Создание проблемных ситуаций на уроках математики

Разработала учитель математики
МБОУ «СОШ №31» г.Энгельса
Саратовской области
Волосожар Марина Ивановна

Знание только тогда знание,
когда оно добыто усилием собственной мысли, а не памятью.

Л.Н. Толстой

Немного истории

- **Проблемное обучение – это «начальная школа» творческой деятельности.**

- **Проблемное обучение основывается на теоретических положениях американского философа, психолога, педагога Дж. Дьюи (1859-1962).**

- **В России дидактику проблемного обучения разработал И.Я. Лернер.**

- **Сегодня под проблемным обучением понимается такая организация учебных занятий, которая предполагает создание под руководством учителя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению, в результате чего происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей.**

Немного теории

Уровни проблемного обучения :

1 уровень – ученик усваивает приёмы логического мышления репродуктивным методом, следуя образцу рассуждения учителя;

2 уровень – учитель создаёт проблемную ситуацию, указывает на проблему и вовлекает их в совместный поиск путей её решения и в процесс самого решения;

3 уровень – учащиеся формулируют аналоговую неполнозначную проблему и анализируют её вместе с учителем, совместно выдвигают предположения и обосновывают гипотезу, а доказывают и проверяют решения самостоятельно, решаются познавательные задачи;

4 уровень – наличие любых типов проблем и полная самостоятельность в их решении.

Немного теории

Проблемное обучение основано на создании особого вида мотивации – проблемной, поэтому требует адекватного конструирования дидактического содержания материала, который должен быть представлен как цепь проблемных ситуаций.

Технология проблемного обучения реализуется на основе следующих факторов:

– оптимальный подбор проблемных ситуаций и средств их создания;

– отбор ситуаций тесно связан с применением их в повседневной жизни;

– учет особенностей проблемных ситуаций в различных видах учебной работы и в различных классах;

– личностный подход и мастерство учителя, способные вызвать активную познавательную деятельность ребенка

Создание проблемных ситуаций через умышленно допущенные учителем ошибки

- Решаются задачи недостаточными или избыточными исходными данными; с неопределенностью в постановке вопроса; с противоречивыми данными; с заведомо допущенными ошибками; с ограниченным временем решения.

«Обманные задачи»:

- 1. Постройте прямоугольник со сторонами 2, 3 и 5 см.
2. Больший угол треугольника равен 50°. Найдите остальные углы.
3. Две стороны треугольника перпендикулярны третьей. Определите вид треугольника.
4. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 75°. Найдите углы треугольника.
5. Диагональ ромба в два раза больше его стороны. Найдите углы ромба.

«Обманные задачи»:

- Пример 7 кл. Тема «Линейные уравнения с одной переменной».
- Решаю быстро уравнение:
- (5Х+ 8) х 2 – 3 = 19
- 10Х + 16 – 3 = 19
- 10Х = 19 – 16 – 3
- 10Х = 0
- Х = 0
- Естественно при проверке ответ не сходится

«Обманные задачи»:

Проблемная ситуация. Ищут ошибку. Дети решают проблему. Результат - внимательность и заинтересованность на уроке.

- **Пример 8кл. Тема:«Квадратный корень»(Я.Перельман)**

Докажем , что 2•2 =5.

К обеим частям тождества 16-36=25-25 добавим равные числа:

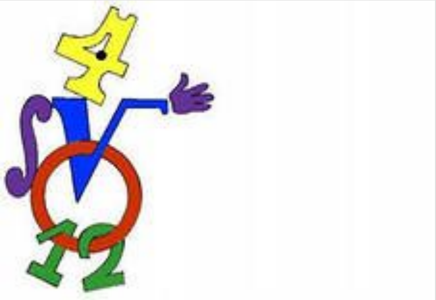
16-36+20,25=25-45+20,25,

Откуда $(4-2,25)^2 = (5- 2,25)^2$

Извлекая корень из обеих частей равенства,получим:

4-2,25 = 5-2,25

Откуда 4=5, или 2•2 =5. Где ошибка?



