Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИКА

ЛЕКЦИЯ 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Кафедра теоретической механики

План лекции

Если на точку действует несколько сил, то она получает от них то же движение, как если бы на нее действовала одна сила, эквивалентная им всем.

Леонард Эйлер

Введение

Определение системы сходящихся сил (ССС)

Теорема о равнодействующей

Способы определения равнодействующей

Условия равновесия

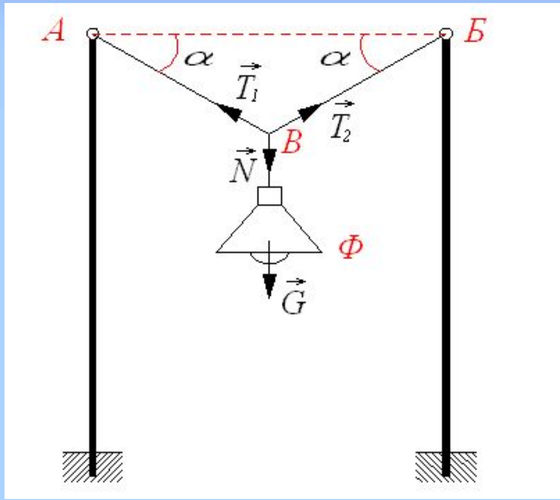
Пример решения задачи

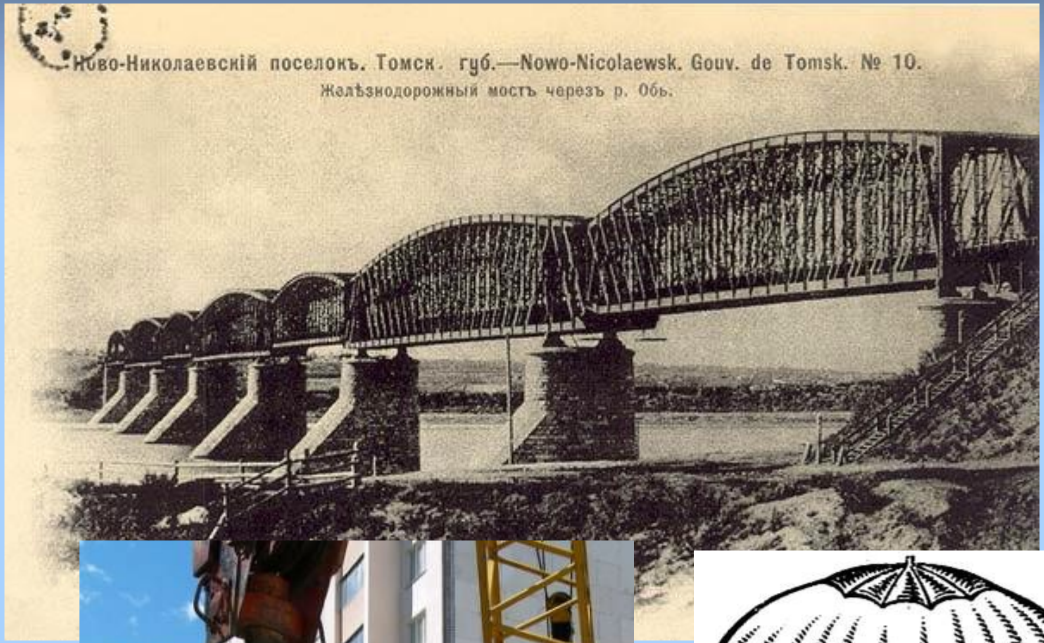
Заключение

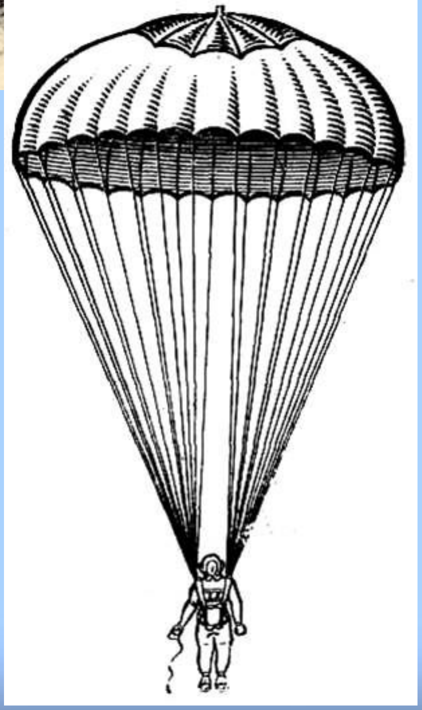
Цель лекции

Научиться решать задачи о приведении и равновесии для системы сходящихся сил.

