

Теория игр

- Теория игр представляет собой математическую теорию конфликтных ситуаций.
- Ее цель – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта
- Впервые описана в 1944 – в монографии фон Неймана и Моргеншерна

- Игра – это ситуация, в которой эффективность решений одного игрока зависит от действий другого игрока.
- Игра развивается по определенным правилам, которые определяют последовательность ходов игроков.
- Конец игры наступает в том случае, когда все возможные ходы игроками сделаны.

- Игра характеризуется:
 1. Множество заинтересованных сторон – **лиц, участников, игроков**
 2. Множеством возможных действий (ходов) для каждого игрока – **стратегий**
 3. Интересами игроков, задаваемых с помощью функции выигрыша – **функции платежа.**

Игры можно классифицировать

1. Игры ***парные*** (2 игрока) и ***множественные***.
2. По количеству возможных стратегий:
 - ***конечные*** (конечное у каждого игрока)
 - ***бесконечные*** (хотя бы у одного игрока бесконечное число стратегий)

3. По свойствам функции платежа:
 - ***антагонистическая*** (с нулевой суммой) – выигрыш одного = проигрышу другого,
 - ***игра с ПОСТОЯННОЙ разностью*** (участники выигрывают и проигрывают одновременно, следовательно выгодно действовать сообща).
4. По наличию предварительной договоренности о совместных действиях : ***кооперативные*** (есть договоренность) и ***некооперативные*** (договоренности нет).

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **Стратегия** – совокупность правил, определяющих выбор варианта действия игроком в зависимости от ситуации в игре.
- **Целью** является отыскание *оптимальной стратегии* для каждого игрока.
- **Оптимальная стратегия** – стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный выигрыш или минимально возможный проигрыш независимо от поведения противника.
- Выбор одной из возможных стратегий и ее реализация называется **ХОДОМ**.
- **Ход** – может быть **личным** (выбор стратегии сознателен) и **случайным**.

Игру можно описать разными способами

1. **Позиционный** – задается в виде дерева шагов.
2. **Нормальный** – задаются допустимые стратегии для каждого игрока и функция выигрыша, которая определяет выигрыш или проигрыш для каждой стратегии. Чаще всего задается в виде **платежной матрицы**

Конечная парная антагонистическая игра

- Два игрока (I и II) обладают конечным набором стратегий:
- I стратегии $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m$
- II стратегии $\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n$
- Эта игра размерностью $\mathbf{n \times m}$.

- Предположим, что на некотором ходе игрок I выбрал стратегию A_i , а игрок II отвечает стратегией B_j
- Тогда $W_1(A_i, B_j)$ – **выигрыш**, который получит игрок I при этой паре стратегий.
- $W_2(A_i, B_j)$ – **выигрыш**, который получит игрок II при этой паре стратегий
- Так как игра антагонистическая, то
- $W_1(A_i, B_j) + W_2(A_i, B_j) = 0$
- Или $W_1(A_i, B_j) = -W_2(A_i, B_j) = W(A_i, B_j)$

- Обозначим $W(A_i, B_j) = a_{ij}$ тогда получим платежную матрицу

$\begin{array}{l} II \\ / \\ I \end{array}$	B_1	\dots	B_n
A_1	a_{11}	\dots	a_{1n}
\dots	\dots	\dots	\dots
A_m	a_{m1}	\dots	a_{mn}

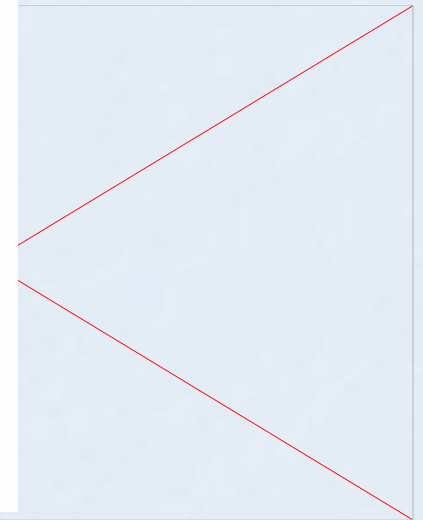
Каждый положительный элемент это выигрыш I игрока, каждый отрицательный – проигрыш II

Пример

- Играют 2 игрока, каждый называет цифру 1, 2, или 3. Если разница между цифрами игроков положительная, то это выигрыш I игрока, если отрицательная – II игрока, если =0, то ничья.
- **I** $A_1=1$ $A_2=2$ $A_3=3$
- **II** $B_1=1$ $B_2=2$ $B_3=3$

- Запишем платежную матрицу.