Создание проблемных ситуаций через использование занимательных заданий

- **Пример №1.7 кл. Тема: «Формулы сокращённого умножения»**
  Преступники украли в банке большую сумму денег. Их поймали, но похищенную сумму установить не удалось. Преступники категорически отказываются назвать её, утверждая, что записали это число в виде степени и зашифровали не только основание, но и её показатель. Экспертам удалось узнать основание степени. Это число 597. Но каким был показатель не говорят. После очередного допроса преступники сказали, что показатель степени является корнем уравнения

  $(2y+1)^2 - 4y^2 = 9$

  $y = 2$

  $597^2 = (600-3)^2 = 600^2 - 2 \times 600 \times 3 + 3^2 = 360000 - 3600 + 9 = 356409$

Создание проблемных ситуаций через использование занимательных заданий

- **Пример №2. 9 кл. Тема «Сумма n-первых членов арифметической прогрессии»**

  Изучение вопроса о сумме n–первых членах арифметической прогрессии в 9-ом классе начинаю с рассказа: "Примерно 200 лет тому назад в одной из школ Германии на уроке математики учитель предложил ученикам найти сумму первых 100 натуральных чисел. Все принялись подряд складывать числа, а один ученик почти сразу же дал правильный ответ. Имя этого ученика Карл Фридрих Гаусс. В последствии он стал великим математиком. Как удалось Гауссу так быстро подсчитать эту сумму?"

  Проблемная ситуация: как найти быстро сумму первых 100 натуральных чисел?

  Решение проблемы (1 + 100) х 50 = 5050

  Последовательность чисел 1, 2, 3,…,100 является арифметической прогрессией. Теперь выводим формулу суммы n-первых членов арифметической прогрессии.

Создание проблемных ситуаций через использование занимательных заданий

Пример №3.5кл.Тема:«Совместные действия сложения, вычитания и умножения десятичных дробей»

Игра «Поле чудес»

Решите примеры, найдите в таблице соответствующие полученному ответу буквы и составьте слова.

Создание проблемных ситуаций через использование занимательных заданий

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 1920 21 22 23 24 25 26
  Ч ЕСТНОСТЬ К Р А С И Т З В А Н И Е Л Ю Б О Е
  ШИЛЛЕР

А	Б	В	Е	З	И	К	Л
26,05	6	61,6	1,02	9,38	13,94	3,16	195
Н	О	Б	Р	С	Т	Ч	Ю
2,21	10,5	4,81	21,48	4,29	6,06	16	21

1)3,2•2 +8,32; 6)(24,3-16,8)•1,4; 11)16,8+1,3•3,6; 16)12,6-1,4•2,3;
2)(3,6+1,05)•0,2; 7)4,8-0,17•3; 12)47,4-6,7•3,5; 17)0,8•26+3,4•12
3)(6,7-3,4)•1,3; 8)43,41-8,3•4,5; 13)(6,7-3,4)•1,3; 18)12,82+6,3•2,1
4)4,1•0,6+3,6; 9)6,7•2,3-10,6; 14)3,4•(8,7-4,6); 19)(3,7-2,4)•1,7
5)(3,7-2,4)•1,7; 10)4,14-1,4•0,7 15)0,9•7,02-0,258 20)3,4•(8,7-4,6)

Создание проблемных ситуаций через решение задач , связанных с жизнью

- **Пример №1. 5 кл. Тема «Периметр прямоугольника»**
- Семья Димы летом переехала в новый дом. Им отвели земельный участок прямоугольной формы. Папа решил поставить изгородь. Он попросил Диму сосчитать сколько потребуется штакетника, для изгороди, если на 1 погонный м. изгороди требуется 10 штук? Сколько денег потратит семья, если каждый десяток стоит 50 рублей.
- **Проблемная ситуация: нужно найти длину изгороди (периметр прямоугольника).**

9 класс. Тема «Решение задач на смеси и сплавы»

- **<u>Задача</u>.** Сколько нужно добавить воды в сосуд, содержащий 200 г 70 % -го раствора уксусной кислоты, чтобы получить 8 % раствор уксусной кислоты?
- Решение.

Наименование веществ, смесей	Процентное содержание вещества	Масса раствора (г)	Масса вещества (г)
Исходный раствор	70% = 0,7	200	0,7•200
Вода	-	x	-
Новый раствор	8% = 0,08	200+x	0,08 (200+x)

- Анализируя задачу составляем уравнение:

$$0{,}08(200 + x) = 0{,}7 \cdot 200$$

$$16 + 0{,}08x = 140$$

$$0{,}08x = 124$$

$$x = 1550$$

Ответ :1,55 кг воды.

