МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

- Лектор: Бутырин Владимир Иванович
- К.т.н., доцент.
- Телефон кафедры 346-07-33.
- Корпус 1, ком. 317.

1. МНОЖЕСТВА

- 1.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА.
- ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ.

Логические символы.

- $\in$- знак принадлежности $(a \in A)$
- $\forall$ - квантор всеобщности $(\forall x \in M)$
- $\exists$ - квантор существования $(\exists x \in M :)$
- $\Rightarrow$- знак логического следования $(a \Rightarrow b)$
- $\Leftrightarrow$- символ эквивалентности

$$(\forall \Delta ABC : AC = BC \Leftrightarrow \angle A = \angle B)$$

Множества. Способы задания.

$$A \overset{def}{=} \{a, b, c, d\}; \qquad A = \{x \mid P(x)\};$$

- {a} - одноэлементное множество;
- $\varnothing$- пустое множество
- Действительные корни уравнения $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- $\exists$ множества конечные и бесконечные.
- Если **A** - конечное множество, то число его элементов |**A**| - мощность множества.

Отношения между множествами.

- **Определение 1.1.** Множества **А** и **В** называются равными, если каждый элемент множества **А** является элементом множества **В** и, наоборот, каждый элемент множества **В** является элементом множества **А**.
- Обозначают **А=В**.

Пример:

$$A = \{\, x \mid (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = 0 \,\},$$

$$B = \{\, x \in N \mid x < 4 \,\}.$$

$$A = B$$

Свойства равенства:

- **A=A** (рефлексивность);
- **A=B, B=C ⇒ A=C** (транзитивность);
- **A=B ⇒ B=A** (симметричность).

- Неравенство множеств обозначают
- **A ≠ B.**

Определение 1.2.

- Множество **A** **(A ≠ ∅)** называется подмножеством множества **B** **(B ≠ ∅)**, если каждый элемент множества **A** является элементом множества **B**.

- **Обозначение: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$.**
- Если **$A \subseteq B$** и **$A \neq B \Rightarrow A \subset B$.**
- **Пример: $N \subset Z \subset Q \subset R$.**

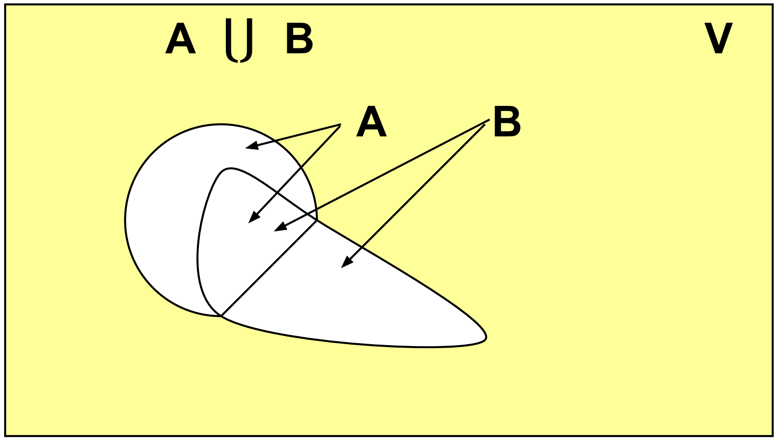
1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

- **V –** основное или универсальное множество.
- 1) В планиметрии **V =** R^2
- 2) Для функций действительной переменной **V = R**.
- **Определение 1.3.** Объединением множеств **A** и **B** называется множество **A** $\bigcup$ **B**, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A** или **B** (или обоим одновременно).

$$A \bigcup B \overset{def}{=} \left\{ x \middle| x \in A \vee x \in B \vee \left(x \in A \wedge x \in B \right) \right\}$$

- **Пример: A = {2,3,4,6}, B = {1,2,3,4,5,6} ⇒ A$\bigcup$B = {1,2,3,4,5,6}.**

Диаграмма Эйлера-Венна.



Свойства объединения множеств.

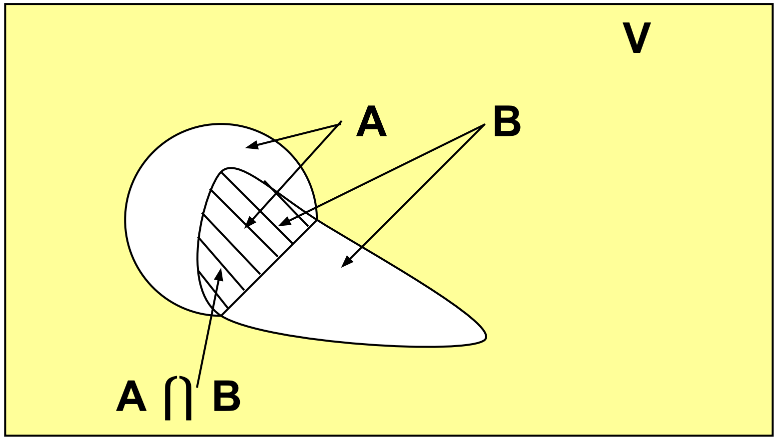
- **1) $A \bigcup B = B \bigcup A$** (коммутативность),
- **2) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$** (ассоциативность).

- Очевидно
- **$A \bigcup A = A$, $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcup V = V$.**

Определение 1.4.

- Пересечением множеств **A** и **B** называется множество **A ⋂ B**, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно.
- $\mathbf{A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}}$.

Диаграмма Эйлера-Венна.



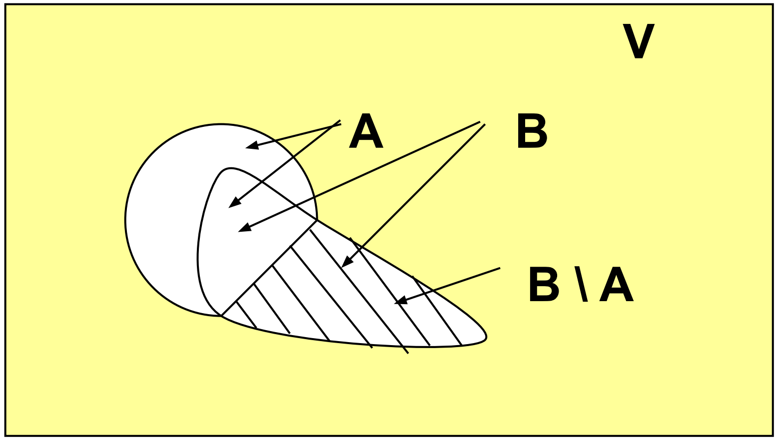
Свойства пересечения множеств.