Актуальность. Практические примеры

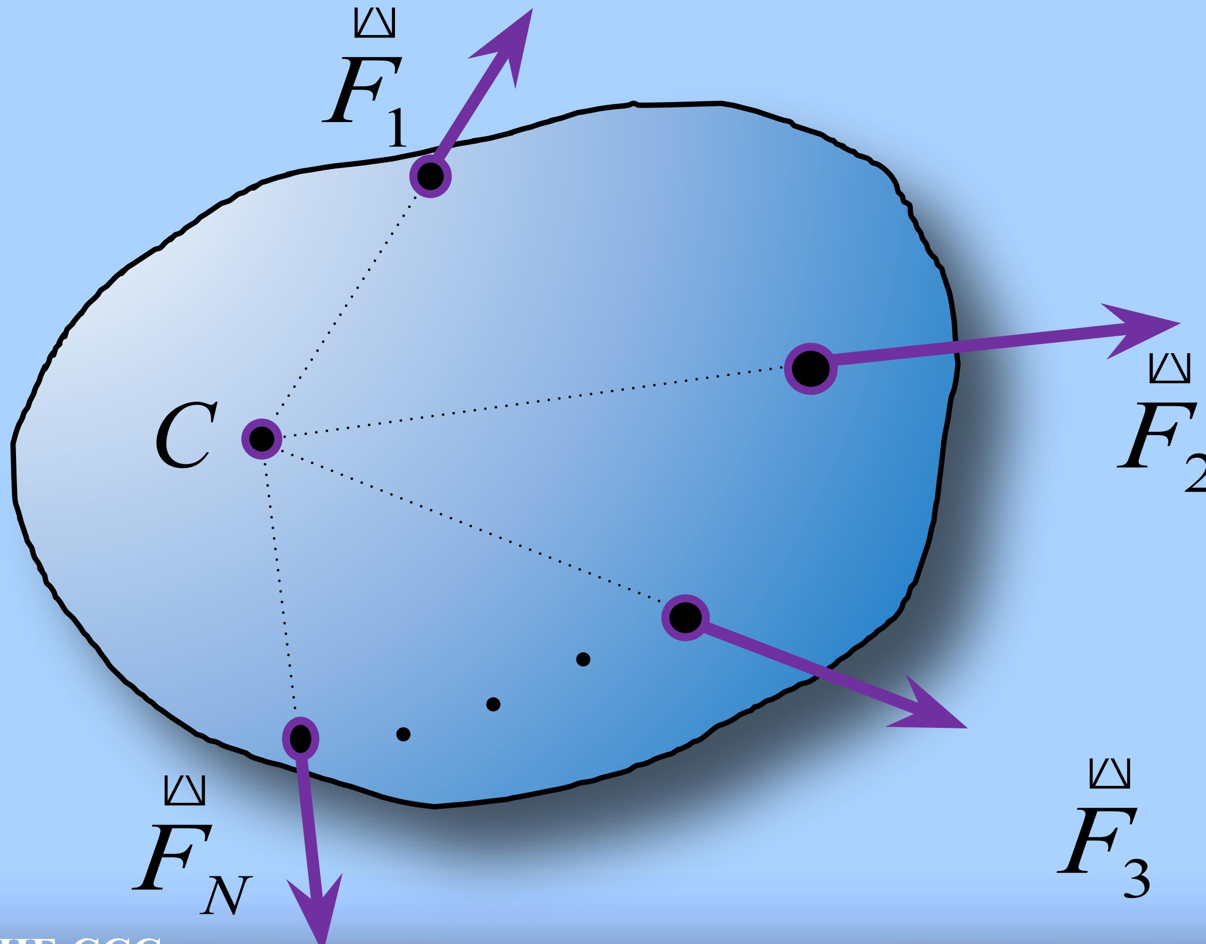






Система сходящихся сил -

система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке



Система сходящихся сил. Пример

$\vec{F}_{лебедь}$

$\vec{F}_{щука}$

$\vec{F}_{рак}$

При каких условиях действующая на повозку система сил будет кравновешенной

?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ССС

Теорема о равнодействующей ССС