Создание проблемных ситуаций через решение задач , связанных с жизнью

- **Пример. 8кл. Тема «Площадь прямоугольника».**

- Родители решили поменять входную дверь и заказали в фирме изготовить металлическую дверь. Им предоставили платёжный документ, в правильности которого папа усомнился, а именно в стоимости покраски двери. Попросил своего сына самому рассчитать стоимость данной работы.

Проблемная ситуация : нужно знать площадь двери (площадь прямоугольника) . Причём норма краски на 1 кв.м и стоимость работы покраски 1кв. м даны в документе.

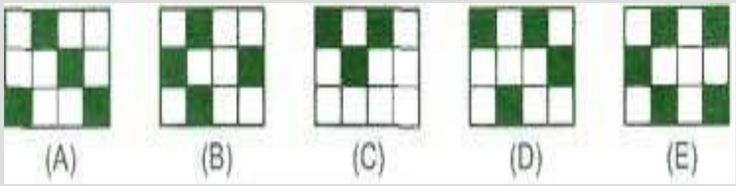
Создание проблемных ситуаций через выполнение практических заданий

- **7 класс. Темы: «Построение треугольника по трем элементам», «Неравенство треугольника».**
  Теорему о неравенстве треугольника ввожу при изучении темы «Построение треугольника по трем элементам», решая задачу на построение треугольника по трем его сторонам. Предлагаю ученикам построить с помощью циркуля и линейки треугольник со сторонами: а) 5см; 6см; 7см; б) 9см; 5см; 6см; в) 1см; 2см; 3см; г) 3см; 4см; 10см.
  Ребята работают самостоятельно и приходят к тому, что построить треугольник в последних двух примерах не удается.
- **Возникает проблема:** «При каких же условиях существует треугольник»? Чертежи, полученные учащимися при решении этой задачи дают возможность легко сделать вывод: «Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон». Доказываем полученную теорему.

Создание проблемных ситуаций через решение задач на сравнение и внимание

- **Задачи на внимание 5-8 классы**
- У Гарри Поттера есть волшебные очки, в которых он видит все зеленое - белым, а все белое - зеленым.

- Гарри посмотрел через эти очки на прямоугольник, изображенный справа.
- Что он увидел?



Создание проблемных ситуаций через решение задач на сравнение и внимание

- **Задача . Проверим продавца**

  Покупатель взял в магазине пакет молока стоимостью 3,45 шекеля, коробку творога стоимостью 3,6 шекеля,
- 6 пирожных и 3 килограмма сахара.
- Когда кассир выбил чек на 29,6 шекеля, покупатель потребовал проверить расчет и исправить ошибку.
- Как определил покупатель, что счет неверен ?

Создание проблемных ситуаций через решение задач на сравнение и внимание

- **Пример. 8кл. Тема «Осевая и центральная симметрия».**

а) Какие из следующих букв имеют центр симметрии: А, О, М, Х, К ?

б) Какие из следующих букв имеют ось симметрии : А, Б, Г, Е, О, F?

Создание проблемных ситуаций через решение задач на сравнение и внимание

- При решении сложных задач группы С ЕГЭ по математике иногда надо уметь сравнивать значения. При кажущейся простоте эти задачи порой вызывают большие трудности, так как не удается ограничиться банальным вычитанием или возведением в определенную степень. Что больше?

$\log_3 2$ $\log_4 3$

$\log_5 4$ $\log_7 6$

Создание проблемных ситуаций через решение задач на сравнение и внимание

- При кажущейся простоте трудно найти школьника, который сумел бы сразу решить эту задачу. Тогда надо предложить ему провести сравнение.
- Намекнуть, что решение этой задачи такое же как в предыдущем случае. Попросить школьника усмотреть закономерность. Школьник должен обратить внимание на то, что основание во всех случаях на 1 больше, чем значение под логарифмом.
- Один из способов решения этих двух задач – исследование функции

$$f(x) = \log_{x+1} x$$

Создание проблемных ситуаций через противоречие нового материала старому, уже известному

