Теорема Гаусса

Поток вектора напряженности электрического поля.

У электростатического поля можно выделить два важных свойства.

Эти свойства связаны с ***потоком вектора напряженности*** $\vec{E}$ и его ***циркуляцией***.

Поток вектора напряженности электростатического поля и циркуляция вектора напряженности являются двумя важнейшими характеристиками всех векторных полей.

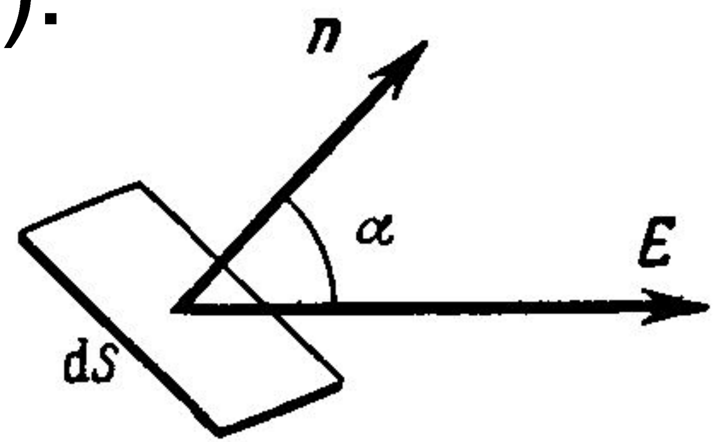
Поток dΦ вектора $\vec{E}$ сквозь площадку dS равен

$$d\Phi = E_n\, dS = E\, dS \cos\alpha$$

Если имеется некоторая произвольная поверхность $\vec{S}$, то поток вектора E сквозь нее

$$\Phi = ES\cos(\widehat{\vec{E}\vec{n}}).$$

$$\Phi = \int_S \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}}$$



Поток вектора напряженности электростатического поля - величина алгебраическая: она зависит не только от конфигурации поля $\vec{E}$, но и от выбора направления нормали.

В случае замкнутой поверхности, нормаль принято брать направленной наружу области, охватываемой этой поверхностью.

Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность обладает специфическим свойством:

поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность S равен суммарному электрическому заряду, находящемуся внутри поверхности S, деленному на величину ε_0.

Это утверждение составляет физический смысл *теоремы Гаусса.*

Реальное электростатическое поле обусловлено совокупностью точечных зарядов (принцип суперпозиции), для каждого из которых справедливо соотношение

$$\Phi = \oint_S \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathrm{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

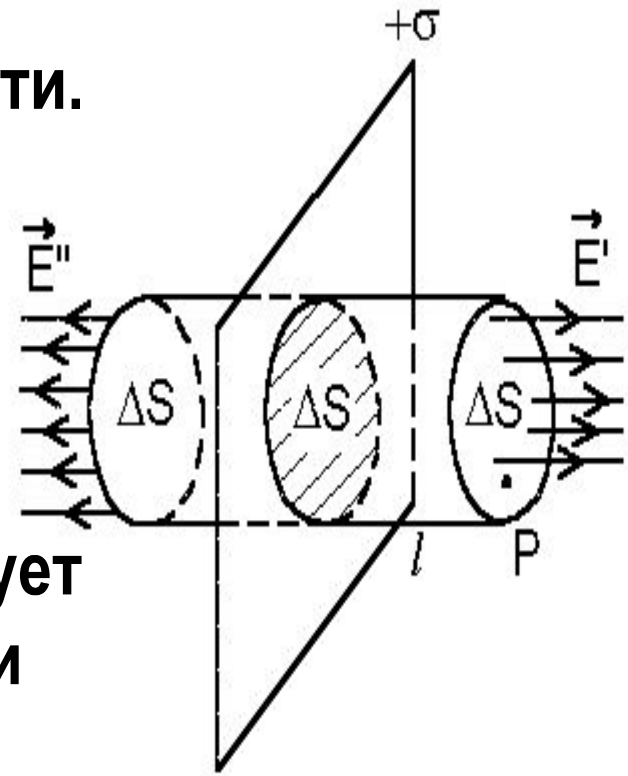
для произвольной замкнутой поверхности S.

