Тема 9

Производная функции. Правила дифференцирования. Основные свойства дифференцируемых функций. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции

ЛЕКЦИЯ

Калабухова
Галина Валентиновна
кандидат социологических наук, доцент

Вопросы темы

- Производная функции. Геометрический смысл производной.
- Уравнение касательной и нормали к кривой.
- Производная с точки зрения механики.
- Дифференцируемость функции. Основные свойства дифференцируемых функций.
- Дифференциал функции.
- Дифференцирование суммы, произведения и частного.
- Производные основных элементарных функций.
- Производная сложной функции.
- Понятие обратной функции. Производная обратной функции.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Определение

Пусть функция ***y***=***f***(***x***) определена в точке ***x*** и некоторой её окрестности. Придадим значению аргумента ***x*** приращение Δ***x*** (положительное или отрицательное, но не выводящее за пределы этой окрестности) и найдем соответствующее приращение функции Δ***y***=***f***(***x***+Δ***x***)- ***f***(***x***).

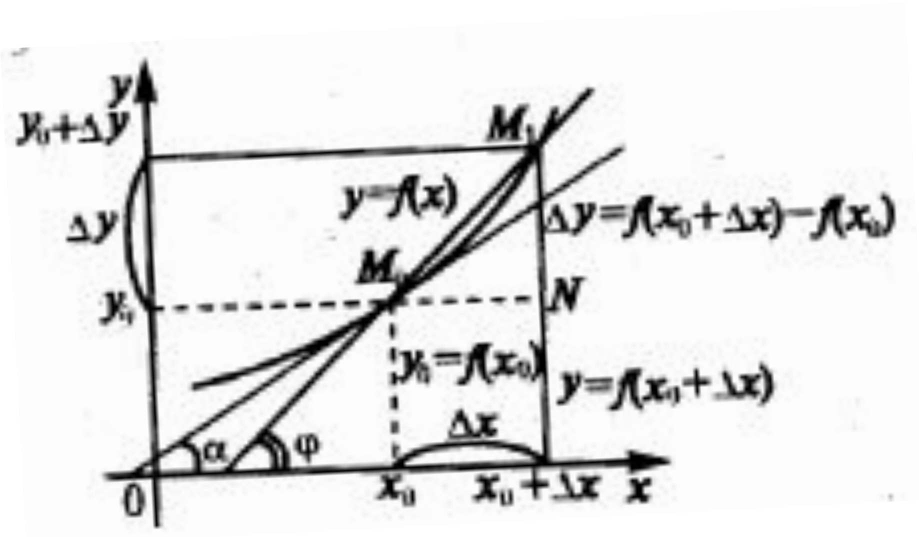
Предел отношения приращения функции Δ***y*** к приращению аргумента Δ***x*** при Δ***x*** →0 называется ***производной*** функции ***y***=***f***(***x***) в точке ***x***:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначения

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ y'_x$$

Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной $y'(x_0)$ - *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0, y_0=f(x_0))$

Чтобы в точке $(x_0, y_0=f(x_0))$ существовала касательная, необходимо существование предела,

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

т.е. существование производной

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К НОРМАЛИ И КРИВОЙ

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через данную точку:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)$$

Уравнение касательной в точке ($\boldsymbol{x}_0$,$\boldsymbol{y}_0$=$\boldsymbol{f}$($\boldsymbol{x}_0$)):

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции в точке ($\boldsymbol{x}_0$,$\boldsymbol{y}_0$=$\boldsymbol{f}$($\boldsymbol{x}_0$)) (при условии, что $\boldsymbol{y'}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$)):

$$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)$$

ПРОИЗВОДНАЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕХАНИКИ

Вычисление скорости неравномерно движущегося тела

Пусть материальная точка неравномерно движется вдоль оси О***x***. Известна зависимость пути $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$, пройденного к моменту времени $\boldsymbol{t}$ от времени $\boldsymbol{t}_0$, требуется найти значение скорости точки в момент $\boldsymbol{t}_1$.

Если мы возьмём любое $\boldsymbol{t}_1 \neq \boldsymbol{t}_0$ и найдём отношение $\dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$,

то будет получено среднее значение скорости на отрезке $[\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1]$. Чтобы получить мгновенное значение скорости в момент $\boldsymbol{t}_0$, мы должны устремить $\boldsymbol{t}_1$ к $\boldsymbol{t}_0$, т.е. найти предел ,

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

где $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_0$, $\Delta \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}_1) - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}_0)$

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Определение

Если функция имеет в точке х конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой в*** этой ***точке***.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка Х, называется ***дифференцируемой на*** этом ***промежутке***

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение

Функция ***y*** = ***f***(***x***) называется ***дифференцируемой в точке x***, если её приращение Δ***y*** в этой точке можно представить в виде ,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

где ***A*** - не зависящая от Δ***x*** величина,
α(Δ***x***) – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δ***x***:

$$\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$$ при Δ***x***→0

Определение

Главная часть приращения $\Delta \boldsymbol{y}$ дифференцируемой функции, линейная относительно приращения $\Delta \boldsymbol{x}$ аргумента (т.е. $A \cdot \Delta x$), называется ***дифференциалом*** функции и обозначается $\boldsymbol{dy}$ (или $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x})$).

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

Дифференцируемость суммы

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x.

Тогда в этой точке имеют производные функции $y = (u(x) \pm v(x))$, и

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

Дифференцируемость произведения

Пусть функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ имеют производные в точке $\boldsymbol{x}$.

Тогда в этой точке имеет производную функция $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))$, и

$$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}).$$

Пусть функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ имеет производную в точке $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{C}$ - константа.

Тогда в этой точке имеет производную функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cu}(\boldsymbol{x})$, и

$$(\boldsymbol{Cu}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{Cu}'(\boldsymbol{x}).$$

Дифференцируемость частного

Пусть функции ***u***(***x***) и ***v***(***x***) имеют производные в точке ***x*,** причём v(x)≠0.

Тогда в этой точке имеет производную функция

$y(x)' = \frac{u(x)}{v(x)}$ и

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица производных

$\left(x^{n}\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^{2} x}$
$(\log_{a} x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_{a} e}{x}, \quad (x > 0, a > 0)$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^{2} x}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \quad (\lvert x \rvert < 1)$
$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}, \quad (\lvert x \rvert < 1)$
$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^{2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $u=g(x)$ имеет в точке x производную $u_x=g'(x)$, функция $y=f(u)$ имеет в точке u производную $y_u=f'(u)$.

Тогда сложная функция ***y=f(g(x))*** имеет в точке ***x*** производную, равную произведению производных функций ***f(u)*** и ***g(x)*** и:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Определение

Пусть ***y=f(x)*** – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. имеет в точке u производную y_u=f'(u).

Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x – как функцию, то новая функция ***x=g(y)*** является ***обратной*** к данной и непрерывной на соответствующем промежутке Y.

Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна величине производной данной функции, т.е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Пример 1

Найти производную функции:

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' =$$

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-1-1}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-1 - 1}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Пример 2

Найти производную функции:

$$y = \log_3(2x^3 + 1)$$

Решение

Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' =$$

Решение

Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3+1))' = \frac{1}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}\cdot(2x^3+1)' =$$

Решение

Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3+1))' = \frac{1}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}\cdot(2x^3+1)' = \frac{3\cdot 2x^2}{(2x^3+1)\cdot\ln 3} =$$

Решение

Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3+1))' = \frac{1}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}\cdot(2x^3+1)' = \frac{3\cdot 2x^2}{(2x^3+1)\cdot\ln 3} = \frac{6x^2}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}$$