Экономическая интерпретация двойственных задач ЛП.

- Пусть n – количество производимых продуктов,
- m – количество ресурсов потребляемых при их производстве,
- a_{ij} – норма расхода i- го ресурса на производство единицы j –го продукта, b_i – запасы i –го ресурса,
- c_j – стоимость единицы j – го продукта. x_j –количество продукта j

- $c_1x_1+....+c_nx_n$ - общая стоимость производимых продуктов.

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i$$

-общие затраты i-го ресурса, они не должны превышать bi

Получаем следующую задачу ЛП.:

- Отыскать оптимальный план производства **$x^*=(x^*_1,\dots.x^*_n)$,**
- при котором целевая функция **$F(x)=c_1x_1+\dots+c_nx_n$** $\rightarrow$ **max** подсчитывает общую стоимость производимых продуктов при системе ограничений на ресурсы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0 \qquad\qquad (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Сформулируем двойственную задачу к данной исходной

- Пусть $\mathbf{y_i}$ – стоимость i –го ресурса,
- тогда $\mathbf{b_1y_1+....+b_my_m}$ - стоимость ресурсов,
- а стоимость затрат на производство j-го продукта должна быть не меньше, чем стоимость этого продукта $\mathbf{c_j}$.

Получаем следующую задачу.

- Найти оптимальный план $\mathbf{y^*=(y^*_1,\ldots.y^*_m)}$ при котором общая стоимость запасов ресурсов будет минимальной,
- $\mathbf{Z(y)=b_1y1+\ldots.+b_my_m \rightarrow min}$
- а стоимость ресурсов на производство продуктов не превышает стоимости продукта

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{in}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n \\ y_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \end{cases}$$

Экономическая интерпретация 1-й теоремы двойственности

- *При оптимальном плане* $\mathbf{x^*=(x^*_1,\ldots.x^*_n)}$ общая стоимость произведенных продуктов должна совпадать с общей стоимостью ресурсов.

$$\mathbf{c_1x_1+\ldots.+c_nx_n = b_1y_1+\ldots.+b_my_m}$$

Экономическая интерпретация 2-й теоремы двойственности

- Если x* y* оптимальные планы пары двойственных задач, то в этом случае должно выполняться условие жесткости.

$$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i - c_j) \cdot x^*_j = 0 \quad j = \overline{1,n}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) \cdot y^*_i = 0 \quad i = \overline{1,m}$$

- Если для какого-либо j будет выполняться

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i > c_j$$

то стоимость затрат при производстве продукта j > стоимости единицы продукта $\mathbf{c_j}$, т.е. производство данного продукта **нерентабельно**, в оптимальном плане $\mathbf{x_j = 0}$ (этот продукт в оптимальный план не входит)

- Если $x_j > 0$, то j –й продукт входит в оптимальный план производства

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i = c_j$$

общая стоимость затрат совпадает со стоимостью единицы этого продукта **c_j**, следовательно, производство данного продукта **рентабельно.**

Рассмотрим второе соотношение

- Если для некоторого i выполняется условие $y^*_i > 0 \quad i=1..m$,
- то i –й ресурс обладает положительной стоимостью, следовательно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \qquad i = \overline{1,m}$$

i-й ресурс будет использоваться полностью.

- Если для какого-либо i выполняется

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$$

следовательно запасы i-го ресурса используются не полностью., т.е. $\mathbf{y_i = 0}$ т. е. относительная стоимость ресурса=0

- *Значения переменных* $\boldsymbol{y_i}$ *в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой* ***оценки*** *влияния свободных членов* b_i *системы ограничений – неравенств прямой задачи на величину* $\boldsymbol{\Delta f(x^*)=\Delta b_i y_i}$

- Решая задачу ЛП симплексным методом, мы одновременно решаем двойственную задачу ЛП.
- Значения переменных двойственной задачи y_i в оптимальном плане называют **двойственными оценками.**

- Кроме нахождения оптимального решения д.б. получена информация о возможных изменениях параметров системы.
- Эту часть исследования обычно называют **анализом модели на чувствительность**. Он необходим тогда, когда некоторые характеристики системы не поддаются точной оценке

Экономико-математический анализ решений осуществляется в 2-х основных направлениях:

1. Вариантные расчеты по модели с сопоставлением различных вариантов плана
2. Анализ каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.

Вариантные расчеты

- Вариантные расчеты при **неизменной структуре** модели (постоянном составе неизвестных, способов производства, ограничений задачи и одинаковом критерии оптимизации), но **с изменением численной величины конкретных показателей модели**.
- Вариантные расчеты при **варьировании элементов самой модели**: изменении критерия оптимизации, добавлении новых ограничений на ресурсы или на способы производства их использования, расширения множества вариантов и т.д.

При анализе решения с помощью двойственных оценок, используют их свойства

- Свойство1. Оценки как мера дефицитности ресурсов и продукции.
- Свойство2. Оценки как мера влияния ограничений на функционал.
- Свойство 3. Оценки как инструмент определения эффективности отдельных вариантов.
- Свойство 4. Оценки как инструмент балансирования суммарных затрат и результатов.

Вопросы

1. Экономическая интерпретация 1-й теоремы двойственности
2. Экономическая интерпретация 2-й теоремы двойственности
3. Что такое двойственные оценки?
4. Что такое экономико-математический анализ? В каких направлениях он идет?
5. Что такое вариантные расчеты?