- **1)** $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$ (коммутативность),
- **2)** $\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$ (ассоциативность).
- Очевидно, что
- $\mathbf{A \cap A = A}$, $\mathbf{A \cap \varnothing = \varnothing}$, $\mathbf{A \cap V = A}$.
- Операции объединения и пересечения подчиняются дистрибутивным законам:
- $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$,
- $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

Определение 1.5.

- Разностью двух множеств **B** и **A** называется множество **B \ A**, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат **B**, но не принадлежат **A**.
- $$\mathbf{B \setminus A = \{ x \mid x \in B \land x \notin A \}}.$$

Диаграмма Эйлера-Венна.



Определение 1.6.

- Разность **V \ A** называется дополнением множества **A** до универсального множества **V** и обозначается $\overline{A}$

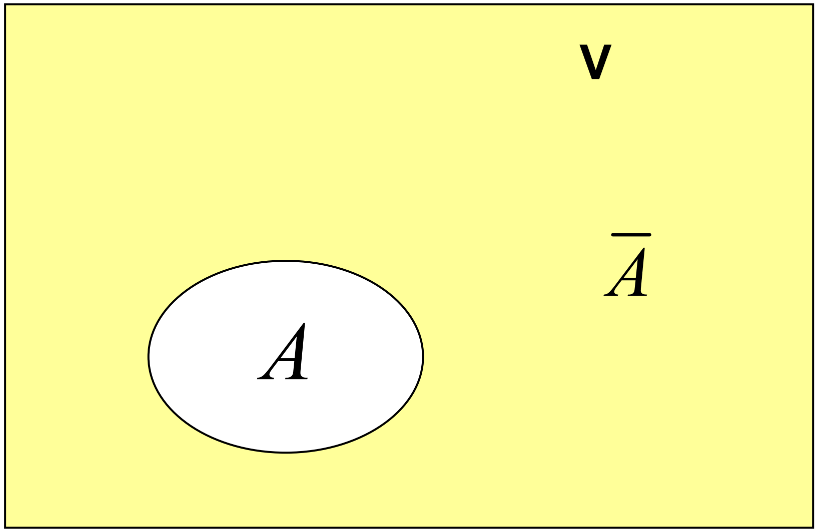
$$\overline{A} \overset{def}{=} V \setminus A = \{\, x \mid x \notin A \,\}.$$

- **Примеры:**

$$A \cup \overline{A} = V; \quad A \cap \overline{A} = \varnothing; \quad \overline{\overline{A}} = A;$$

$$\overline{\varnothing} = V; \qquad \overline{V} = \varnothing.$$

Диаграмма Эйлера-Венна:



- Пара элементов **(x ; y), x ∈ A, y ∈ B** называется упорядоченной, если указан порядок записи элементов **x** и **y.**

- Считается, что

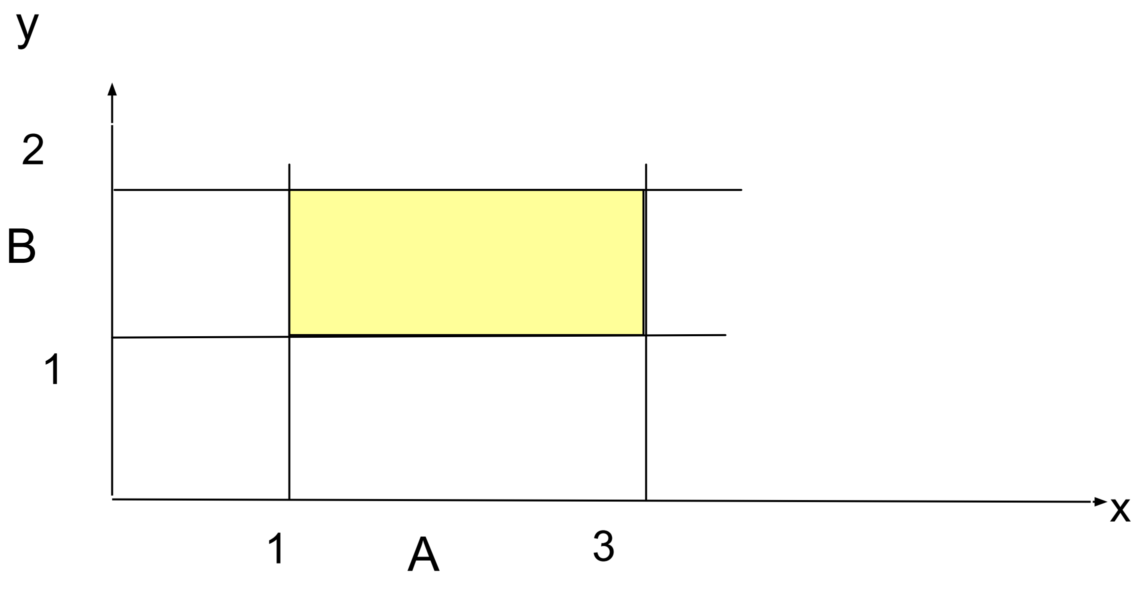
$$\left(x_1 ; y_1 \right) = \left(x_2 ; y_2 \right) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \, , \, y_1 = y_2 \, .$$

Определение **1.7.**

- Декартовым произведением двух множеств **A** и **B** называется множество, обозначаемое **A × B**, состоящее из всевозможных упорядоченных пар **(x ; y).**

- $\mathbf{A \times B = \{ (x ; y) \mid \forall\, x \in A ,\ \forall\, y \in B \}}$.

y



1.3. ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МНОЖЕСТВ.