Для упрощения математических расчетов удобно заменить истинное дискретное распределении зарядов непрерывным распределением. При переходе к непрерывному распределению, вводят понятие о плотности зарядов (линейной λ, поверхностной σ или объемной ρ):

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl}$$

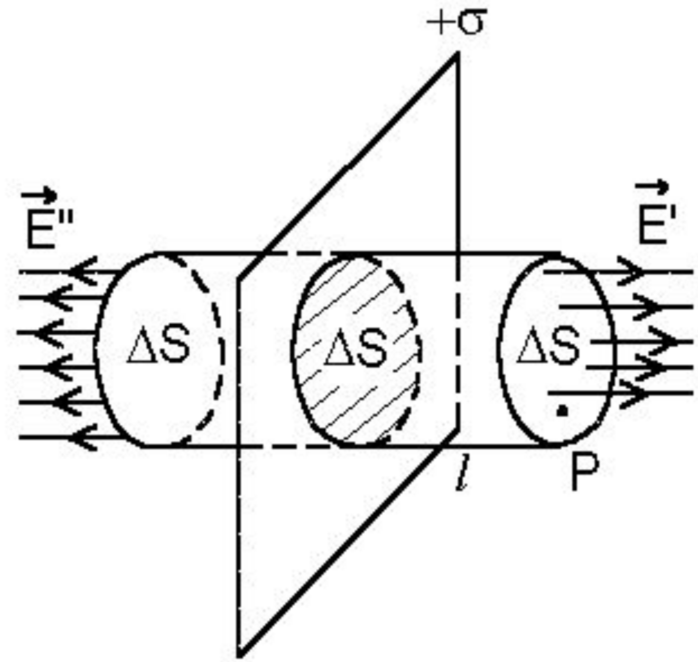
1.Равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда +σ.

Вектор E может быть только перпендикулярным заряженной плоскости. В симметричных относительно этой плоскости точках вектор E одинаков по модулю и противоположен по направлению.



В качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр с основаниями параллельными плоскости.

Поток сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю, и поэтому полный поток через всю поверхность цилиндра будет 2EΔS, где ΔS – площадь каждого торца цилиндра. Внутри цилиндра заключен заряд σΔS. Согласно теореме Гаусса



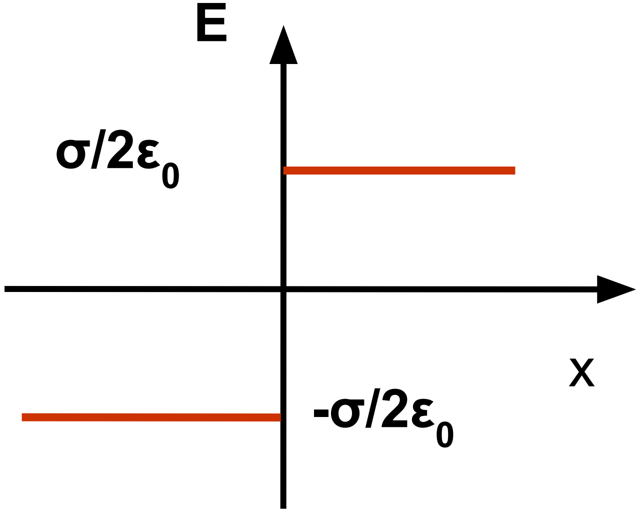
$2E\Delta S = \sigma\Delta S$

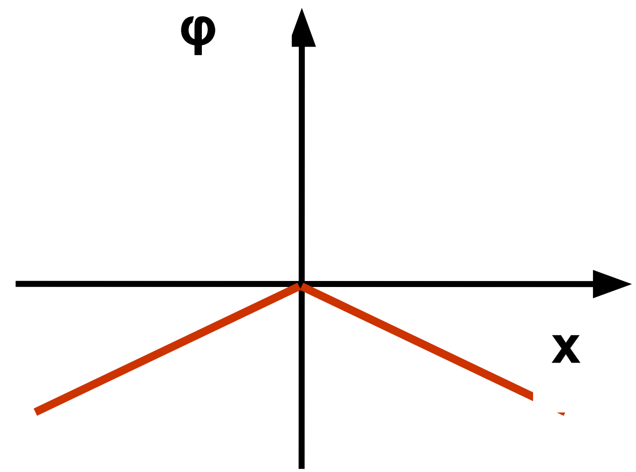
откуда получаем:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Напряженность и потенциал поля заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда +σ

