
изменению *фазы*
соответствующей волны на π .

Следствия из формул Френеля

- 1. Амплитуды отраженной и преломленной волн - величины действительные (вещественные), т.е. поляризация отраженной и преломленной волн остается линейной.
- 2. Поэтому фазы отраженной и преломленной волн либо совпадают с фазой падающей волны (когда совпадают знаки амплитуд этих волн), либо отличаются на π (когда знаки отраженной и преломленной волн противоположны знаку амплитуды падающей волны).

Следствия из формул Френеля

- 3. При малых углах падения, $\left(\varphi + \psi < \frac{\pi}{2} \right)$ фазы обоих компонентов электрического вектора отраженной волны противоположны фазе падающей, когда

$$n_2 > n_1$$

Т.е. при отражении от оптически более плотной среды ($n > 1$) происходит потеря полуволны:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm\pi \quad , \quad \Delta = \pm\lambda / 2$$

где δ - разность фаз, Δ - разность хода.

Следствия из формул Френеля

- 4. При отражении от менее плотной среды ($n < 1$) потери полуволны не происходит.

**Поляризация света при
прохождении через границу
двух диэлектриков**

Для естественного света $\bar{A}_p = \bar{A}_s$, т.е. за интервал времени достаточно длинный по сравнению с продолжительностью излучения отдельных цугов, слагающие амплитуды в плоскости падения и перпендикулярные к ней в среднем равны между собой.

Однако для отраженного света,

$$\overline{R}_p \neq \overline{R}_s \quad \text{Т.К.}$$

$$\overline{R}_p = -\overline{A}_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} ; \quad \overline{R}_s = -\overline{A}_s \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}$$

Следовательно, коэффициент отражения

$$\overline{A}_p = \overline{A}_s$$

$$r = \frac{I_r}{I_e} = \frac{\overline{R}_p^2 + \overline{R}_s^2}{\overline{A}_p^2 + \overline{A}_s^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}_p^2}{\overline{A}_p^2} + \frac{\overline{R}_s^2}{\overline{A}_s^2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)} + \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} \right\} = \frac{1}{2} (r_p + r_s)$$

Отраженный свет является
частично поляризованным т.к.

$$|R_s| \geq |R_p|$$

с преимущественными
колебаниями в плоскости
перпендикулярной плоскости
падения.

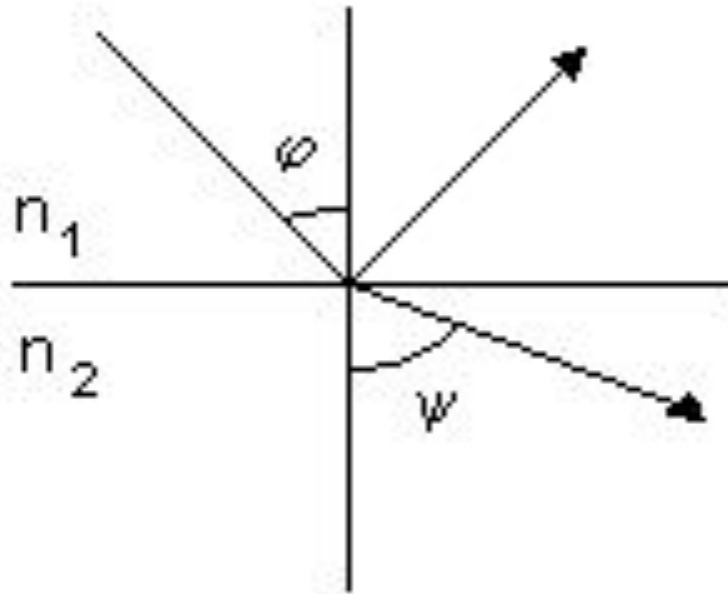
Степень поляризации:

$$P = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}$$

Явление полного внутреннего
отражения

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n}$$

$n = \frac{n_2}{n_1} < 1 \Rightarrow \sin \psi > 1$, что не имеет смысла.



Угол φ , соответствующий условию $\sin \varphi_{пр} = n$ называется предельным углом.

$$\sin\psi = 1 = \frac{\sin\varphi_{np}}{n}$$

т.е. $\psi=90^\circ$ и в соответствии с формулами Френеля отражение становится полным.

Для всех углов падения $\varphi > \varphi_{пр}$
не существует вещественных значений
угла преломления ψ , могущих
удовлетворить закону преломления.
Поэтому при $\varphi > \varphi_{пр}$
поток энергии в преломленном луче
остается равным нулю, а $r=1$.