- **Пример№1. 7 кл. Тема «Формулы сокращённого умножения»**
- Вычисляем $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2 = 100$
- $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2 = 9 \times 16 = 144$
- $(5 : 6)^2 = 5^2 : 6^2 = 25 : 36$
- $(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ Попробуйте сосчитать по-другому.
- $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$
- **Проблемная ситуация создана. Почему разные результаты?**
- $(3 + 4)^2 \neq 3^2 + 4^2$

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **Пример№1.8кл.Тема:«Квадратные уравнения»**
- Решить уравнение $3x^2 + 2x - 1 = 0$, используя различные способы.
- **1 способ**. ***По общей формуле .***

$D = b^2 - 4ac$; $D = 4 + 12 = 16 = 4^2$ 0 - уравнение имеет 2 корня

x = = -1 ; 1/3. **Ответ: -1; 1/3.**

2способ *По формуле с чётным коэффициентом b .*

$D_1 = (b/2)^2 - ac$; $D_1 = 1 + 3 = 4 = 2^2$ 0 – уравнение имеет 2 корня

x = = -1; 1/3. **Ответ: -1; 1/3.**

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **3 способ.** ***По теореме Виета***

$x_1 + x_2 = - b$; $x_1 + x_2 = -2/3$;

$x_1 * x_2 = c$; $x_1 * x_2 = -1/3$

Значит $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$. **Ответ : -1; 1/3.**

4 способ. ***Из условия , если а + с = b, то*** $x_1 = -1$; $x_2 = -c / a$

а + с = 3 + (-1) = 2 = b, значит $x_1 = -1$; а $x_2 = 1/3$. **Ответ: -1 ; 1/3.**

(Записать и обвести в рамочку)

если а + в + с = 0, то $x_1 = 1$, а $x_2 = с / а$;

если а + с = в, то $x_1 = - 1$, а $x_2 = - с / а$.

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **5 способ**. ***Выделение полного квадрата.***
- $3x^2 + 2x - 1 = 0$ / :3;

  $x^2 + 2/3x - 1/3 = 0$;

  $(x^2 + 2 * 1/3 * x + 1/9) - 1/9 - 1/3 = 0$;

  $(x + 1/3)^2 - 4/9 = 0$;

  $(x + 1/3 - 2/3) (x + 1/3 + 2/3) = 0$;

  $(x - 1/3) (x + 1) = 0$;

  $x - 1/3 = 0$ или $x + 1 = 0$;

  $x = 1/3$ $x = -1$. **Ответ: -1; 1/3.**

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- <u>**6 способ**</u>. ***Метод переброски старшего коэффициента***

$3x^2 + 2x - 1 = 0$; / *3 (домножаем на старший коэффициент, чтобы первое слагаемое было полным квадратом)

$9x^2 + 6x - 3 = 0$;

$(3x)^2 + 2 * (3x) - 3 = 0$;

Пусть $3x = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$;

$t_1 = 1$, $t_2 = -3$;

$3x = 1$; $3x = -3$;

$x = 1/3$, $x = -1$. **Ответ: -1; 1/3.**

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **7 способ**. ***Приведение к виду*** $(f(x))^2 = (g(x))^2$.

$3x^2 + 2x - 1 = 0;$

$4x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0;$

$4x^2 = x^2 - 2x + 1;$

$(2x)^2 = (x - 1)^2;$

$|2x| = |x - 1|;$

$2x = x - 1$ $2x = 1 - x;$

$x = -1$, $x = 1/3$. **Ответ: -1; 1/3.**

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **8 способ**. ***Разложение на множители способом группировки .***

  $3x^2 + 2x – 1 = 0;$

  $3x^2 + 3x – x - 1 = 0;$

  $3x (x + 1) – (x + 1) = 0;$

  $(x + 1) (3x – 1) = 0;$

  $x + 1 = 0 , 3x – 1 = 0;$

  $x = -1, x = 1/3$. **Ответ: - 1; 1/3.**

- **9 способ**. ***Уменьшение степени уравнения(слайд 12 презентации 2).***

  Подбором находим, что $x_1 = -1$ - корень уравнения. Разделим квадратный трёхчлен

  $3x^2 + 2x – 1$ на $x + 1$

  $3x^2 + 2x – 1 = (x + 1) (3x – 1) , x_1 = - 1 , x_2 = 1/3$. **Ответ: - 1; 1/3**

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **10 способ**. ***Графический.***

$3x^2 = -2x + 1.$

Строим в одной системе координат графики функций :

$y = 3x^2$ и $y = -2x + 1.$

Абсциссы точек пересечения графиков функций - корни уравнения:

x_1 -1, x_2 1/3.