σ>0





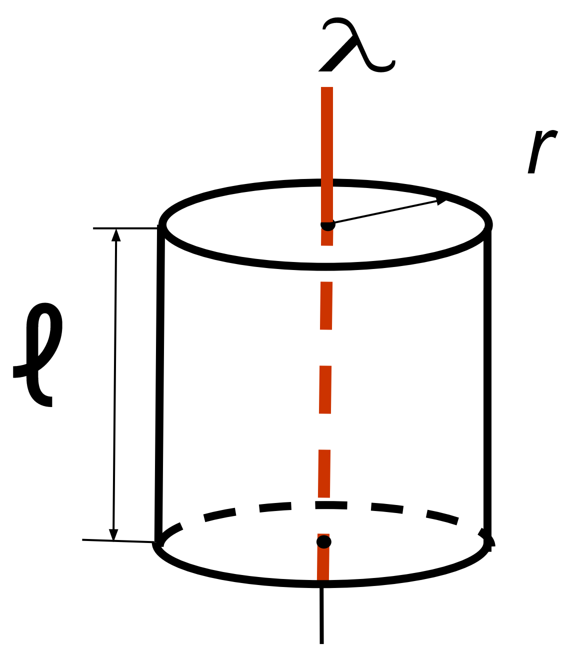
Напряженность поля плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Потенциал поля плоскости

$$\varphi = -\frac{\sigma |x|}{2\varepsilon_0}.$$

2.Поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной с линейной плотностью λ нитью



Поток через боковую поверхность цилиндра равен

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r \ell.$$

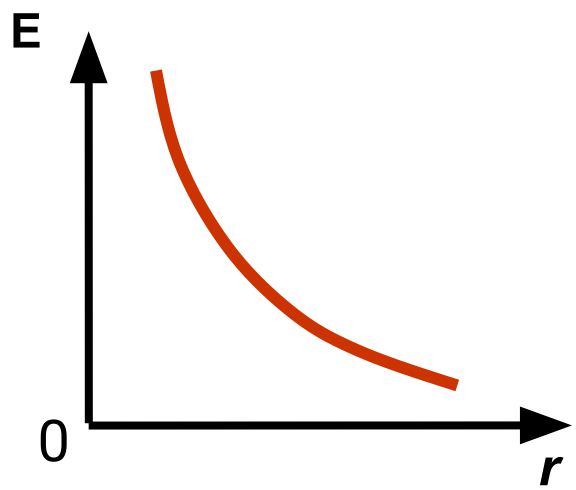
Заряд, находящийся внутри цилиндра, будет равен $q = \lambda \ell.$

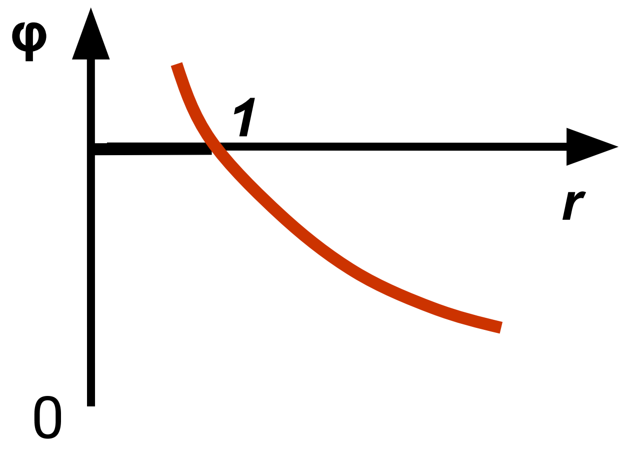
Применяя теорему Гаусса, получим

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0},$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Напряженность и потенциал поля бесконечной равномерно заряженной с линейной плотностью λ нитью