II / I	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-1	-2
A_2	1	0	-1
A_3	2	1	0



- Следует найти оптимальную стратегию для I и II игроков.
- Используем **основной принцип ТИ:**
- **Какую бы стратегию не выбрал I игрок, II игрок всегда ответит на нее такой стратегией, при которой выигрыш I будет минимальным и следовательно у II минимальный проигрыш.**

- Для поиска лучшей стратегии I игрока найдем минимальный элемент в каждой строке платежной матрицы $\alpha_i = \min a_{ij}$
- Среди α_i найдем максимальный $\alpha = \max \alpha_i$
 $\alpha = \max (\min a_{ij})$ - нижняя цена игры или гарантированный выигрыш I (максимин)
- Стратегия I игрока, при которой достигается α называется максиминой или перестраховочной.
- При этой стратегии I игроку гарантирован выигрыш не менее α .

- Наилучшая стратегия для II игрока.
- Находим максимальный элемент в каждом столбце матрицы $\beta_j = \max a_{ij}$
- Среди β_j найдем минимальный $\beta = \min \beta_j$
 $\beta = \min (\max a_{ij})$ верхняя граница или минимакс.
- Стратегия II игрока, при которой достигается это значение называется **минимаксной или перестраховочной** для II.
- Если II придерживается своей минимаксной стратегии, то он получает выигрыш не больший, чем β

I/II	B_1	...	B_n	α
A_1	a_{11}	...	a_{1n}	α_1
...
A_m	a_{m1}	...	a_{mn}	α_m
β	β_1	...	β_n	

- В ТИ доказано, что $\alpha \leq \beta$
- Существуют игры, в которых $\alpha = \beta = \gamma$ - чистая **цена игры**, это игры с **седловой точкой**.
- Пара оптимальных стратегий (A^*_{I}, B^*_j) для I и II игроков, при которых достигается чистая цена игры называется **седловой** точкой платежной матрицы.
- Если игра содержит седловую точку, то говорят, что решение находится в **чистых стратегиях**.

Пример

II / I	B_1	B_2	B_3	
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	1	0	-1	-1
A_3	2	1	0	0
	2	1	0	

$$\alpha=0$$

$$\beta=0$$

$$\gamma=0$$

Игра содержит седловую точку (A_3, B_3)

- Оптимальные чистые стратегии обладают свойством **равновесия**: игроки всегда придерживаются своих оптимальных стратегий, так как это выгодно.
- I игрок не может увеличить выигрыш больше чем γ , а II игрок не может уменьшить проигрыш и сделать больше γ

- Если седловой точки в платежной матрице нет, то решение игры ищем в **смешанных стратегиях.**
- **Смешанная стратегия** – сложная стратегия, в которой чистые стратегии игроков применяются с некоторыми частотами (вероятностями)

- I игрок. p_1 - вероятность применения стратегии A_1, \dots p_i - вероятность применения стратегии $A_i \dots p_m$ вероятность применения стратегии A_m
 $p_i \geq 0, i=1 \dots m, \sum p_i = 1$.
- Чистая стратегия A_i называется **активной**, если вероятность ее использования отлична от нуля $p_i \neq 0$.

- II игрок. q_1 - вероятность применения стратегии V_1, \dots q_j - вероятность применения стратегии $V_j \dots q_n$ вероятность применения стратегии V_n
 $q_j \geq 0, j=1 \dots n, \sum q_j = 1$.
- Чистая стратегия V_j называется **активной**, если вероятность ее использования отлична от нуля $q_j \neq 0$.

- **Любая антагонистическая парная конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможное в смешанных стратегиях.**
- Следовательно игра имеет цену γ , $\alpha \leq \gamma \leq \beta$
- Игрок I стремится добиться выигрыша = γ , а игрок II стремится минимизировать проигрыш до γ .
- Смешанные стратегии также обладают свойством **равновесия**, обоим игрокам выгодно их применять.

