

# **Экономическая интерпретация двойственных задач ЛП.**

- Пусть  $n$  – количество производимых продуктов,
- $m$  – количество ресурсов потребляемых при их производстве,
- $a_{ij}$  – норма расхода  $i$ -го ресурса на производство единицы  $j$ -го продукта,  $b_i$  – запасы  $i$ -го ресурса,
- $c_j$  – стоимость единицы  $j$ -го продукта.  $x_j$  – количество продукта  $j$

- $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  - общая стоимость производимых продуктов.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

-общие затраты  $i$ -го ресурса, они не должны превышать  $b_i$



# Сформулируем двойственную задачу к данной исходной

- Пусть  $y_i$  – стоимость  $i$  –го ресурса,
- тогда  $b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$  - стоимость ресурсов,
- а стоимость затрат на производство  $j$ -го продукта должна быть не меньше, чем стоимость этого продукта  $c_j$ .



# Экономическая интерпретация 1-й теоремы двойственности

- При оптимальном плане  $\mathbf{x}^*=(x^*_1, \dots, x^*_n)$  общая стоимость произведенных продуктов должна совпадать с общей стоимостью ресурсов.

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$$

# Экономическая интерпретация 2-й теоремы двойственности

- Если  $x^*$   $y^*$  оптимальные планы пары двойственных задач, то в этом случае должно выполняться условие жесткости.

$$\left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) \cdot x_j^* = 0 \quad j = \overline{1, n}$$

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) \cdot y_i^* = 0 \quad i = \overline{1, m}$$



- Если для какого-либо  $j$  будет выполняться

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j$$

то стоимость затрат при производстве продукта  $j$   $>$  стоимости единицы продукта  $c_j$ , т.е. производство данного продукта **нерентабельно**, в оптимальном плане  $x_j = 0$  (этот продукт в оптимальный план не входит)

- Если  $x_j > 0$  , то  $j$  –й продукт входит в оптимальный план производства

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$$

общая стоимость затрат совпадает со стоимостью единицы этого продукта  $c_j$ , следовательно, производство данного продукта **рентабельно**.

# Рассмотрим второе соотношение

- Если для некоторого  $i$  выполняется условие  $y_i^* > 0$   $i=1..m$  ,
- то  $i$  –й ресурс обладает положительной стоимостью, следовательно

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$i$ -й ресурс будет использоваться полностью.

- Если для какого-либо  $i$  выполняется

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i$$

следовательно запасы  $i$ -го ресурса используются не полностью., т.е.  $y_i = 0$  т. е. относительная стоимость ресурса=0

- Значения переменных  $y_i$  в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой **оценки** влияния свободных членов  $b_i$  системы ограничений – неравенств прямой задачи на величину  $\Delta f(\mathbf{x}^*) = \Delta b_i y_i$

- Решая задачу ЛП симплексным методом, мы одновременно решаем двойственную задачу ЛП.
- Значения переменных двойственной задачи  $y_i$  в оптимальном плане называют **двойственными оценками**.

- Кроме нахождения оптимального решения д.б. получена информация о возможных изменениях параметров системы.
- Эту часть исследования обычно называют **анализом модели на чувствительность**. Он необходим тогда, когда некоторые характеристики системы не поддаются точной оценке

# Экономико-математический анализ решений осуществляется в 2-х основных направлениях:

1. Вариантные расчеты по модели с сопоставлением различных вариантов плана
2. Анализ каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.



# Вариантные расчеты

- Вариантные расчеты при **неизменной структуре** модели (постоянном составе неизвестных, способов производства, ограничений задачи и одинаковом критерии оптимизации), но с **изменением численной величины конкретных показателей модели**.
- Вариантные расчеты при **варьировании элементов самой модели**: изменении критерия оптимизации, добавлении новых ограничений на ресурсы или на способы производства их использования, расширения множества вариантов и т.д.

# При анализе решения с помощью двойственных оценок, используют их свойства

- Свойство 1. Оценки как мера дефицитности ресурсов и продукции.
- Свойство 2. Оценки как мера влияния ограничений на функционал.
- Свойство 3. Оценки как инструмент определения эффективности отдельных вариантов.
- Свойство 4. Оценки как инструмент балансирования суммарных затрат и результатов.

# Вопросы

1. Экономическая интерпретация 1-й теоремы двойственности
2. Экономическая интерпретация 2-й теоремы двойственности
3. Что такое двойственные оценки?
4. Что такое экономико-математический анализ? В каких направлениях он идет?
5. Что такое вариантыные расчеты?