Напряженность поля нити

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля нити

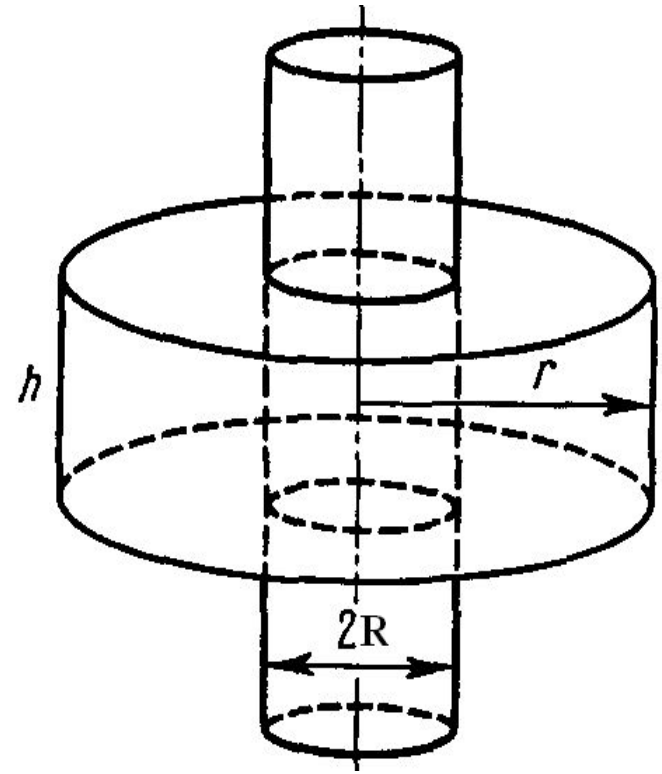
$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

3.Поле бесконечного круглого цилиндра радиуса R

3а.Поле бесконечного круглого цилиндра, заряженного равномерно так, что на единицу его длины приходится заряд λ.

Вектор E в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора E зависит только от расстояния r до оси цилиндра.

Замкнутую поверхность надо взять в форме коаксиального прямого цилиндра.

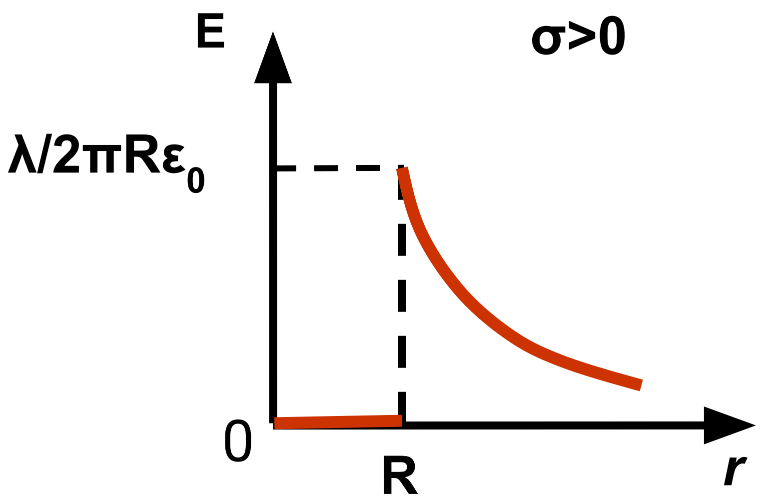


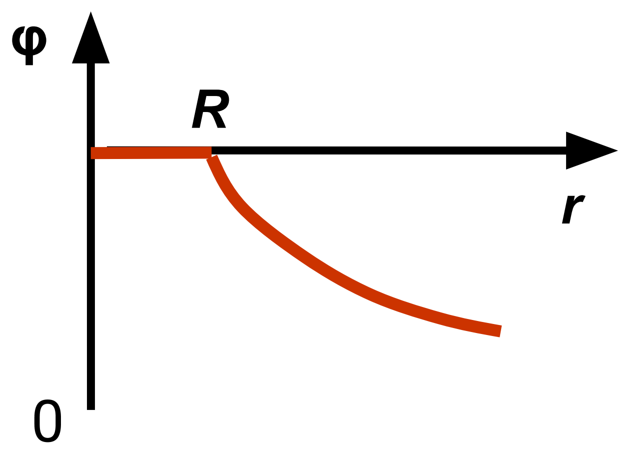
Поток вектора напряженности E сквозь торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность EΔS, где ΔS – площадь боковой поверхности цилиндра ΔS=2πrh, r – радиус боковой поверхности цилиндра, h – его высота.