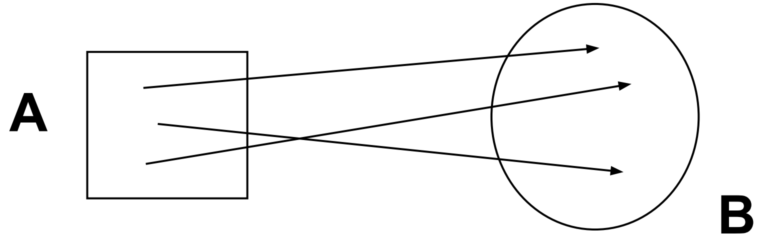
- Пусть **A** и **B** - произвольные множества.
- Пусть **f** - закон (правило) по которому $\forall$ $\mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{B}$.
- Говорят, что задано отображение **f** **A** в **B** или оператор **f** **A** в **B**.
- Обозначение: $\mathbf{f} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ или $A \xrightarrow{f} B$.
- **b –** образ элемента **a** (обозначают **f(a)**);
- **a** – прообраз элемента **b = f(a).**

Определение отображения:

- $\mathbf{f : A \to B \Leftrightarrow \forall a \in A \;\; \exists b \in B : \; b = f(a).}$
- Множество образов всех элементов **a ∈ A** при отображении **f** называют образом множества **A** при этом отображении и обозначают:
- $$\mathbf{f(a) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset B.}$$
- Задание отображения – это задание тройки **(A, f, B).**

Определение 1.8.

- Отображение **f : A** → **B** называют взаимно однозначным или биективным, если каждый элемент **b ∈ B** является образом только одного элемента **a ∈ A.**



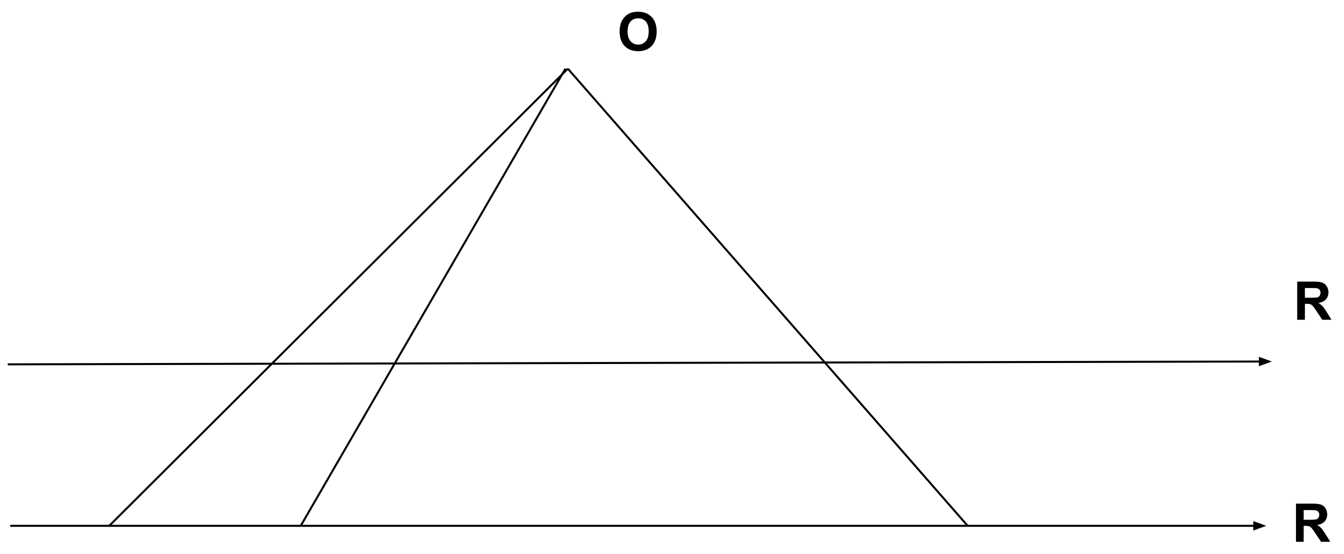
ЛЕКЦИЯ 2

- 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

- **f** – взаимно однозначное отображение $\Leftrightarrow$ $\forall$ **b** $\in$ **B** $\exists$ **a** $\in$ **A** **: b = f (a)**
  $$\forall a_1, a_2 \in A \;\; a_1 \neq a_2 \Rightarrow f\left(a_1\right) \neq f\left(a_2\right).$$

- Если **f** - взаимно однозначное отображение, то можно говорить об обратном отображении.

Пример:



Определение 1.10.

- Два множества **A** и **B** называются эквивалентными (равномощными), если $\exists$ хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

- **Свойства эквивалентности:**
- 1) $\mathbf{A \sim A \quad \forall\, A}$ (рефлексивность);
- 2) $\mathbf{A \sim B \Rightarrow B \sim A \quad \forall\, A, B}$ (симметричность);
- 3) $\mathbf{A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C \quad \forall\, A, B, C}$ (транзитивность).
- Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел является счетным.
- Если множество счетно, то его элементы можно занумеровать.

1.4. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА.

- **Множество натуральных чисел N.**
- **N = {1, 2, 3, …}.**
- Свойства:
- 1) $\forall n_1, n_2 \in N \Rightarrow n_1 + n_2 \in N, n_1 \cdot n_2 \in N$
- выполняются: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность;
- 2) деление и вычитание не определены;
- 3) **1 ∈ N;**
- 4) **n ∈ N ⇒ n + 1 ∈ N;**
- 5) если **M ⊆ N, 1 ∈ M, n ∈ M** и **(n + 1) ∈ M,** то **M = N** (аксиома индукции);
- 6) **N ⊂ Z** счетно и бесконечно.

Множество целых чисел **Z.**

- **Z = { …, -2, -1, 0, 1, 2, …}.**
- Свойства:
- Определены операции сложения, умножения, вычитания; Не определено деление;
- **Z** – упорядоченно, т.е. имеет место

$$p_1 < p_2 \vee p_1 = p_2 \vee p_1 > p_2;$$

- **Z** – счетно и бесконечно;
- **N ⊂ Z ⊂ Q.**

Множество рациональных чисел **Q.**

- **Q = { q = p / n | p ∈ Z , n ∈ N }.**
- Свойства:
- Определены все арифметические операции;
- **Q** – упорядоченно;
- **Q** – плотно, т. е.
- $\forall q_1, q_2 \in Q \ \exists q \in Q: \ q_1 < q < q_2.$
- **Q** – счетно и бесконечно;
- **N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R.**

Множество действительных чисел **R.**

- Свойства:
- **R** – упорядоченно;
- **R** –бесконечно;
- **N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R.**

2.1 ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ.