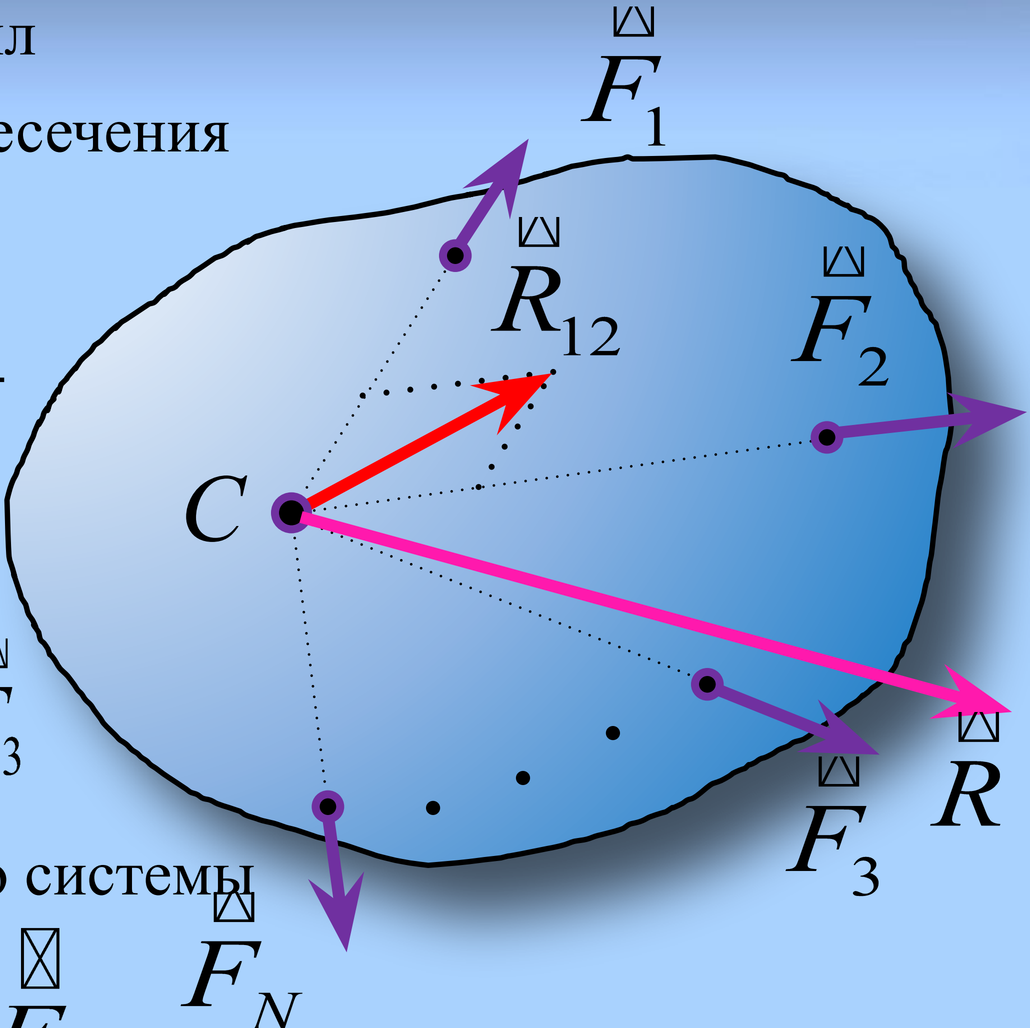
Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и проходящую через точку пересечения их линий действия.

Доказательство

- Проведем линии действия сил
- Перенесем силы в точку пересечения линий действия
- Складывая затем попарно силы с помощью аксиомы А4

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R}_{13} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$