По теореме Гаусса для случая r>R (R – радиус бесконечного круглого цилиндра) имеем E2πrh= $\lambda h/\varepsilon_0$, откуда:

$$\mathrm{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \mathrm{r}}$$

3a.Напряженность и потенциал поля бесконечного равномерно заряженного с линейной плотностью λ цилиндра





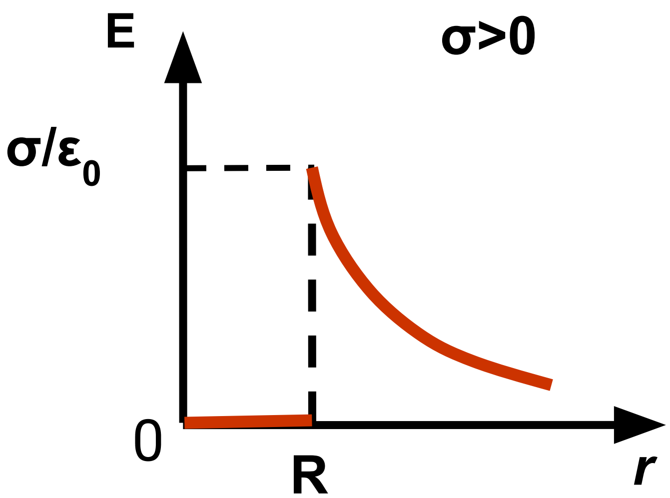
Напряженность поля цилиндра

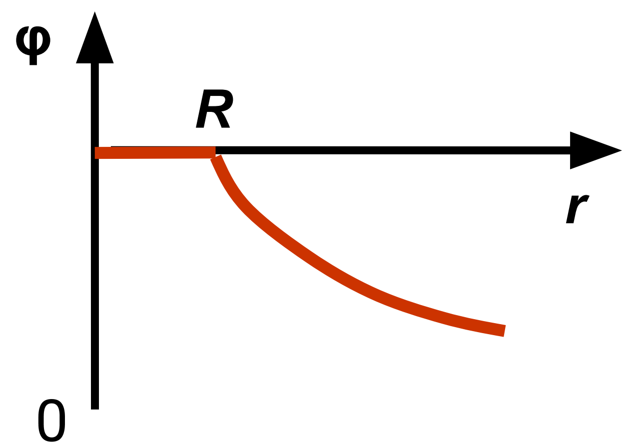
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля цилиндра

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

3б.Напряженность и потенциал поля бесконечного заряженного цилиндра с поверхностной плотностью заряда σ





Напряженность поля цилиндра

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля цилиндра

$$\varphi = \left(\sigma R \lg r / R\right) / \varepsilon_0 .$$

4.Поле полой сферической поверхности, заряженной равномерно зарядом q.

Это поле центрально-симметрично – направление вектора E в любой точке проходит через центр сферы, а модуль зависит только от расстояния до центра сферы. При такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности надо взять концентрическую сферу.

Пусть ее радиус r>R, тогда по теореме Гаусса

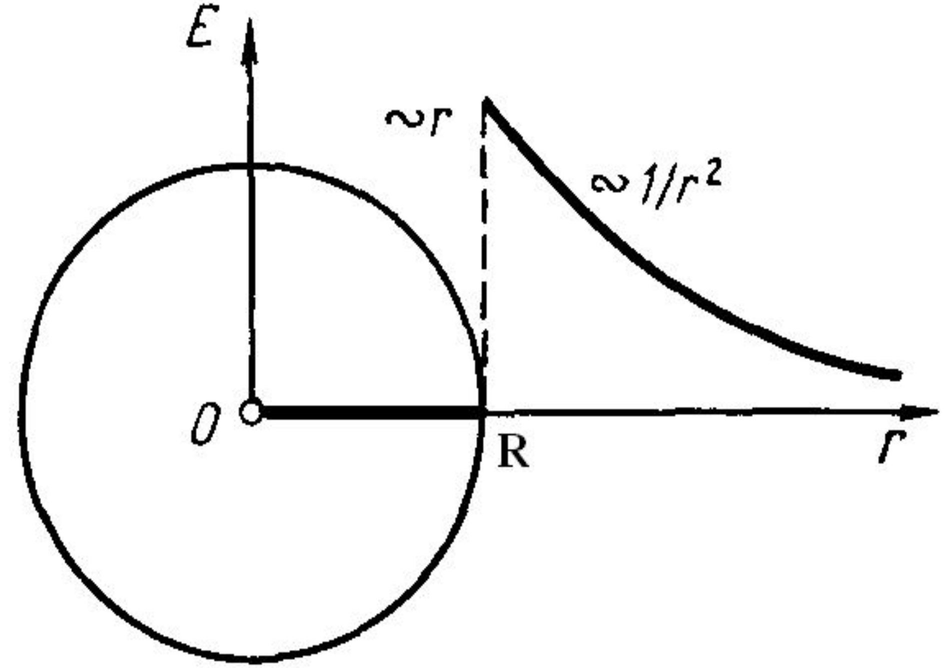
$$E \cdot 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