- Пусть **D –** произвольное подмножество действительных чисел **($D \subseteq R$).** Если каждому числу **$x \in D$** поставлено в соответствие некоторое единственное вполне определенное действительное число **$y=f(x)$**, то говорят, что на множестве **D** определена числовая функция **f.** Множество **D** называют областью определения функции, а множество **$E=\{y \in R \mid y=f(x), x \in D\}$** множество значений функции.

Термины функция, отображение, преобразование – синонимы.

$$D \xrightarrow{f} E$$

- Обозначения: **y=f(x); f: D→E;**
- В данной главе рассматриваются функции одной переменной **D⊆R; E⊆R.**
- **Способы задания функций:**
- Аналитический, табличный, графический, программный.

Аналитический способ задания функций.

- С помощью формул

$$y = (\cos x + \ln x)/\sin x.$$

- Частное значение функции:

$$f(x_0) \text{ или } y\big|_{x=x_0}.$$

- Область определения либо указывают **D(f)=[1;2]**, либо определяют.
- В последнем случае говорят об естественной области определения функции.

Пример:

$$y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$D(f) = (-2; 2), \quad E(f) = (0{,}5; \infty).$$

Составные функции:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Неявно заданные функции:

- **F(x,y)=0**
- Если уравнение можно разрешить относительно **y,** то приходим к явно заданной функции.
- **Пример:**
- **3x-y+2=0, y=3x+2.**

Табличный способ задания функций.

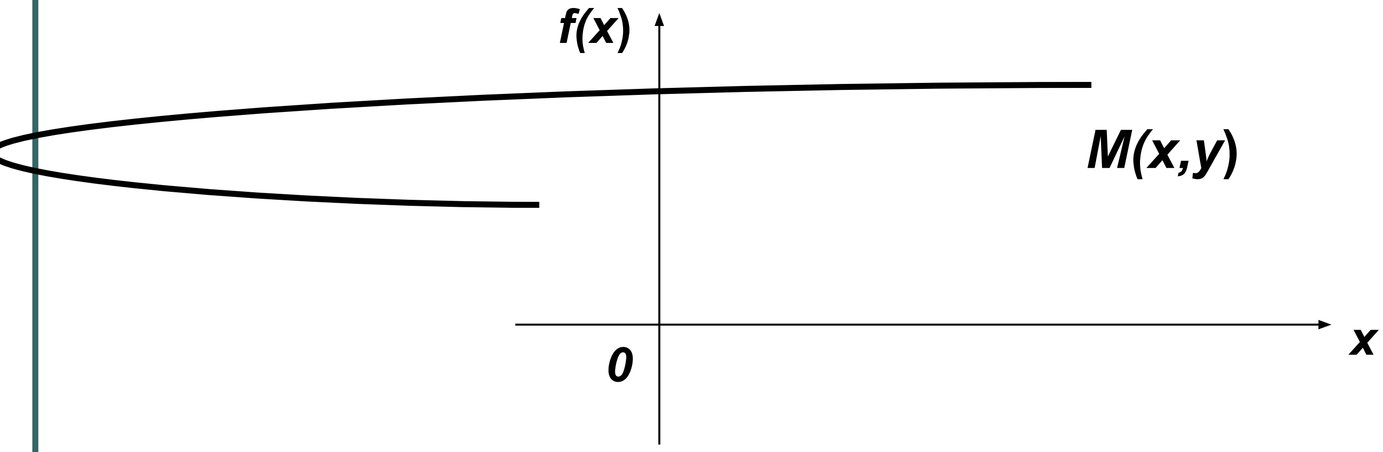
$$x_1, \ x_2, \ldots, x_n$$

$$y_1, \ y_2, \ldots, y_n$$

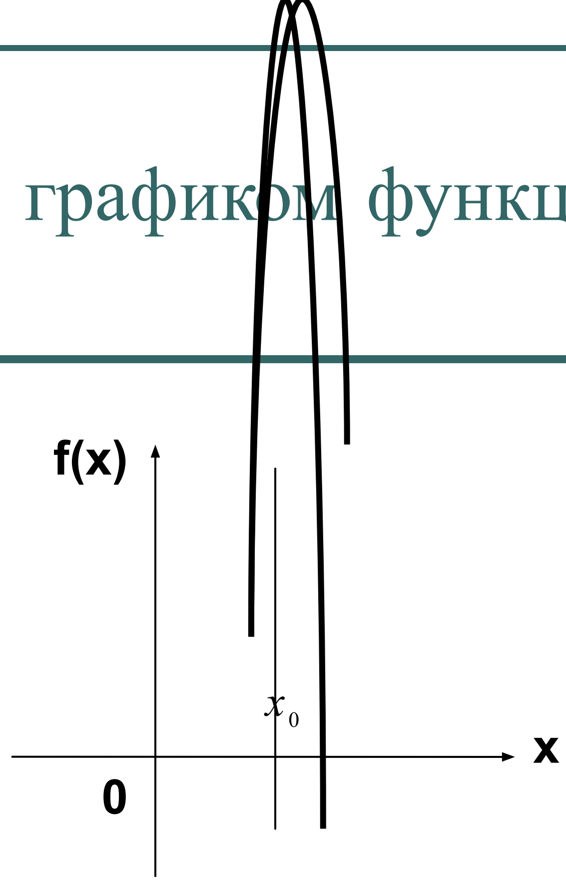
- Примеры: таблицы **ln, sin** и т. д.
- **+** Точное значение при x_i.
- \- Необходимость
- интерполирования.

Графический способ задания функций.

$$\Gamma = \left\{ M\left(x, y \right) \in R^2 \mid y = f\left(x \right) \right\}.$$



Не является графиком функции:



- **+** Наглядность.
- **-** Неудобность для применения математического аппарата.

2.2 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ.

Начальный этап исследования функции.