- Получим равнодействующую системы

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

- Теорема доказана

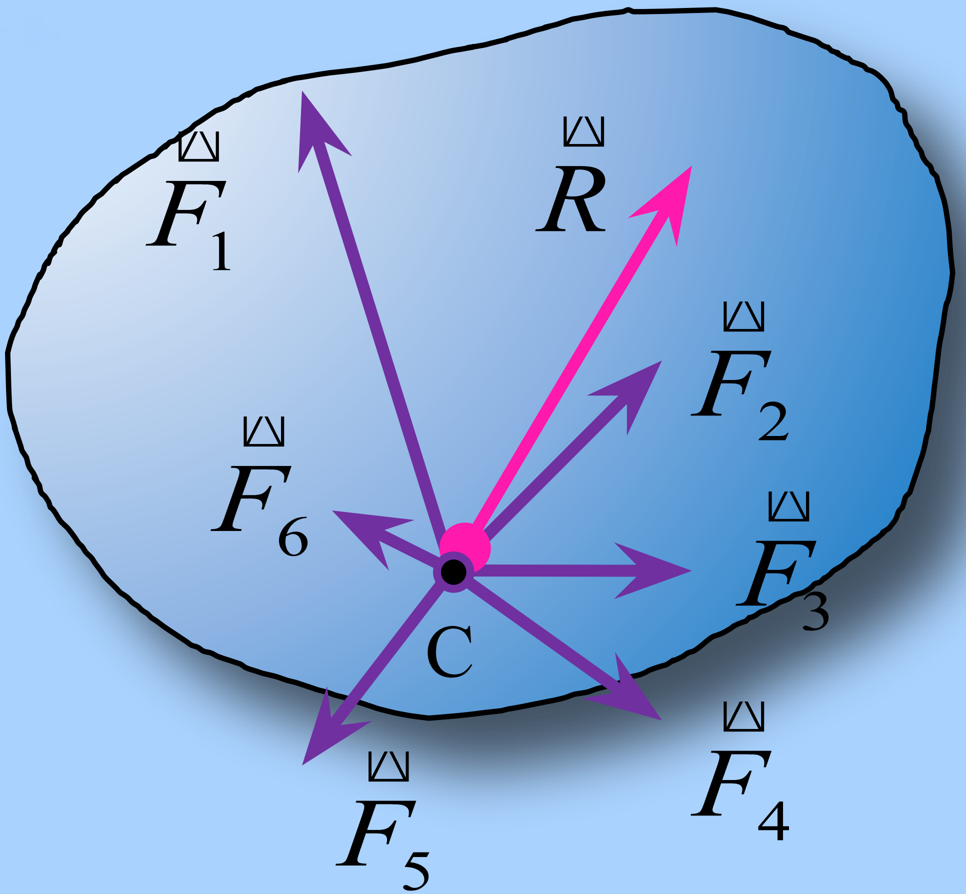
Способы определения равнодействующей ССС

геометрический

аналитический

Силовой многоугольник -
фигура, образованная векторами сил, причем начало каждой следующей силы совпадает с окончанием предыдущей.

Силовой многоугольник

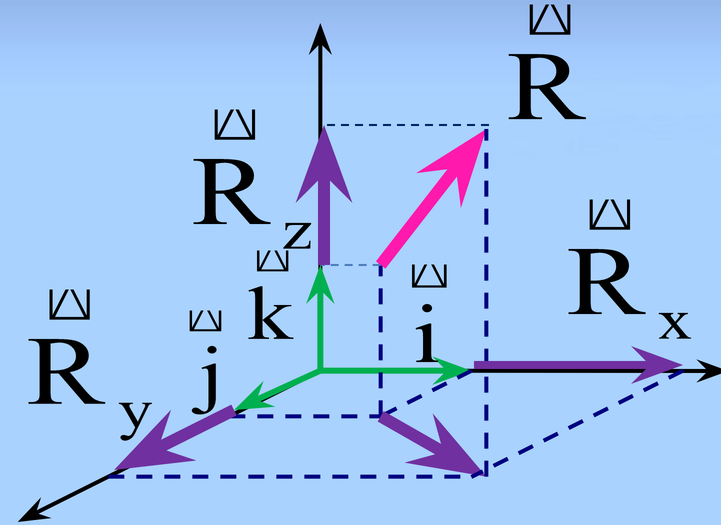


ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Аналитический способ определения равнодействующей ССС

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad \vec{R}_y = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ky}$$

$$\vec{R}_x = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kz} \qquad \vec{R}_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kz}$$



где R_X, R_Y, R_Z – проекции равнодействующей силы на оси *x*, *y*, *z*. Модуль и направление равнодействующей:

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos(R, x) = \frac{R_x}{|R|}, \qquad \cos(R, y) = \frac{R_y}{|R|}, \qquad \cos(R, z) = \frac{R_z}{|R|}$$

Условие равновесия ССС

Система сходящихся сил ~ одной силе, равнодействующей. Отсюда следует, что тело, на которое действует система сходящихся сил, будет находиться в равновесии, если равнодействующая этих сил равна нулю

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \qquad \vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z = 0$$