откуда

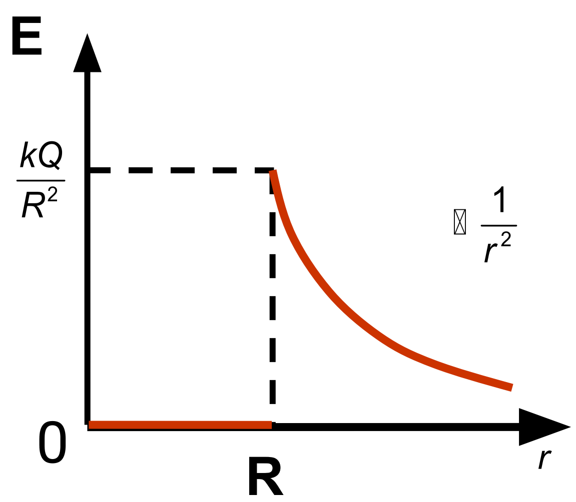
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

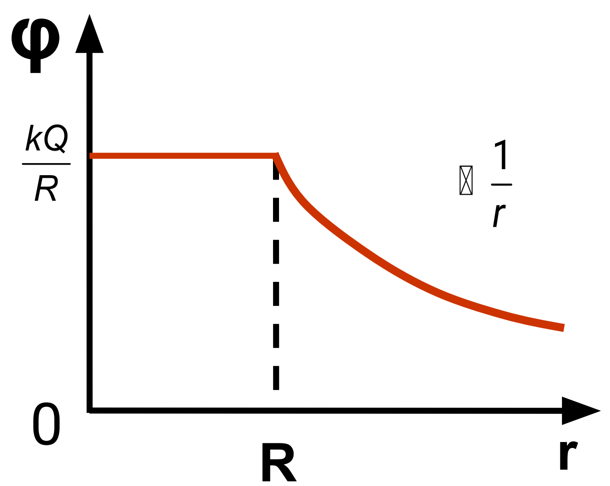
Если $r<R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области всюду $E=0$, т.е. внутри равномерно заряженной сферической поверхности электрическое поле отсутствует.

Вне этой поверхности поле убывает с расстоянием по такому же закону, как у точечного заряда.



Напряженность и потенциал поля равномерно заряженной проводящей сферы радиуса R





$$E = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad r < R; \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{если} \quad r > R. \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \; r < R.$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \; r > R.$$

5.Поле заряженной сферы с объемной плотностью заряда ρ

Поле такой сферы тоже обладает центральной симметрией. Для поля вне сферы получается тот же результат, что и в случае поверхностно заряженной сферы. Однако для точек внутри результат будет другой. Сферическая поверхность радиуса r (r<R) заключает в себя заряд равный