- 1) Нули **f(x)=0** и знак функции на множестве **x∈D(f).**
- 2) Четность **⇔ ∀ x∈D(f): (-x∈D(f)) ⋂ (f(-x)=f(x));** нечетность **⇔ ∀ x∈D(f): (-x∈D(f)) ⋂ (f(-x)=-f(x)).**
- **Примеры:** $f(x)=x^2 -$ четная,

  $f(x)=x^3 -$ нечетная.
- Существуют функции общего вида.
- 3) Периодичность: **f(x)=f(x-T)=f(x+T). T** – период.
- **f(x)** – периодическая **⇔ ∃ T≠0: ∀ x∈D(f): (x±T) ∈D(f) ⋂ f(x±T)=f(x).**

- 4) Монотонность: монотонно возрастающая, если
$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right);$$
- монотонно убывающая, если
$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right).$$
- 5) Ограниченность:
- ограниченная сверху **⇔ ∃ M∈R: ∀ x∈X⇒ f(x)≤M,**
- ограниченная снизу **⇔ ∃ M∈R: ∀ x∈X⇒ f(x) ≥ M,**
- ограниченная **⇔ ∃ N,M∈R: ∀ x∈X⇒ N≤f(x)≤M.**
- 6) Если условия пункта 5 не выполняются, то функция называется неограниченной.

2.3 СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ.

- **Сложная функция.**
- На *D* определена функция ***u=φ(x)*** → ***E(u)*** – множество значений.
- На ***E(u)*** задана ***y=f(u)*** ***(D(f) ⊆ E(u)).***
- Тогда $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y = f\left(\varphi\left(x\right)\right) \Leftrightarrow \left(f \circ \varphi\right).$
- Называется суперпозицией функций.
- **x** – независимая переменная; **u** – промежуточный аргумент.
- **Пример:** $y = \sqrt{ax^2 + bx},\ u = ax^2 + bx,\ y = \sqrt{u}.$

Обратная функция.

- Функция **y=f(x)** отображает **D(f)** → **E(f).**
- Рассмотрим взаимно однозначное отображение $f \Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists^1 y \in E:\ y = f(x):$

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

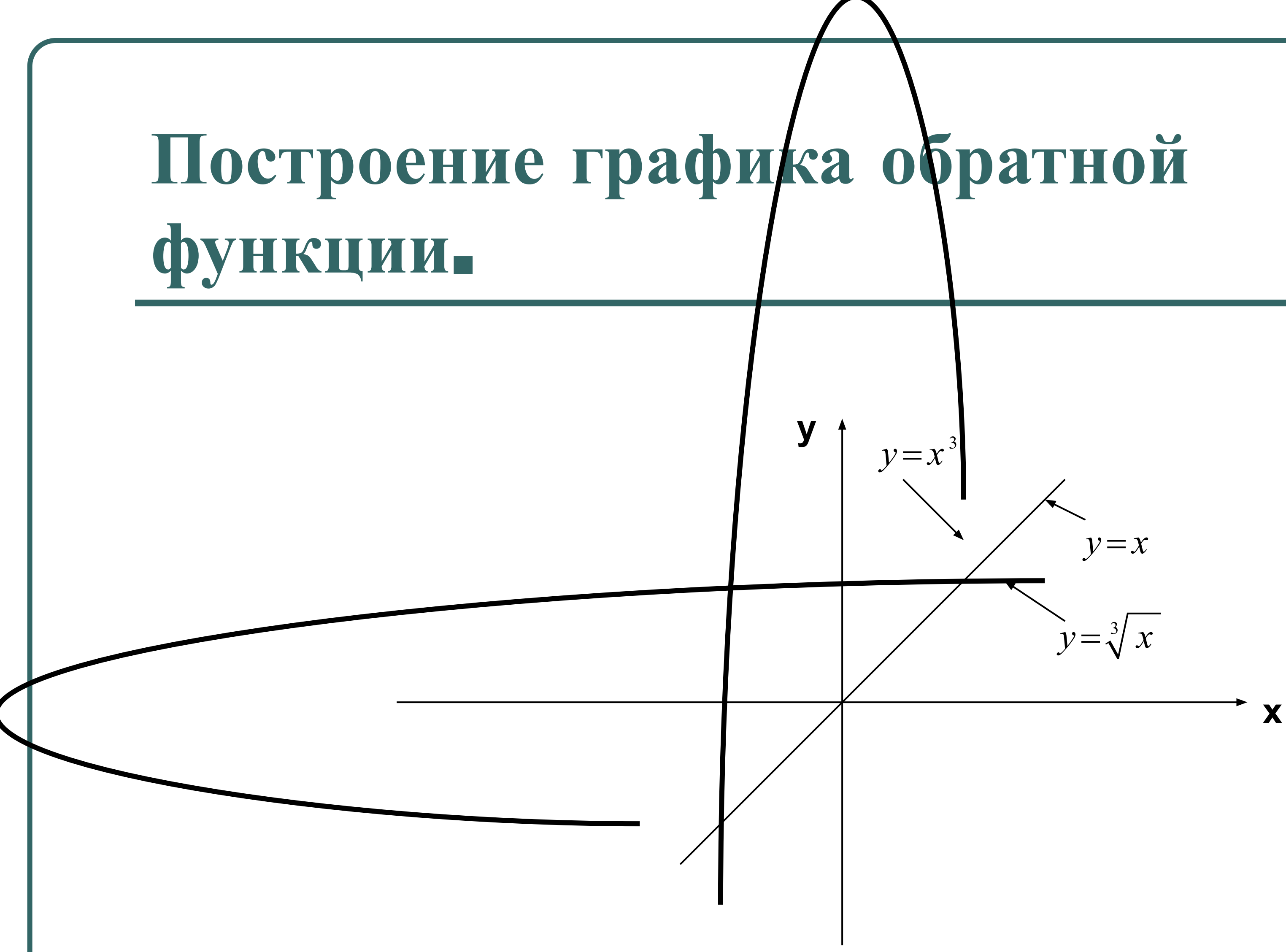
- Тогда можно говорить об обратной функции $x = f^{-1}(y).$
- **Пример:**

$$y = x^3,\quad x = \sqrt[3]{y}\,.$$

Теорема 2.1.