Теорема фон Неймана

- **Применение оптимальных смешанных стратегий гарантирует игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш) равный цене игры v , независимо от поведения противника, если игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.**

Доказательство

- Для I игрока предположим, что r стратегий активны, $r \leq m$, следовательно $p_A^* = (p_1, \dots, p_r, 0 \dots 0)$
- Для II игрока предположим, что s стратегий активны, $s \leq n$, следовательно $q_B^* = (q_1, \dots, q_s, 0 \dots 0)$
- Применяя эти стратегии I получит выигрыш $= \gamma$, а II – проигрыш $= \gamma$.

- Требуется доказать, что I применяя оптимальные стратегии независимо от действий II получит выигрыш $=\gamma$.
- Пусть первый применяет оптимальные стратегии \mathbf{A}^* , а II применяет чистые стратегии $\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_s$.
- Тогда выигрыш I будет $\gamma_1 \dots \gamma_s$.
- Так как II не применяет оптимальные стратегии, то он может получить проигрыш $\geq \gamma$: $\gamma_1 \geq \gamma \dots \gamma_s \geq \gamma$.

- Выразим γ через $\gamma_1 \dots \gamma_s$.
- $\gamma = q_1 \gamma_1 + \dots + q_s \gamma_s$ – средневзвешенное значение величин $\gamma_1 \dots \gamma_s$ (веса- это вероятности)
- Это значение было бы $> \gamma$, если бы хотя бы одно $\gamma_j > \gamma$ следовательно $\gamma_1 \dots \gamma_s = \gamma$, следовательно I независимо от действий II получит **выигрыш $= \gamma$** .

Игра размерностью 2 на 2

- В игре 2 участника и каждый имеет по 2 допустимые стратегии.
- **I** A_1 A_2
- **II** B_1 B_2

I/II	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

- Если игра содержит седловую точку, то решение находится в чистых стратегиях.

- Предположим, что седловой точки нет, тогда решение будет находиться в смешанных стратегиях.
- $\mathbf{P}=(p_1, p_2)$ $\mathbf{q}=(q_1, q_2)$ Обе стратегии активны, иначе - игра с седловой точкой.
- Найдем оптимальную стратегию для I игрока.
- Согласно теореме, если I игрок будет придерживаться оптимальной стратегии, то получит выигрыш $=\gamma$ независимо от II игрока.
- Если II применяет стратегию \mathbf{V}_1 , то I игрок получит выигрыш $\mathbf{a}_{11}p_1 + \mathbf{a}_{21}p_2 = \gamma$
- Если II применяет стратегию \mathbf{V}_2 , то I игрок получит выигрыш $\mathbf{a}_{12}p_1 + \mathbf{a}_{22}p_2 = \gamma$

- Получаем систему
- Решаем и находим \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{y}

$$B_1 : a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma$$

$$B_2 : a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Аналогично для II игрока

$$A_1 : a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma$$

$$A_2 : a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

γ из первой и второй системы совпадают

Пример

- Дана платежная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим наличие седловой точки

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \alpha_1 = 1 \\ 2 & 3 & \alpha_2 = 2 \\ \beta_1 = 5 & \beta_2 = 3 & \alpha = 2 / \beta = 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha \neq \beta - \\ \text{седловой} \\ \text{точки нет} \end{array}$$

$$\begin{cases} 5p_1 + 2p_2 = \gamma \\ p_1 + 3p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4p_1 - p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{1}{5} \quad p_2 = \frac{4}{5} \quad \gamma = \frac{13}{5}$$