Геометрическое условие равновесия ССС: силовой многоугольник должен быть замкнутым, то есть окончание последней силы должно совпадать с началом первой

Условие равновесия ССС

Соотношение является векторным уравнением равновесия тела под действием системы сходящихся сил. Его можно переписать так:

$$\vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z = 0$$

Поскольку в правой части последнего уравнения стоит сумма трех взаимно перпендикулярных векторов, то для выполнения условия необходимо, чтобы каждый из них обращался в нуль:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = 0$$

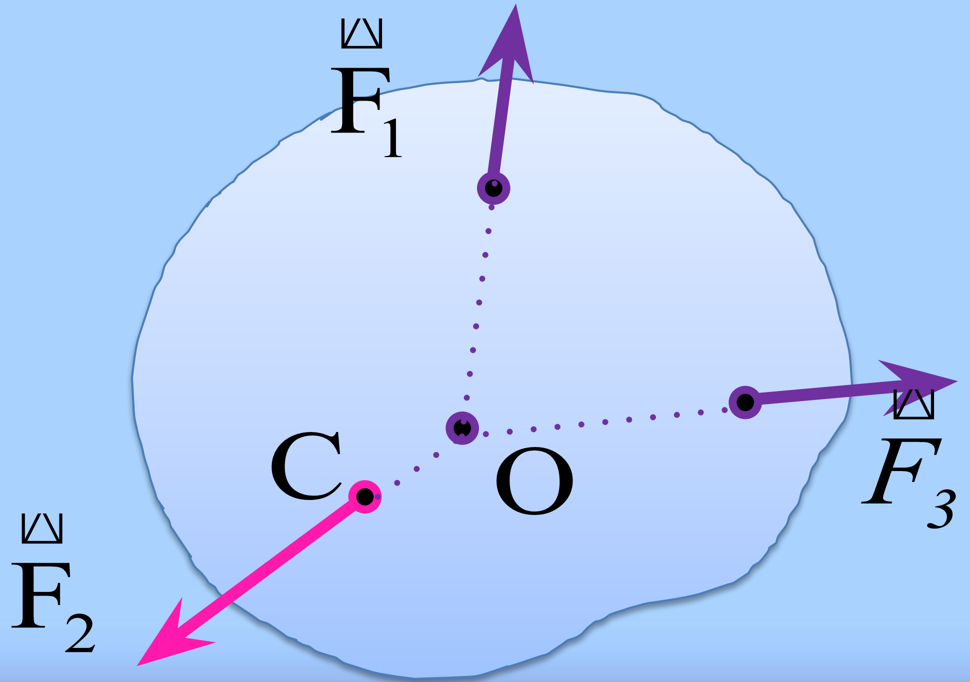
Уравнения равновесия плоской ССС

Если система сил, действующих на тело, плоская, то уравнения равновесия упрощаются. Например, если система сил лежит в плоскости xOy

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, причем линии действия двух из них пересекаются, то эти силы образуют ССС