- Если числовая функция монотонна, то ∃ обратная функция
$$x = f^{-1}(y).$$
- Это достаточное условие обратимости.

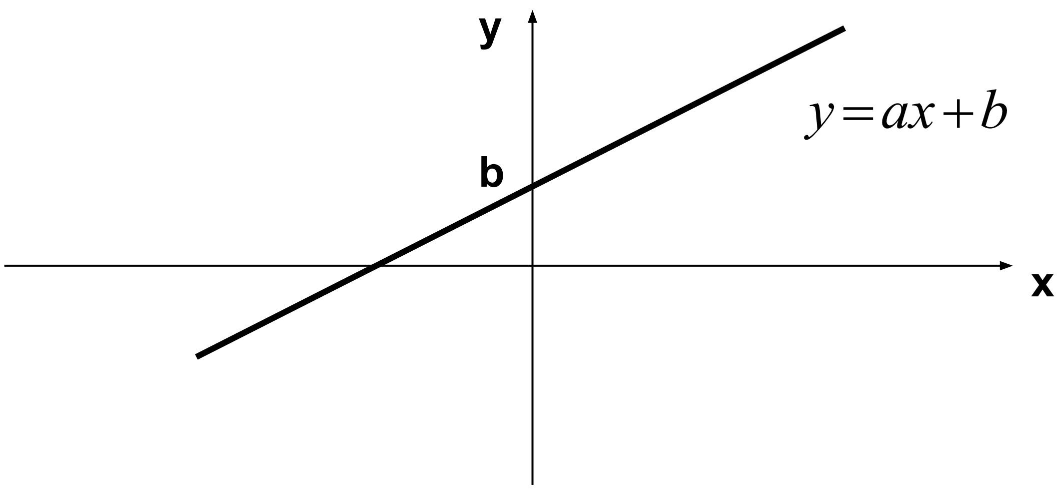
Построение графика обратной функции.



2.4. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ.

- **1) Линейная:** $y=ax+b$ $(a,b\in R)$, $D(f)=R$.

$$E(f)=\begin{cases} R & \forall a\neq 0, \\ \{b\} & a=0. \end{cases}$$

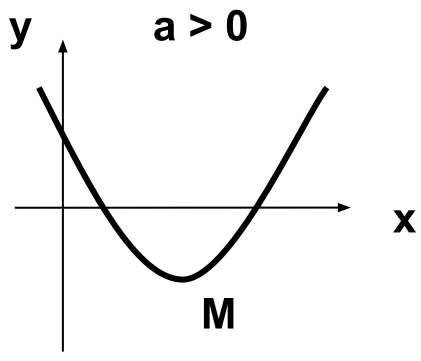


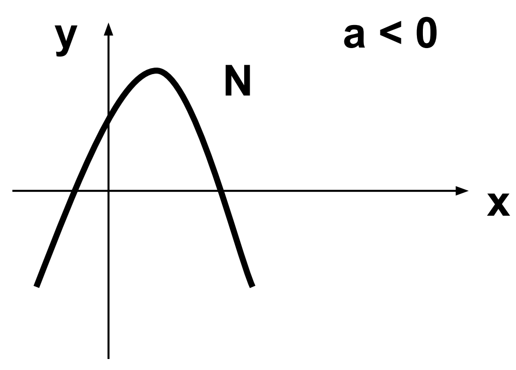
2) Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c, \ \left(a, b, c \in R; \ a \neq 0 \right), \ D(f) = R.$$

$$a > 0: \ E(f) = \left(\frac{4ac - b^2}{4a}; \infty \right), \ M\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right).$$

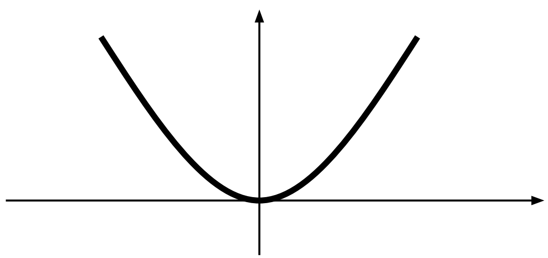
$$a < 0: \ E(f) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a} \right), \ N\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right).$$