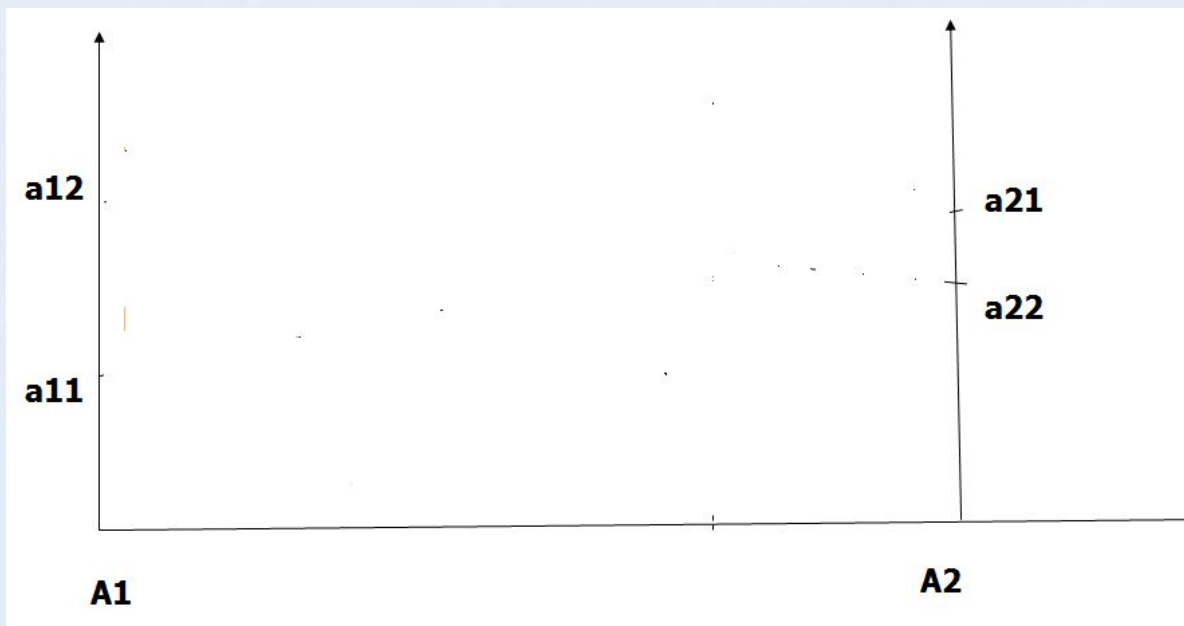
$$\begin{cases} 5q_1 + q_2 = \gamma \\ 2q_1 + 3q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3q_1 - 2q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{2}{5} \quad q_2 = \frac{3}{5} \quad \gamma = \frac{13}{5}$$