Теорема о трех силах

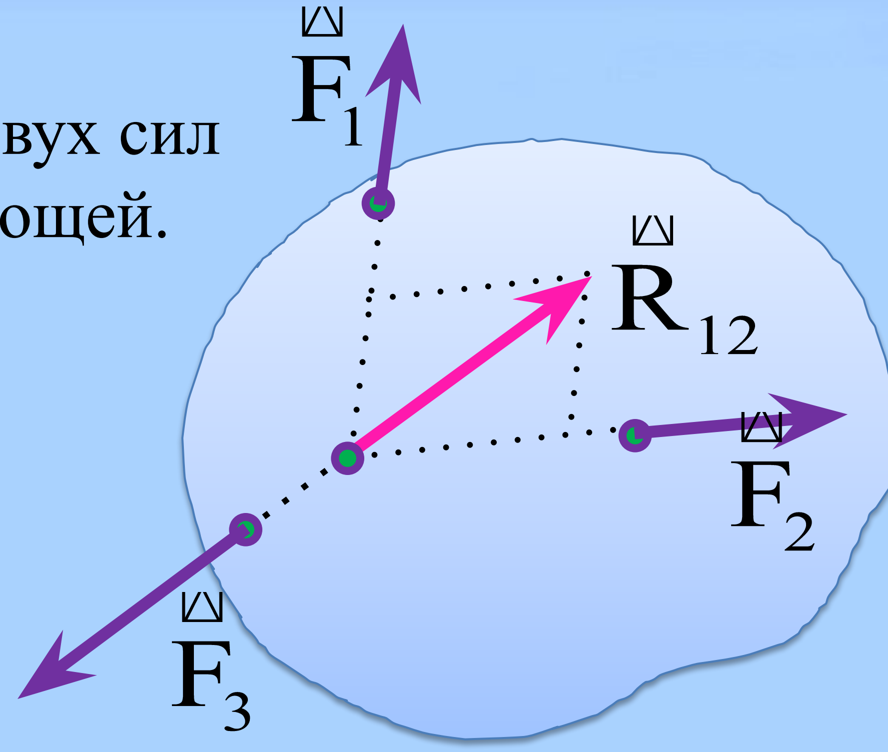
Доказательство

согласно аксиоме 3, действие двух сил можно заменить равнодействующей.

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

исходная система трех сил заменяется двумя:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}_{12}, \vec{F}_3)$$



согласно аксиоме 1,
тело будет находиться в равновесии под действием двух сил, только если…

• Теорема доказана

Алгоритм решения задач статики

Во всех случаях решение задачи алгоритмизируется и состоит из следующих этапов:

1. *Установить, исследование равновесия какого **тела** (точки, системы тел) следует рассмотреть.*
2. *Освободить тело от связей и изобразить действующие на него **активные силы и силы реакций** отброшенных связей.*
3. *Установить, какая **система сил** действует на тело, и сформулировать условия равновесия этой системы.*
4. *Составить **уравнения равновесия.***

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

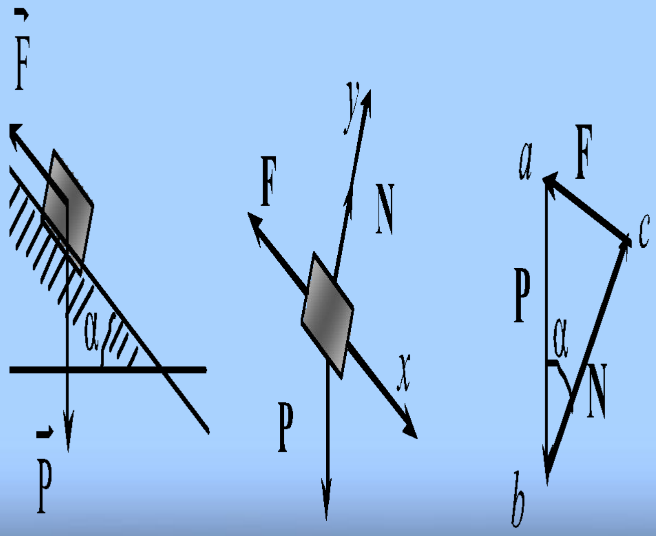
Статически определимые и неопределимые задачи

Определить мы можем не больше неизвестных величин, чем имеется уравнений равновесия.

Если число неизвестных величин не превышает числа уравнений равновесия, то система называется статически определимой, в противном случае – статически неопределимой.

Пример статически определимой задачи

Задача 1. Груз (материальная точка) весом P лежит на гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить величину силы **F**, которую нужно приложить к грузу параллельно плоскости, чтобы удержать его в равновесии. Найти также силу давления груза на плоскость.



Решение задачи 1

Рассмотрим равновесие *груза*. На рисунке **N** – сила реакции гладкой наклонной плоскости. Поскольку груз можно считать материальной точкой, то *силы*, действующие на него, образуют *систему сходящихся сил.* Выберем систему координат с началом в точке пресечения линий действия сил и осью *x*, параллельной наклонной плоскости.