Это неточный способ решения уравнений.

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **7кл.Тема:«Решение задач»**
- **Задача 1.** «Который теперь час?» –спросил Андрей у отца. «А вот сосчитай: до конца суток осталось втрое меньше того времени, которое прошло от их начала». Который час был тогда?
- **Решение 1 (арифметический метод).**
- Поскольку оставшаяся часть втрое меньше прошедшей , то время , составляющее сутки , можно разделить на 1+3 =4 части. Поскольку одна часть составляет 2464 =6 часов и втрое меньше прошедшей , то прошедшая часть суток составляет 24-6 = 18 часов.

Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи

- **Решение 2 (алгебраический метод).**

Пусть x часов прошло от начала суток, тогда $(24 - x)$ часов осталось до конца суток. Поскольку оставшаяся часть втрое меньше прошедшей, то получим уравнение $x = 3 \cdot (24 - x)$, решив которое найдём $x = 18$ часов.

Создание проблемных ситуаций через выполнение небольших исследовательских заданий

Пример. 5кл. Тема «Длина окружности».

Ещё древние греки находили длину окружности по формуле С = П*d.
d – диаметр окружности. Вопрос : что же такое П?
1.Опоясать стакан ниткой, распрямить нитку, длина нитки примерно равна длине окружности стакана. Чтобы получить более точный результат, нужно это проделать несколько раз.
Занесите данные в следующую таблицу:

С1	С2	С3	С сред.	Д	П

2. Измерьте диаметр стакана линейкой. Данные занесите в табл.
3. Найдите значение П, как неизвестного множителя.
Исследование проведено. Проблема решена.

Создание проблемных ситуаций через выполнение небольших исследовательских заданий

- **6 класс « Зоопарк » на координатной плоскости**
- **Конь.**

В начале координат стоит конь. Он ходит, как шахматный (только не по центрам клеток , а по узлам координатной сетки; покрасьте узлы координатной сетки в шахматном порядке.

Опишите , записывая координаты точек , один из маршрутов коня из точки с координатами (0;0) в точку (-1;1).

Придумайте какой-нибудь маршрут из 5 ходов, начинающийся в точке (0;0) и проходящий через точки (5;0) и (3;4) с остановками в этих точках.

Может ли конь когда-нибудь попасть в точку (4,5;3) ?

Может ли конь попасть из точки (0;0) в точку (1;1) ровно за 1995 ходов?

Создание проблемной ситуации через выполнение небольших исследовательских заданий

- **Слон**

В начале координат стоит слон. Он может ходить, как шахматный слон (только не по центрам клеток , а по узлам координатной сетки).

Опишите один из кратчайших (по числу ходов) маршрут слона из точки (0;0) в точку (5;-3). Почему меньшего числа ходов слону не хватит? Сколько таких кратчайших маршрутов?

Опишите маршрут из четырех ходов , начинающийся в точке (0;0) и проходящий (в любом порядке) через точки (4;-2); (10;4) и (-1;3).

Можно ли из точки (0;0) попасть слоном в точку (1;0)?

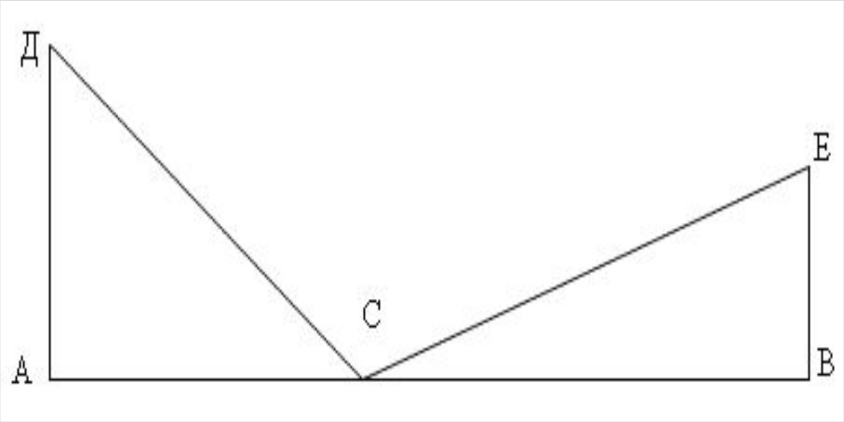
Покажите , в какие точки можно попасть слоном из начала координат , а в какие – нельзя (покрасьте их в разные цвета).