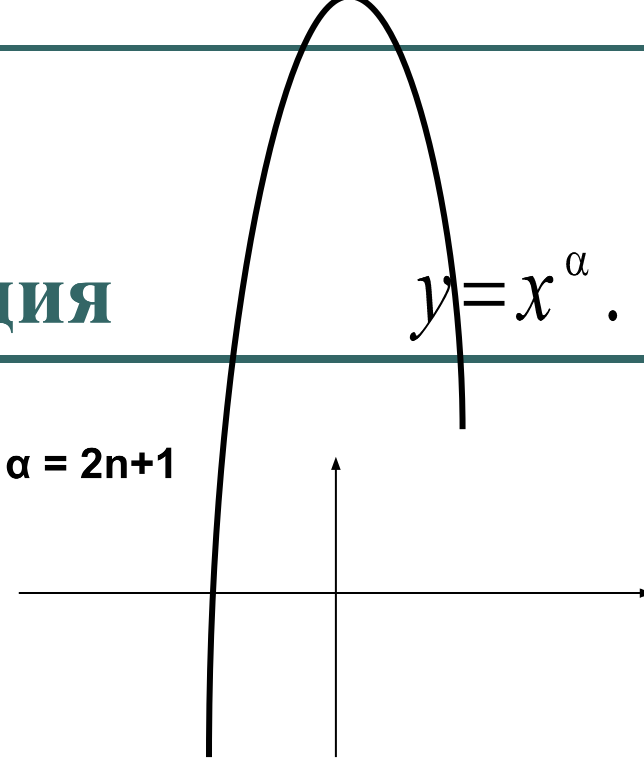


3) Степенная функция $y = x^{\alpha}.$

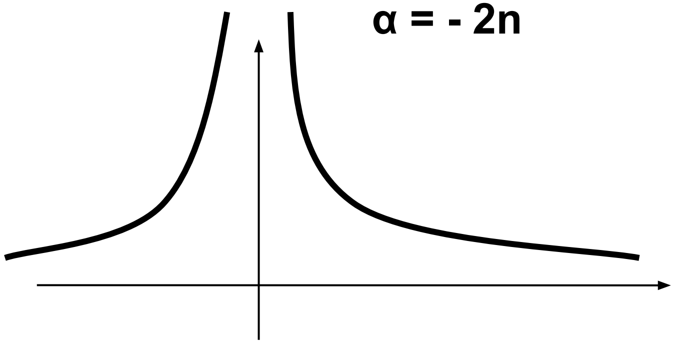
α = 2n



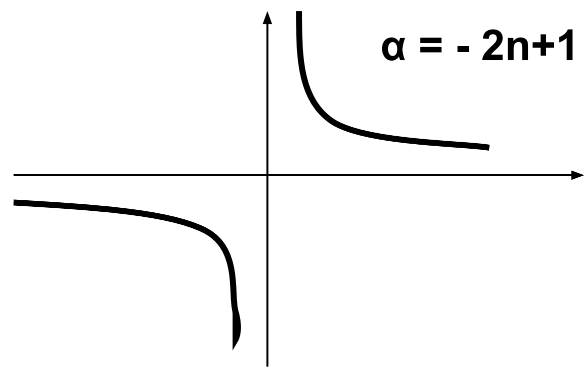
α = 2n+1



α = - 2n



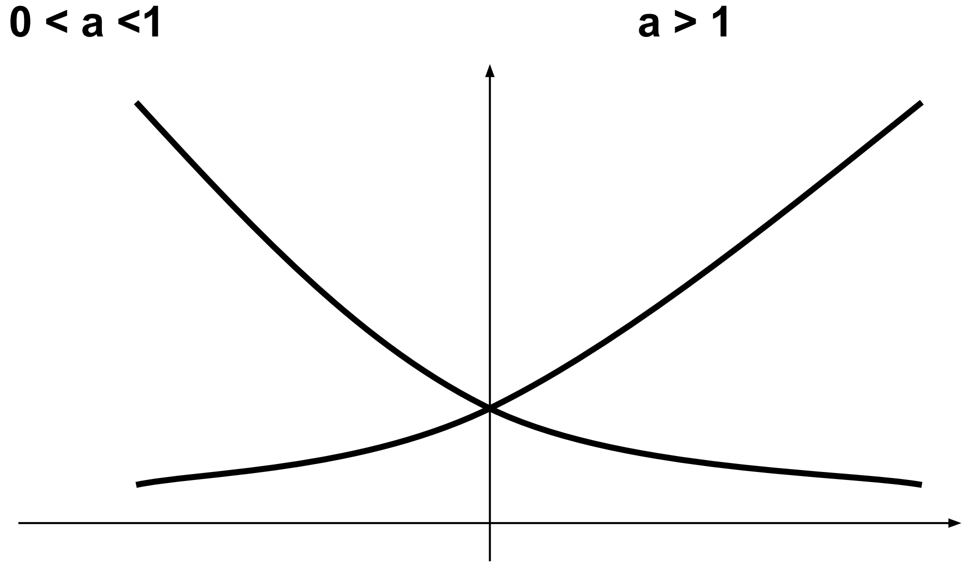
α = - 2n+1



4) Показательная функция.