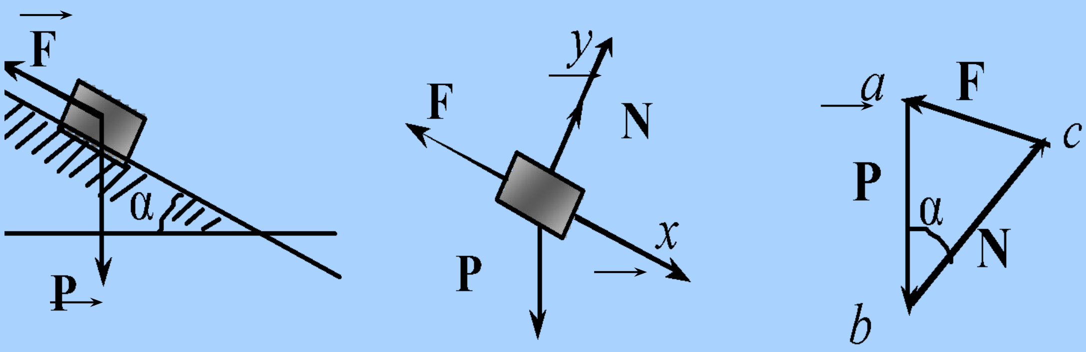


Рис. 2.4

Решение задачи 1

Условие равновесия груза можно записать в виде следующего векторного уравнения

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0$$

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} = 0.$$

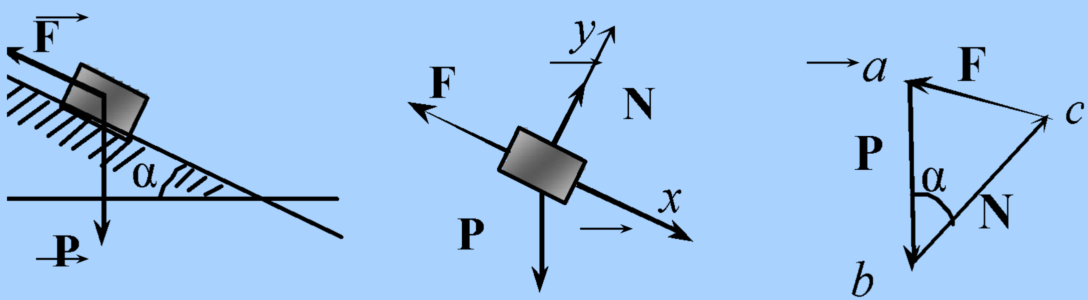


Рис. 2.4

Геометрическое решение задачи 1

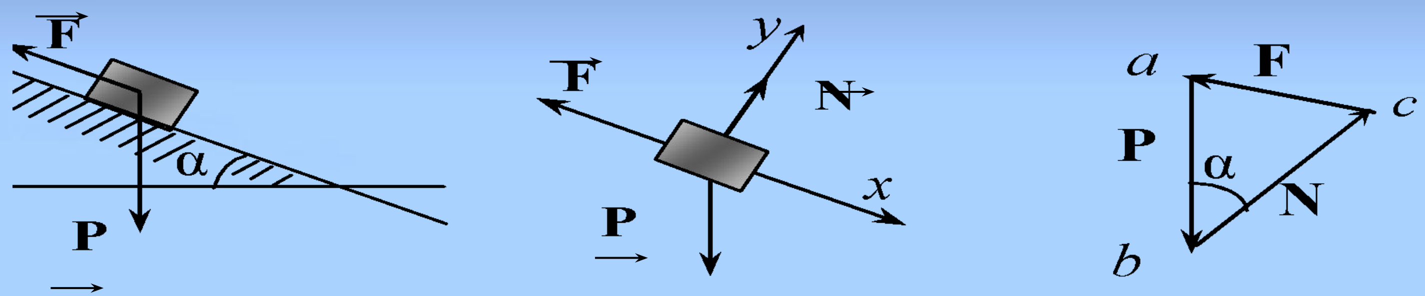
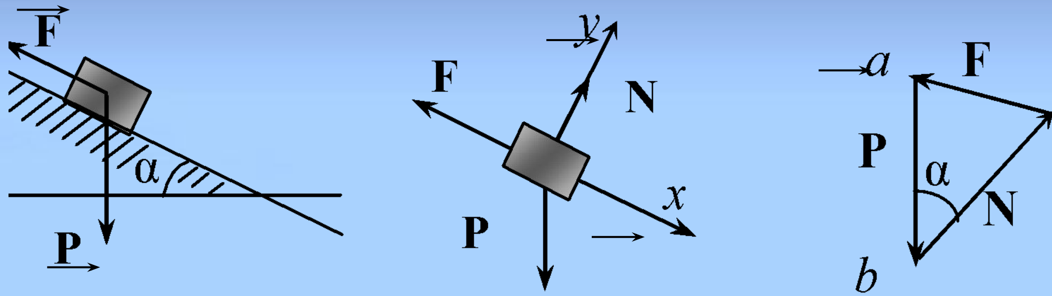


Рис. 2.4

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} = 0.$$

Замкнутый треугольник сил начинаем строить с известной силы **P**. Из конца **P** проводим прямую, параллельную **N**, а из начала **P** – прямую, параллельную **F**. Точка пересечения этих прямых будет концом вектора **N** (и началом вектора **F**). Длины отрезков *bc* и *ca* определяют модули векторов **N** и **F** в выбранном масштабе.