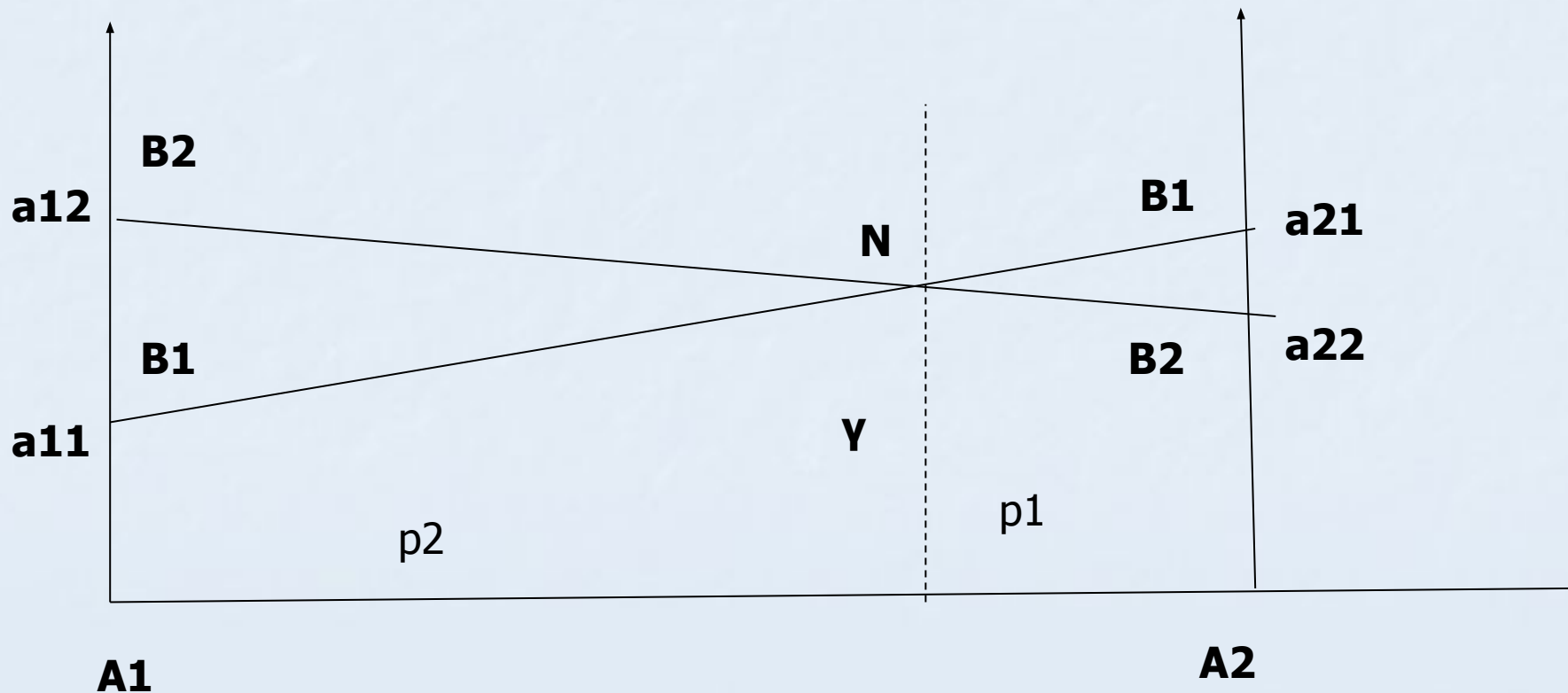
Геометрический метод

Пусть имеется игра с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

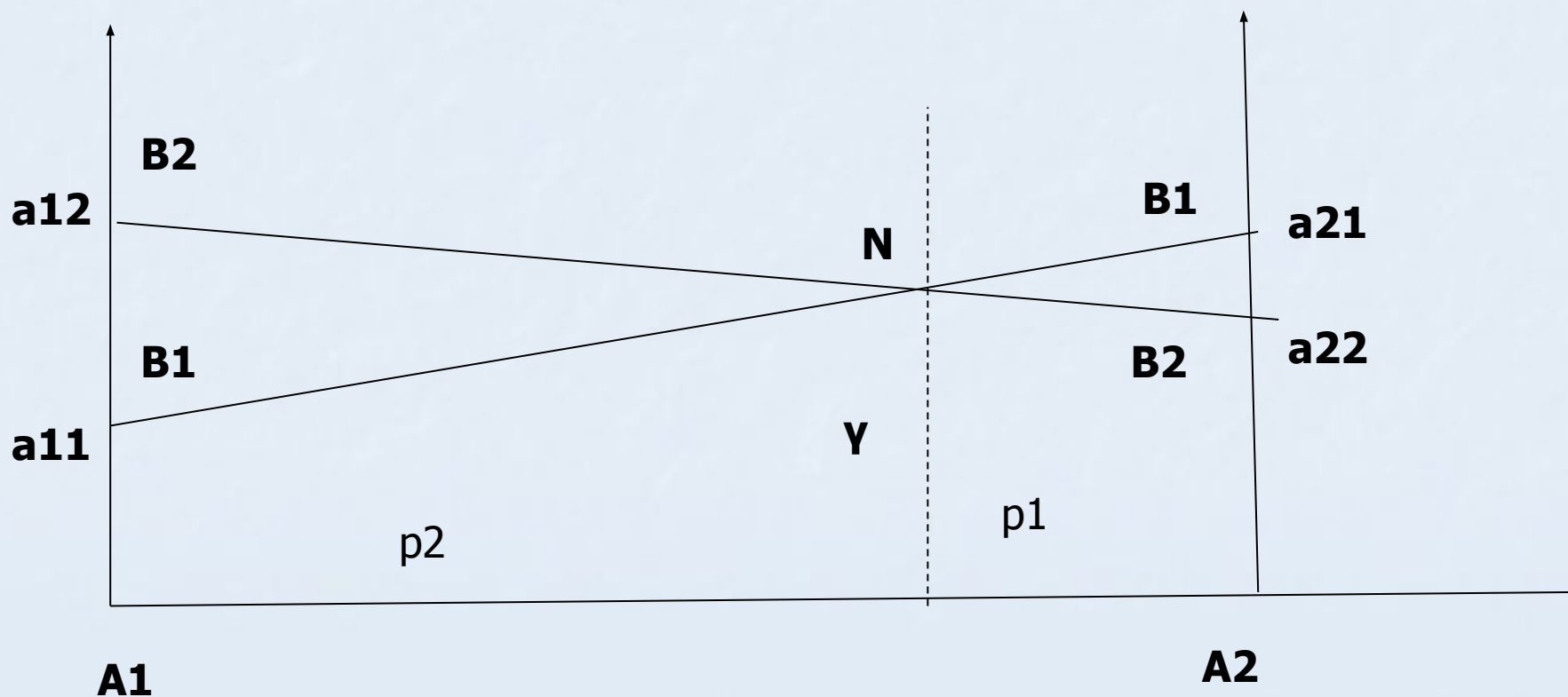
1. В декартовой системе координат на оси абсцисс откладывается отрезок равный 1. Точка $x=0$ соответствует стратегии A1, $x=1$ – стратегии A2.
2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A1, на правой – стратегии A2.