$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

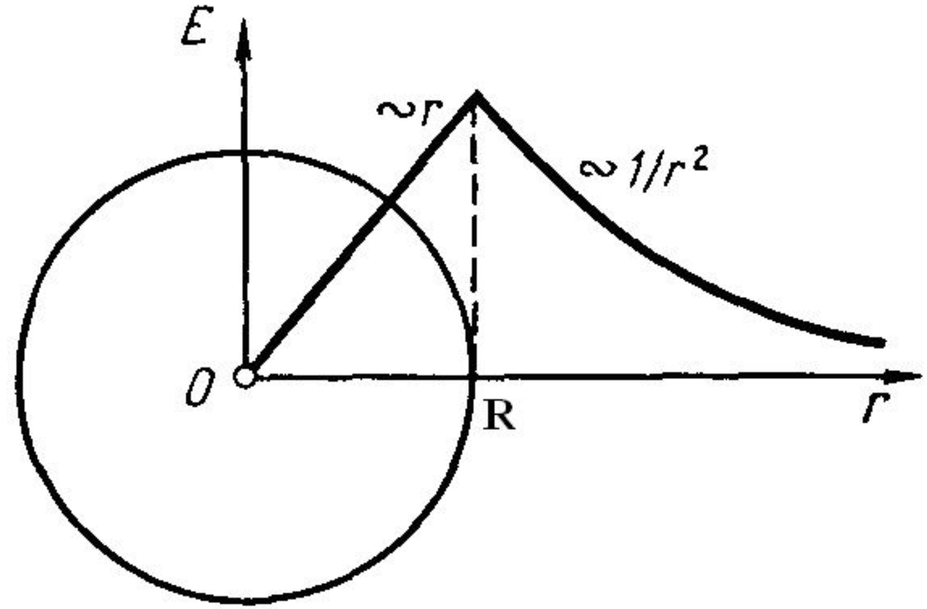
Теорема Гаусса для такой поверхности запишется в виде:

$$\mathrm{E} \cdot 4\pi \mathrm{r}^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi \mathrm{r}^3$$

Откуда, заменяя ρ через $\dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

получаем $\mathrm{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\mathrm{q}}{\mathrm{R}^3} \mathrm{r}$

Внутри сферы напряженность поля растет линейно с расстоянием r от центра сферы. Вне сферы напряженность убывает по такому же закону, как и у точечного заряда.



Потенциал

При перемещении пробного заряда q в электрическом поле электрические силы совершают работу. Оказывается, что ***работа сил электростатического поля** при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории, а определяется только положением начальной и конечной точек и величиной заряда.* Из механики известно, что такое поле называется консервативным.

Если в качестве пробного заряда, переносимого из точки 1 в точку 2 поля E, взять единичный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении dl равна Edl, а вся работа сил поля на пути от точки 1 до точки 2 определяется как

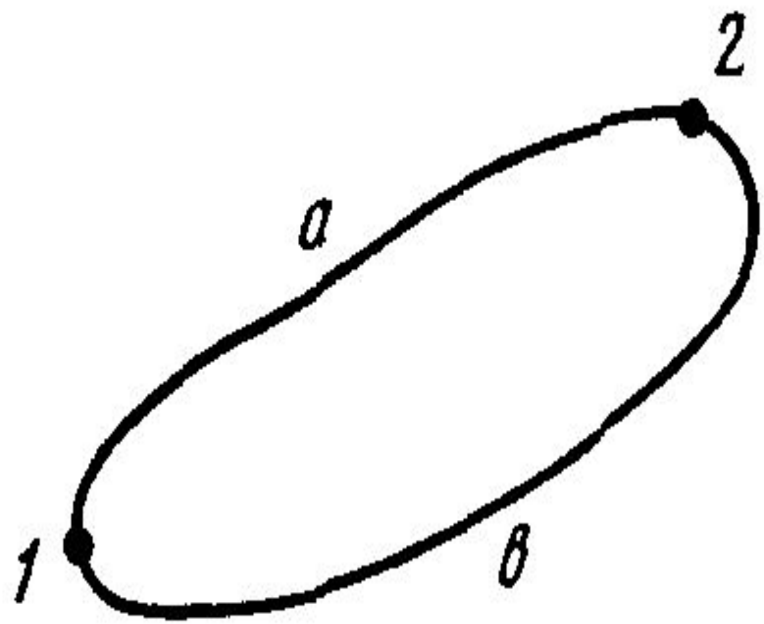
$$\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l}$$

Этот интеграл берется по некоторому пути (линии), поэтому его называют линейным.

Интеграл данного вида, взятый по замкнутому пути, называется циркуляцией вектора **Е и обозначается** $\oint$

Теорема о циркуляции вектора Е гласит: ***циркуляция вектора Е в любом электростатическом поле равна нулю*** **т.е.**

$$\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$$



Поле, обладающее таким свойством, называется *потенциальным*.
Теорема о циркуляции вектора Е позволяет сделать вывод, что линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.

Тело находящееся в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля. Следовательно, работа сил электростатического поля может быть представлена как разность значений потенциальной энергии, которыми обладал заряд в точках 1 и 2 поля E.