Аналитическое решение задачи 1



$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} = 0.$$

Рис. 2.4

Аналитическое решение получим, составляя уравнения равновесия:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

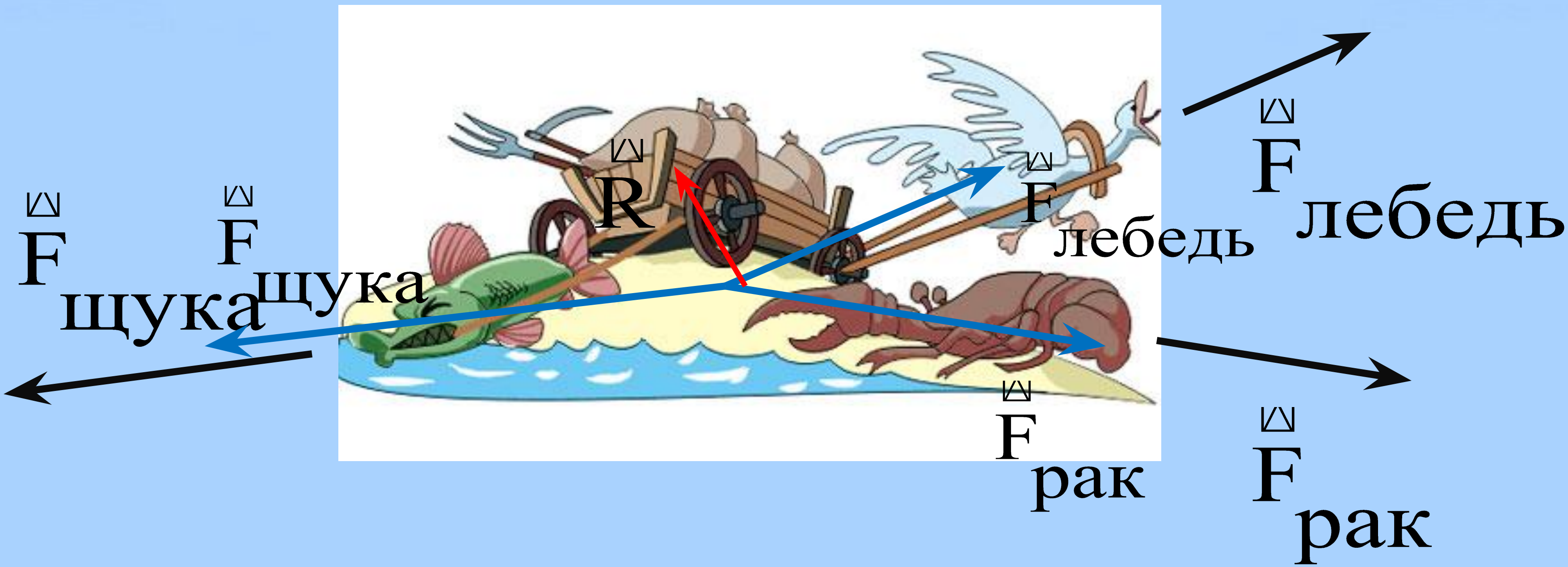
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$-F + P\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F = P\sin\alpha$$

Как определить силу давления груза на поверхность ?

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad N - P\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P\cos\alpha$$

Подведем итоги



$$\vec{R} = \vec{F}_{щука} + \vec{F}_{лебедь} + \vec{F}_{рак}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система сил называется сходящейся?
2. Какие аксиомы статики используются для нахождения равнодействующей ССС и при доказательстве теоремы о трех силах?
3. Сформулируйте условие равновесия тела под действием системы сходящихся сил.
4. Сколько линейно независимых уравнений равновесия можно составить для произвольной и для плоской систем сходящихся сил? Запишите их.
5. Какие задачи называются статически неопределимыми?
6. Сформулируйте геометрическое условие равновесия тела под действием системы сходящихся сил.

Вопросы для самоконтроля

7. Как разложить данную силу на две, у одной из которых задан модуль, а у другой – линия действия?
8. Придумайте (и решите!) по крайней мере две задачи о разложении данной силы на три других, не лежащие в данной плоскости.
9. Вы запомнили алгоритм решения задач статики? Повторите его.

Тема следующей лекции

Система параллельных сил.
Пара сил.