Если из (0;0) можно попасть в точку (x;y) , то за сколько ходов это наверняка удастся сделать?

Создание проблемных ситуаций , позволяющих делать обобщения , выводы ,сопоставлять факты , ставить конкретные вопросы.

- **Пример 1. 8кл.Тема:«Теорема Пифагора»**

На охоте с двух отвесных скал два охотника заметили козла и одновременно в него выстрелили, причём стрелы достигли цели одновременно. Охотники одновременно начали спуск к добыче с одинаковой скоростью см. рис.

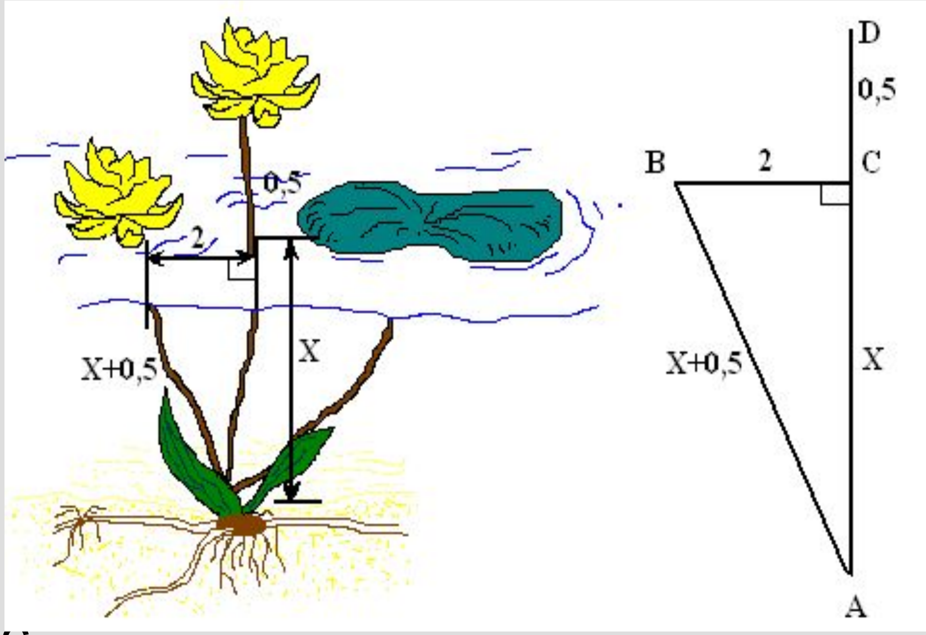


- **Проблемная ситуация возникает при построении математической модели практической задачи.** Она рассматривается с помощью вопросов. Как на чертеже изображаются:
- 1) скалы?
  2) расстояние между ними?
  3) путь каждой стрелы?
  4) путь каждого охотника?
  5) что означает факт, что стрелы достигли цели одновременно?
- Анализ задачи позволяет заключить, что на данном этапе задачу решить нельзя, так как невозможно использовать равенство отрезков ДС и СЕ, которые являются гипотенузами прямоугольных треугольников. Если бы зависимость между катетами и гипотенузой в прямоугольном треугольнике была известной, то можно было бы в каждом треугольнике выразить гипотенузу через катеты и приравнять полученные выражения.

- **ВОЗНИКАЕТ ПРОБЛЕМА:**
- Существует ли зависимость между гипотенузой и катетами в прямоугольном треугольнике, и, если она существует, то как она формулируется?
  Для решения этой проблемы можно предложить учащимся задание по группам:
  Построить прямоугольные треугольники с катетами3 и 4, 12 и 5, 6 и 8, 8 и 15 и измерить гипотенузу. Результаты заносятся в таблицу. Далее выдвигаются и обсуждаются различные гипотезы.