- Если игрок II применяет стратегию B1, то его выигрыш при использовании стратегии A1 и A2 составляет соответственно a_{11} и a_{21} .
- Соединим точки B1 B1.
- Если игрок I применяет смешанную стратегию, то средний выигрыш $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma$ – точка N на прямой B1 B1, абсцисса ее равна p_2 .
- B1 B1 называют стратегией игрока I при применении стратегий A1 и A2 с соответствующими вероятностями p_1 и p_2 .



- Если игрок II применяет стратегию B2, то его выигрыш при использовании стратегии A1 и A2 составляет соответственно a_{12} и a_{22} . B2 B2 соответствует стратегии игрока II.
- Точка пересечения B1 B1 и B2 B2 определяет цену игры γ .
- Ординаты точек отрезка B2 B2 равны среднему числу стратегий A1 и A2 с вероятностями p_1 и p_2 .
- Ломаная B1 N B2 – это нижняя граница выигрыша, получаемого игроком I. В точке N он максимален и составляет γ

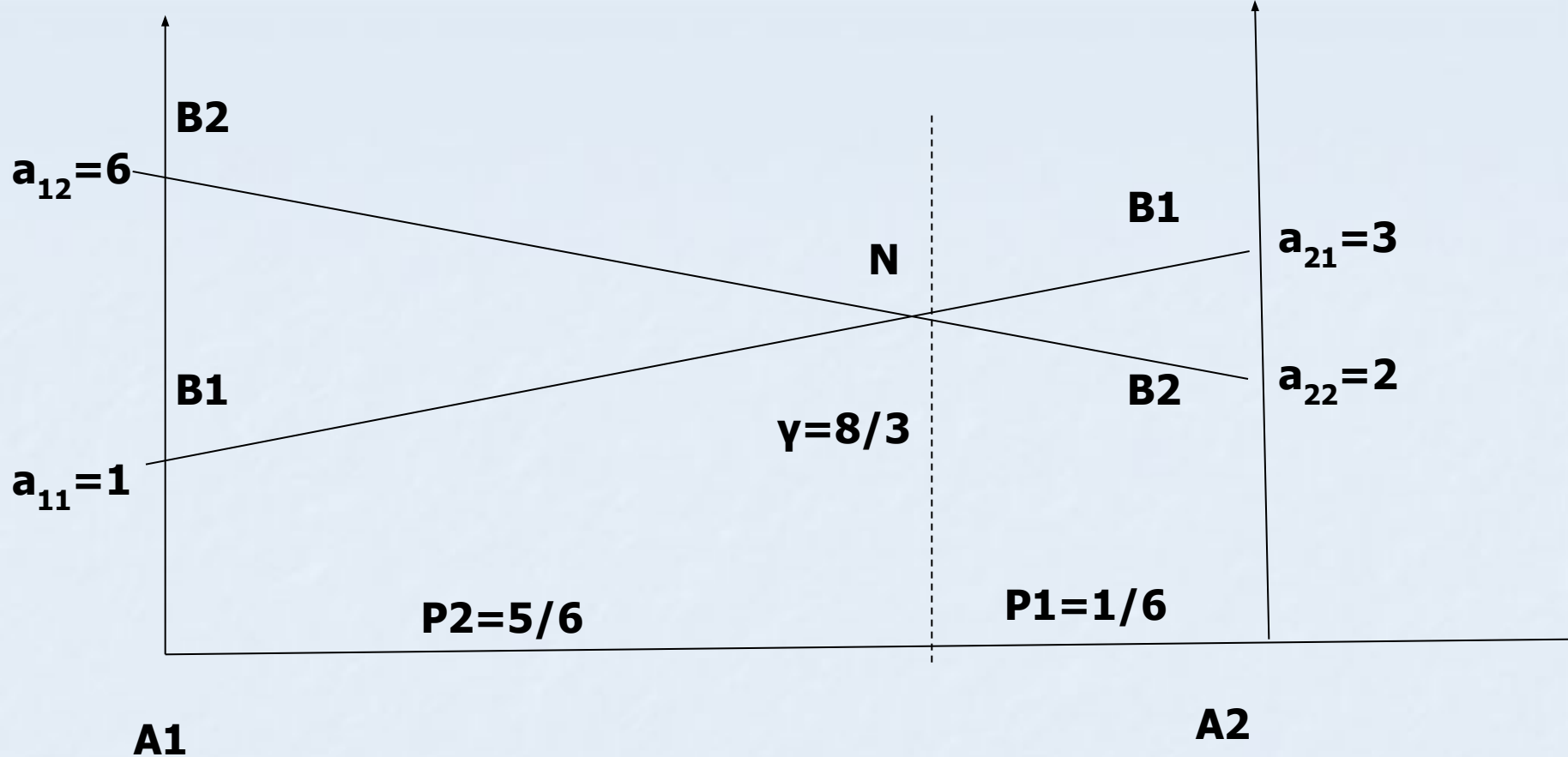


Пример

- Найти оптимальную смешанную стратегию руководителю предприятия и гарантированный средний выигрыш при выборе новых технологий A1 и A2, если известны выигрыши каждого вида по сравнению со старой технологией:

I	B1	B2	α
II			
A1	1	6	1
A2	3	2	2
β	3	6	

- Решение
- Нижняя цена игры $\alpha = \max(1, 2) = 2$
- Верхняя цена игры $\beta = \min(3, 6) = 3$
- $\alpha \neq \beta$, седловой точки нет.
- Цена игры будет $2 \leq \gamma \leq 3$.
- Находим решение игры в смешанных стратегиях геометрическим методом.



$$\begin{cases} \gamma = a_{12} + (a_{22} - a_{12}) \times p_2 \\ \gamma = a_{11} + (a_{21} - a_{11}) \times p_1 \end{cases} \Rightarrow p_2 = \frac{5}{6}, p_1 = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{8}{3}$$

Игра размерностью $m \times n$

