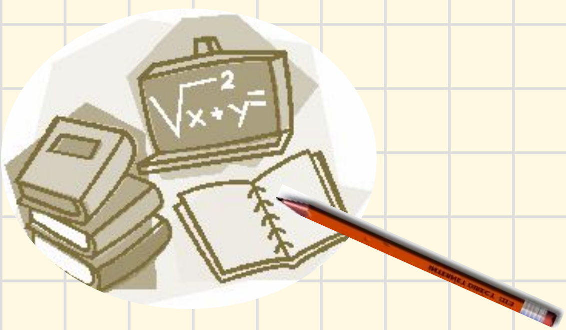
«Логарифмические неравенства»



По определению логарифма

Простейшие логарифмические неравенства записывается следующим образом: $\log_a f(x) > b$ $\log_a f(x) < b$

Схема сравнения логарифмических неравенств.

- $\log_a x > b$
  - $0 < a < 1$ → $x < a^b$, ОДЗ: $x>0$
  - $a > 1$ → $x > a^b$, ОДЗ: $x>0$
- $\log_a x < b$
  - $0 < a < 1$ → $x > a^b$, ОДЗ: $x>0$
  - $a > 1$ → $x < a^b$, ОДЗ: $x>0$

Пример:

$$\log_{0,25}(1+x) < -1$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(1+x) < -1$$

$$1 + x > 4$$

$$x > 3$$

Ответ : $(3;+\infty)$

Пример:

решить неравенство $log_{0,5}(x-2) \geq log_{0,5}(2x-12)$.

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x-12>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>2 \\ 2x>12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>2 \\ x>6 \end{cases} \Rightarrow x>6$$

$x \in (6;\ +\infty)$.

$log_{0,5}(x-2) \geq log_{0,5}(2x-12)$;

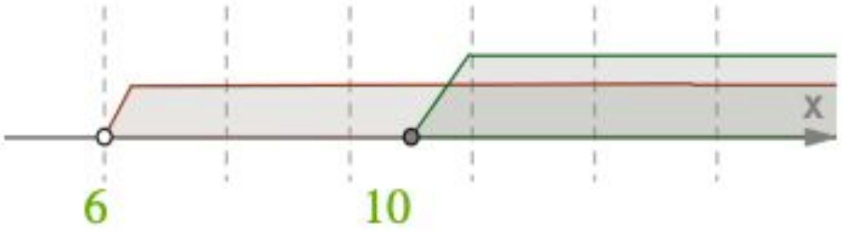
$x-2 \leq 2x-12$;

$x-2x \leq -12+2$;

$-x \leq -10$;

$x \geq 10$;

$$\begin{cases} x \in [10;\ +\infty) \\ x \in (6;\ +\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in [10;\ +\infty)$.

Метод потенцирования

Суть метода в следующем: с помощью формул неравенство привести к виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Справедливы следующие утверждения:

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) > 0, \qquad a > 1 \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0, \qquad 0 < a < 1 \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

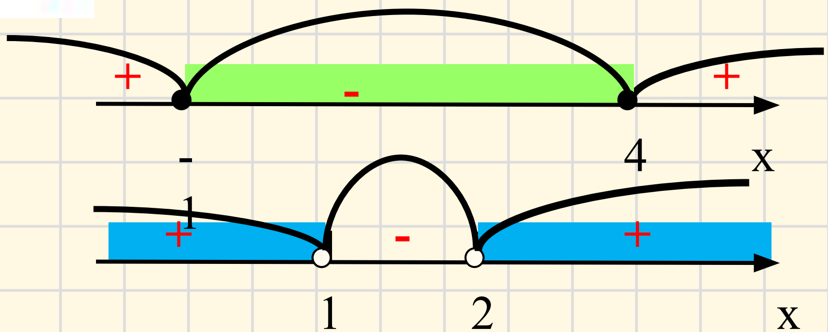
Пример:

$$\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 6 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 4)(x + 1) \leq 0 \\ (x - 1)(x - 2) > 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ}: [-1;1) \cup (2;4].$$

Пример 1. Решить неравенство: $\log_5(2x-4) \geq \log_5(x+1)$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ x+1>0 \\ 2x-4 \geq x+1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x>4 \\ x>-1 \\ 2x-x \geq 4+1, \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ x>-1 \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Решить самостоятельно

1). $\log_{\frac{1}{3}} x > 4$

2). $\log_{\frac{1}{36}}(3x+3) \geq -\frac{1}{2}$

3). $\log_8 (x^2 - 4x + 3) \geq 1$

4). $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 3x - 4) < \log_{\frac{1}{4}}(8 - x)$

5). $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) + \log_3 (4 - x) \leq 1$

Ответы :

$1.(0;\frac{1}{81})$

$2.(-1;1]$

$3.(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$

$4.(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$

$5.[-2;4]$

$6.(0;0{,}01)\cup(100;+\infty)$

$7.(0;0{,}2]\cup[5^{1,5};+\infty)$

СПАСИБО за внимание!