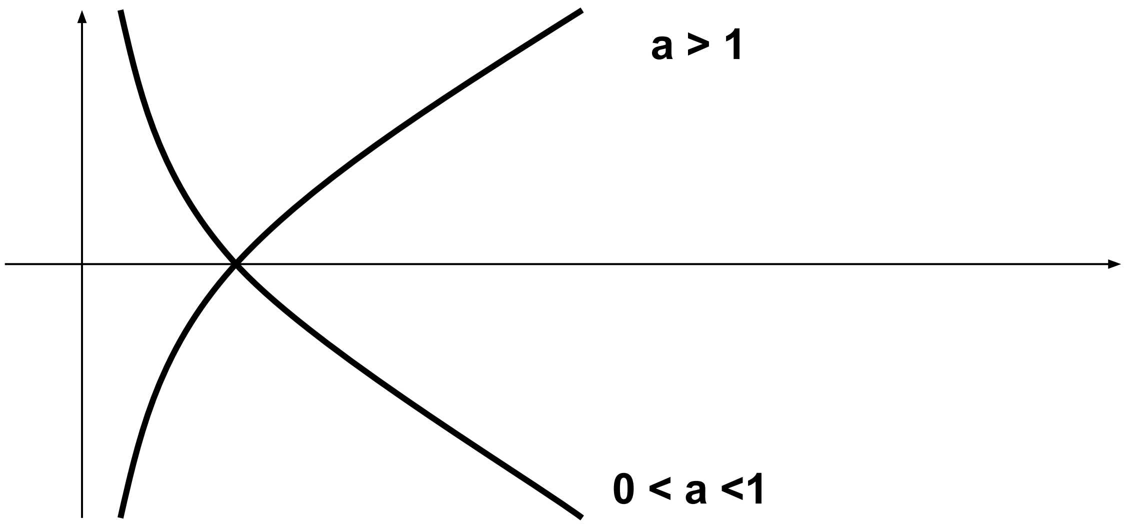
$$y = a^x,\ (a > 0; a \neq 1).$$

$$D(f) = R,\ E(f) = (0; \infty).$$



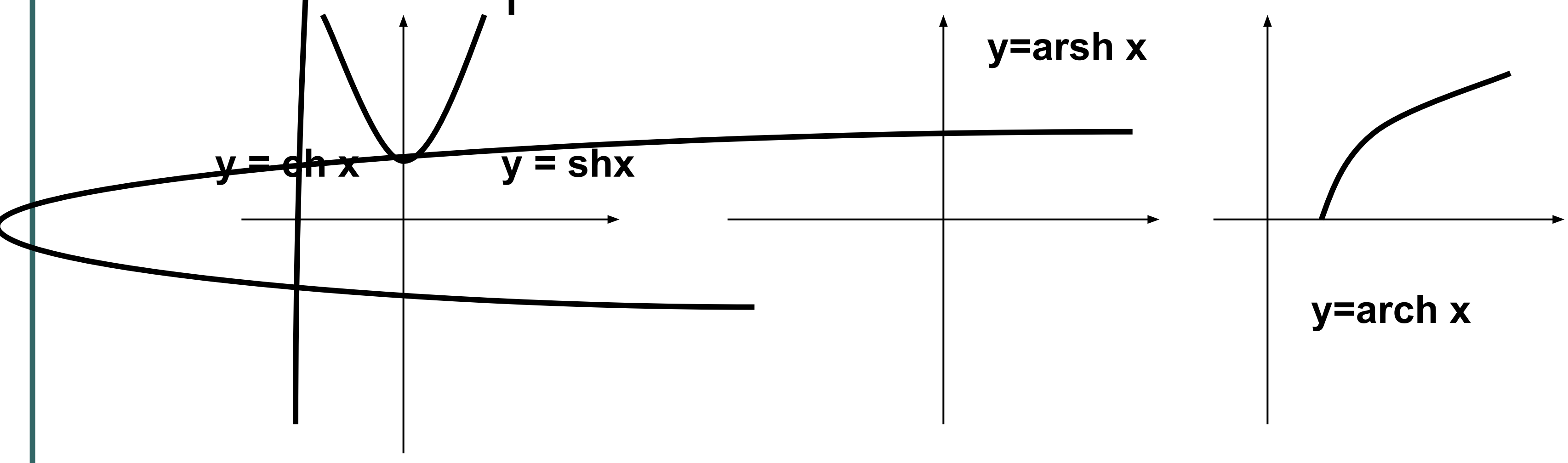
5) Логарифмическая функция

$$y = \log_a x.$$



y = ch x

- 6) Тригонометрические функции.
- 7) Обратные тригонометрические функции.
- 8) Гиперболические функции.
- 9) Обратные гиперболические функции.



ЛЕКЦИЯ 3

- 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

2.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ.

- **1) Целые рациональные функции:**

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

- **2) Дробно-рациональные функции:**

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

- Совокупность 1) и 2) – класс рациональных функций.
- **3) Иррациональные функции: -** получаются с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями.

$$y=\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{x}.$$

- Совокупность 1), 2) и 3) – класс алгебраических функций.
- **4) Трансцендентные функции: sin x, ln x, ch x** и т. д.

2.6. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ.

- $$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in T.$$
- *t* – называется параметром.
- Если **φ** - монотонна, то $\exists\, t=\varphi^{-1}(x)$.
- Тогда $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$.
- Всякую явно заданную функцию можно представить параметрически

$$y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t, & t\in T\\ y=f(t).\end{cases}$$

Пример:

$$y=\frac{1}{x},\ D(f)=(0,\infty).$$

- а) Введем $t=x.$
- Тогда $x=t,\ t\in(0;\infty),$
- $y=\frac{1}{t}.$
- б) а) Введем $x=e^{t}.$
- Тогда $x=e^{t},\ t\in R,$

$$y=e^{-t}.$$

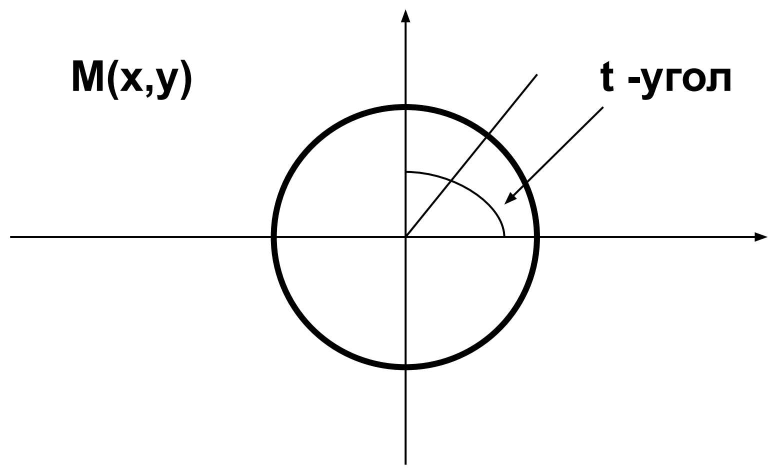
Параметрическое задание линий на плоскости.

- Множество точек **M(x,y)** плоскости R^2, координаты которых удовлетворяют **x=x(t), y=y(t), t∈T,** параметрически задают линию $L \in R^2$.
- **Прямая:**

$$y = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} x = t,\ t \in R, \\ y = at + b. \end{cases}$$

Окружность с центром в начале координат.

$$x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t, \ 0 \le t < 2\pi, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$



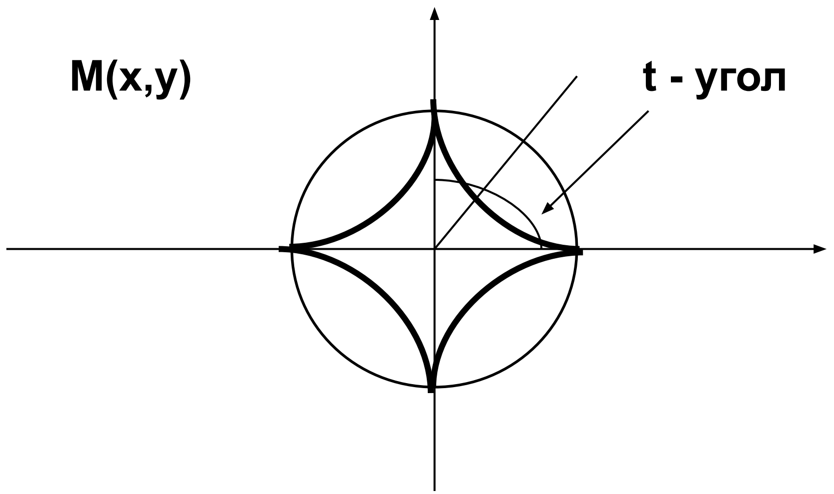
- **Парабола.** $y^2 = 2px \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \ t \in [0;\infty), \\ y^2 = 2pt. \end{cases}$

- **Гипербола.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \ \ t \in R, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

Астроида.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ (a=4r)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos^3 t,\ 0\le t<2\pi,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$



Циклоида.

$$x = a(t - \sin t),\ t \in R,$$
$$y = a(1 - \cos t).$$