- В ТИ доказано, что в играх размерностью $m \times n$ число активных стратегий равно $\min\{m, n\}$
- Таким образом, решение игр $m \times 2$ и $2 \times n$ сводится к решению игр 2×2 .

Способы понижения размерности платежной матрицы

- Размерность матрицы можно понизить путем удаления **дублирующих** и **заведомо не выгодных** стратегий .
- Если в матрице все элементы некоторой строки (столбца) равны, то соответствующие стратегии называются **дублирующими**.

- Если в матрице все элементы некоторой строки, соответствующие стратегии A_i I игрока **не больше** соответствующих элементов другой строки, то стратегии A_i называется заведомо **невыгодной** для I игрока.
- Если в матрице все элементы некоторого столбца, соответствующие стратегии B_j II игрока **не меньше** соответствующих элементов другого столбца, то стратегию B_j называется заведомо невыгодной для II игрока

■ Рассмотрим платежную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A_4 - заведомо невыгодная стратегия

B_4 - дублирующая стратегия

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B_3 - заведомо невыгодная стратегия

Матричные игры $m \times n$

- Рассмотрим игру, которая будет описана следующей платежной матрицей.

$\begin{matrix} II \\ / \\ I \end{matrix}$	B_1	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1n}
...
A_m	a_{m1}	...	a_{mn}

Алгоритм решения



Находим решение в смешанных стратегиях

- I игрок чистые стратегии $A_1 \dots A_m$
- II игрок чистые стратегии $B_1 \dots B_n$

Оптимальные смешанные стратегии p^*_A
 p^*_B

- Предположим, что все элементы платежной матрицы ≥ 0 , **иначе добавляем к каждому элементу положительное число**, при этом оптимальные стратегии не меняются, а **цена игры увеличивается** на это число.