В электростатическом поле существует некоторая скалярная функция координат φ(r), убыль которой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

Так определенная величина φ(r) называется потенциалом поля.

Из сопоставления данного выражения с выражением для работы сил потенциального поля (которая равна убыли потенциальной энергии частицы в поле) можно сказать, что потенциал – это величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля.

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{r}}$$

Потенциал системы неподвижных точечных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{\mathrm{q_i}}{\mathrm{r_i}}$$

Связь между φ и E можно установить с помощью соотношения

$$-\mathrm{d}\varphi = \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l}$$

Пусть перемещение dl параллельно оси X, тогда $dl=e_x dx$, где e_x – орт оси X; dx – приращение координаты x. В этом случае

$$\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{E}\mathbf{e}_x\mathrm{dx} = \mathrm{E}_\mathrm{x}\mathrm{dx}$$

Получим

$$\mathrm{E}_\mathrm{x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}$$

Или для вектора напряженности электрического поля E:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{z}} \mathbf{e}_z \right)$$

Величина, стоящая в скобках есть градиент потенциала φ (grad φ или ∇ φ).

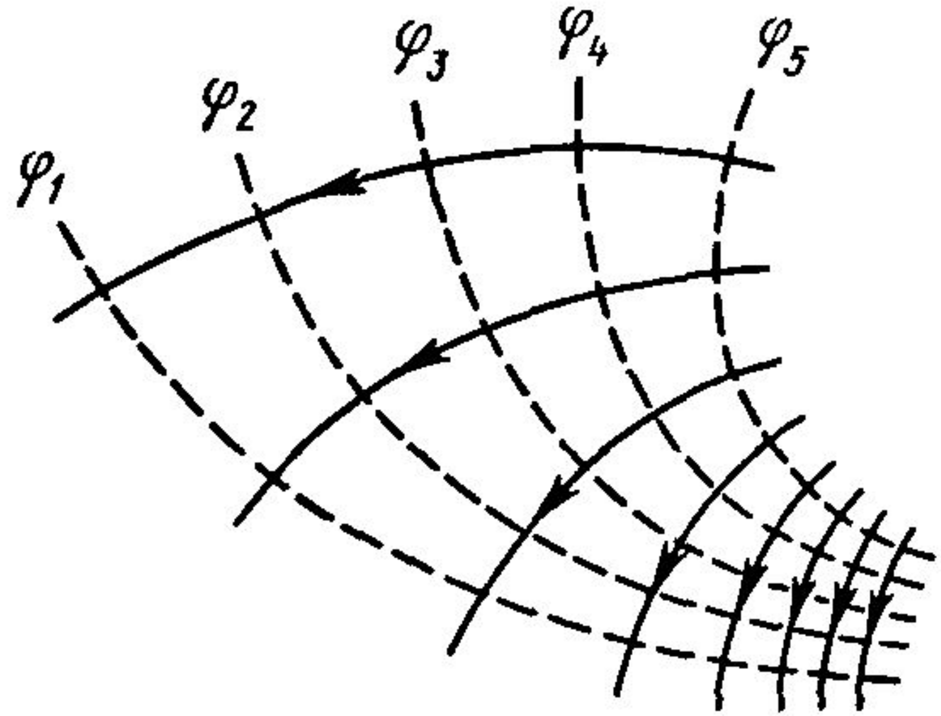
Окончательно связь вектора E и потенциала φ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

Распределение потенциала в пространстве наглядно изображают с помощью *эквипотенциальных поверхностей* – поверхностей во всех точках, которых потенциал имеет одно и то же значение.

Вектор Е направлен в каждой точке по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциала. Эквипотенциальные поверхности проводятся так, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была бы одинаковой..

По густоте эквипотенциальных поверхностей можно наглядно судить о значении напряженности поля в разных точках поля. Там где эти поверхности расположены гуще, там напряженность поля больше.



1) Зная потенциал φ(r), можно предельно просто вычислить работу сил поля припеeconвремещении точечного заряда из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

2) Во многих случаях оказывается, что для нахождения напряженности Е электрического поля легче сначала подсчитать потенциал и затем взять градиент от него, чем непосредственно вычислять Е. Действительно, для вычисления φ нужно взять один интеграл, а для вычисления Е – три (так как Е вектор).