Древнеиндийская задача

Над озером тихим
С полфута размером
Высился лотоса цвет.
Он рос одиноко,
И ветер порывом
Отнёс его в сторону. Нет
Боле цветка над водой.
Нашёл же рыбак его
Ранней весною
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
"Как озера вода здесь глубока?"



- **Какова глубина в современных единицах длины (1 фут приближённо равен 0,3 м) ?**

Решение.

Выполним чертёж к задаче и обозначим глубину озера AC =X, тогда AD = AB = X + 0,5 .

Из треугольника ACB по теореме Пифагора имеем $AB^2 – AC^2 = BC^2$,

$(X + 0,5)^2 – X^2 = 2^2$,

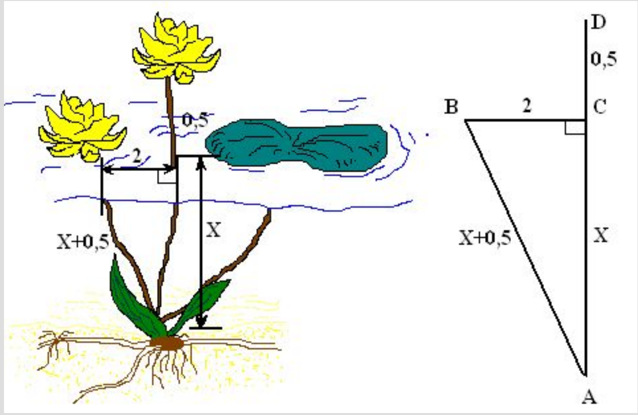
$X^2 + X + 0,25 – X^2 = 4$,

X = 3,75.

Таким образом, глубина озера составляет 3,75 фута.

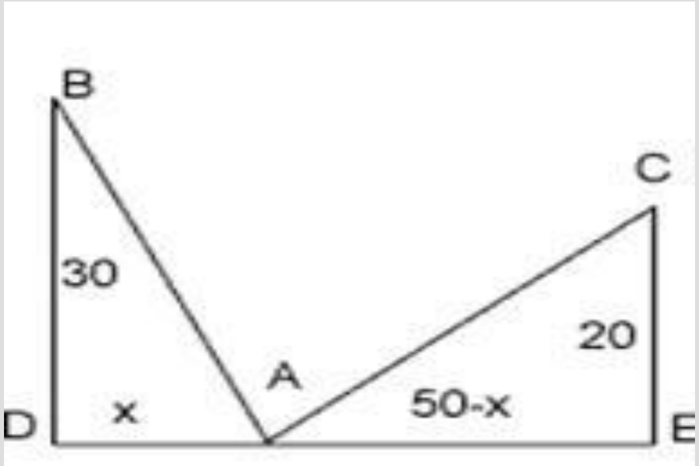
3, 75 • 0,3 = 1,125 (м)

Ответ: 3,75 фута или 1, 125 м.



Задача арабского математика XI в

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной 30 локтей, другой – 20 локтей. Расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами. Они кинулись к ней разом и достигли её одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?



Сильные стороны проблемного обучения

- Способствует развитию познавательной активности, осознанности знаний, предупреждает появление формализма, бездумности.
- Обеспечивает более прочное усвоение знаний;
- Развивает аналитическое мышление.
- Способствует сделать учебную деятельность для учащихся более привлекательной, основанной на постоянных трудностях.
- Ориентирует на комплексное использование знаний.
- Приучает учащихся сталкиваться с противоречиями, разбираться в них, искать решение.

Слабые стороны проблемного обучения

- Значительно большие расходы времени на изучение учебного материала;
- Недостаточная эффективность их при решении задач формирования практических умений и навыков, особенно трудового характера, где показ и подражание имеют большое значение
- Слабая эффективность их при усвоении принципиально новых разделов учебного материала, где не может быть применен принцип апперцепции (опоры на прежний опыт);
- При изучении сложных тем, где крайне необходимо объяснение учителем, а самостоятельный поиск оказывается недоступным для большинства школьников.

Спасибо за внимание!