- Согласно теореме ТИ если I игрок будет придерживаться оптимальной смешанной стратегии, то он получит выигрыш $\geq \gamma$ (цены игры).
- При этом II игрок применяет свои чистые стратегии

$$B_1 \quad a_{11}p_1 + \dots + a_{1m}p_m \geq \gamma$$

...

$$B_n \quad a_{1n}p_1 + \dots + a_{mn}p_m \geq \gamma$$

$$p_1 + \dots + p_m = 1 \quad p_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m$$

- Введем обозначения $\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_i / \gamma$ $i = 1..m$
- Разделим неравенства на γ

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \geq 1$$

...

$$a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1$$

$$p_1 + \dots + p_m = 1 \quad p_i \geq 0 \quad i = 1..m$$

- Цель **I** игрока увеличить выигрыш γ
- Так как $p_1 + \dots + p_m = 1$, то $x_1 + \dots + x_m = 1/\gamma$
 $F = x_1 + \dots + x_m \rightarrow \min$

Получаем задачу линейного программирования.

- Составим аналогичную задачу для II игрока.
- Если II игрок придерживается оптимальной смешанной стратегии, то он получит проигрыш $\leq \gamma$. При этом I игрок применяет свои чистые стратегии.

$$A_1 \quad a_{11}q_1 + \dots + a_{1n}q_n \leq \gamma$$

...

$$A_m \quad a_{m1}q_1 + \dots + a_{mn}q_n \leq \gamma$$

$$q_1 + \dots + q_n = 1 \quad q_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n$$

- Введем обозначения $y_j = q_j / \gamma$ $j = 1..n$
- Разделим неравенства на γ

$$a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1$$

...

$$a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1$$

$$q_1 + \dots + q_n = 1 \quad q_j \geq 0 \quad j = 1..n$$

$$F_1 = y_1 + \dots + y_n \rightarrow \max$$

II игрок стремится уменьшить γ и следовательно F_1 надо максимизировать

- Таким образом, решение матричных игр $m \times n$ сводится к решению пары двойственных симметричных задач.

$$F = \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min$$

$$F_1 = \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1 \quad j = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1 \quad i = 1..m$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1..m$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1..n$$

- Решая эти задачи найдем оптимальное решение $\mathbf{x}^* = (x_1^* \dots x_m^*)$ $\mathbf{y}^* = (y_1^* \dots y_n^*)$
- Отсюда найдем цену игры:

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n y_j}$$

$$p_i = x_i^* \cdot \gamma \quad q_j = y_j^* \cdot \gamma$$

Задача

- Найти оптимальную стратегию и цену игры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \alpha = 0$$
$$2 \quad 2 \quad 1 \quad \beta = 1$$

$\alpha \neq \beta$ нет седловой точки

I игрок

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$2x_1 + \quad x_3 \geq 1$$

$$x_2 \quad \geq 1$$

II игрок

$$F_1 = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$y_1 + y_3 \leq 1$$

$$2y_1 + y_2 \leq 1$$

Решаем симплекс методом

$$F_1 = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

$$y_1 + 2y_2 + \quad y_4 = 1$$

$$y_1 + \quad y_3 + y_5 = 1$$

$$2y_1 + y_2 \quad + y_6 = 1$$

			1	1	1	0	0	0
базис	ΔC	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A4	0	1	1	2	0	1	0	0
A5	0	1	1	0	1	0	1	0
A6	0	1	2	1	0	0	0	1
		0	-1	-1	-1	0	0	0

A2	1	0,5	0,5	1	0	0,5	0	0
A5	0	1	1	0	1	0	1	0
A6	0	0,75	1,5	0	0	-0,5	0	1
		0,5	-0,5	0	-1	0,5	0	0

A2	1	0,5	0,5	1	0	0,5	0	0
A3	1	1	1	0	1	0	1	0
A6	0	0,75	1,5	0	0	-0,5	1	1
		1,5	0,5	0	0	0,5	1	0

Ответ

- $y^* = (0; 0,5; 1)$
- $X^* = (0,5; 1; 0)$
- **$\gamma = 1/1,5 = 0,66 = 2/3 \quad \alpha \leq \gamma \leq \beta$**
- $q_B^* = (0; 1/3; 2/3) \quad p_A^* = (1/3; 2/3; 0)$

Вопросы

1. Каковы основные термины и определения теории игр?
2. Какие классы игр можно выделить?
3. Определите антагонистическую матричную игру.
4. Каков принцип минимакса?
5. Когда следует использовать смешанные стратегии и как их найти?
6. Каков геометрический метод решения игры?
7. Как найти решение с помощью симплекс-метода?