ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

План темы «Транспортная задача»:

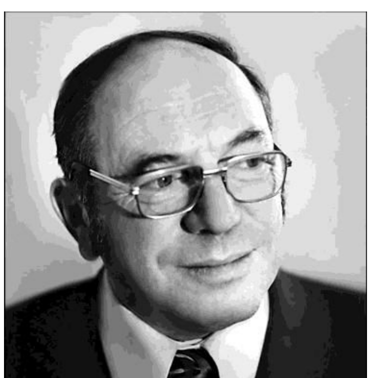
1. Постановка задачи, основные определения
2. Закрытая и открытая транспортная задача
3. Метод северо-западного угла
4. Метод минимального тарифа
5. Метод потенциалов

Цель транспортной задачи - разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок.

Исторические этапы исследований транспортной задачи

I.этап. Задача национального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж в железнодорожных перевозках при наличии не более двух поставщиков
Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании. - Социалистический транспорт, 1939, № 9.

I.этап. Одну из разновидностей транспортной задачи в 1941 г. Поставил американец Хичкок. Детально разобрал **Тьяллинг Чарльз Купманс**, который работал членом Объединенного комитета перевозок во время Второй мировой войны.



III этап. Первый общий, законченный метод решения транспортной задачи («метод потенциалов») разработан **Леонидом Канторовичем**.
Канторович Л. В., Гавурин М. К., Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков, Сб. ст. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, АН СССР, 1949

На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

1. Необходимо найти оптимальную структуру транспортных средств, обеспечивающую минимизацию издержек на транспортировку.

эксплуатационные и экономические показатели зависят от состава транспорта

На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

2. Необходимо установить такое распределение грузов между имеющимися в хозяйстве видами транспорта, при котором затраты на перевозки всего объёма грузов были бы минимальными

эффективность использования различного транспорта на одной и той же работе не всегда одинакова

На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

3. Задача прикрепления потребителей к поставщикам

экономичный план перевозок однородного груза из пункта производства в пункты потребления

минимум денежно-материальных затрат на перевозки

Минимум приведенных затрат

минимум затрат времени на перевозки

минимум объёма транспортных работ

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах отправления в количествах $a_1, a_2, \dots a_m$ единиц соответственно, необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения в количествах $b_1, b_2, \dots b_n$ единиц соответственно.

Стоимость (расстояние) перевозки единицы продукта из ***i-го*** пункта отправления в ***j-й*** пункт назначения равна c_{ij} *(стоимость доставки)* и известна для каждого маршрута.

Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из ***i-го*** пункта отправления в ***j-й*** пункт назначения.

Содержательная постановка задачи

Задача заключается в определении таких величин x_{ij} для всех маршрутов, при которых суммарная стоимость или расстояние перевозок были бы минимальными.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Обозначения:

m – количество пунктов отправления (поставщиков);

i – номер поставщика;

n – количество пунктов назначения (потребителей);

j – номер потребителя;

a_i – объем однородного груза i-го поставщика (запасы);

b_i – объем однородного груза, требуемого j-ому потребителю (спрос);

c_{ij} – стоимость доставки единицы груза i-го поставщика j-ому потребителю;

x_{ij} – количество груза, доставляемое от i-го поставщика к j-му потребителю;

потребители

поставщики

Потреб. / Поставщ.	***1***	…	***j***	…	***n***	***Запас***
1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Спрос	b_1	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a = \sum_{j=1}^{n} b$

стоимость доставки единицы груза от *i-го* поставщика к *j-ому* потребителю

Стоимость перевозок можно выразить так

$$C = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to min$$

или более компактно

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

это **целевая функция**, которая позволяет определить численное значение критерия оптимальности на всех этапах расчетов и в оптимальном плане

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:

1 условие. Вывоз всего груза от каждого поставщика:

$$
\begin{array}{l}
x_{11} + \ldots + x_{1j} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_{i1} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} = a_i \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_{m1} + \ldots + x + \ldots + x_{mn} = a_m
\end{array}
$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$ где $i = 1 \ldots m$

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:

2 условие. Удовлетворение спроса каждого потребителя:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & + & \dots & + & x_{i1} & + & \dots & + & x_{m1} & = b_1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
x_{1j} & + & \dots & + & x_{ij} & + & \dots & + & x_{mj} & = b_j \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
x_{1n} & + & \dots & + & x_{in} & + & \dots & + & x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$ где $j = 1 \dots m$

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:

3 условие. Равенство запаса и спроса:

$$a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_j + \ldots + b_n$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Равенство запаса и спроса есть необходимое и достаточное условие совместимости и, следовательно, разрешимости транспортной задачи.

Закрытая модель транспортной задачи

Открытая модель транспортной задачи

Спрос равен запасу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Спрос не равен запасу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Модель закрытой транспортной задачи

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Открытая модель транспортной задачи

1. **Запас превышает спрос** $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

2. **Спрос превышает запас** $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

1. Запас превышает спрос

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

При ограничениях:

если $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Не требуется весь имеющийся груз вывозить от поставщика, после удовлетворения спроса часть его может остаться не вывезенной

Потребности (спрос) каждого потребителя необходимо удовлетворить полностью

1. Запас превышает спрос

Решение

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

$$c_{n+1} = 0$$

Фиктивный потребитель

При введении фиктивного потребителя открытая модель преобразуется в закрытую

2. Спрос превышает запас

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

При ограничениях:

если $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \; j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

2. Спрос превышает запас

Решение

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}$$

Фиктивный поставщик

«Метод северо-западного угла» на примере:

Пример:

С 3-х баз требуется доставить в магазины однородный товар. Пусть на базе А1 имеется 50 единиц груза, на базе А2 – 40 единиц, на базе А3 – 20 единиц. Указанный товар нужно отгрузить 4-м потребителям: В1, В2, В3, В4, потребности которых составляют соответственно 35, 25, 30, 25 единиц товара. Стоимость перевозки от базы до потребителей представлена в таблице:

	B1	***B2***	***B3***	***B4***
A1	3	2	4	6
A2	2	3	1	2
A3	3	2	7	4

Требуется ***составить такой план перевозок, который обеспечит минимальные транспортные расходы.***

Решение:

1 этап. Составление распределительной таблицы

	B1	B2	B3	B4	Наличие товара
A1	3	2	4	6	50
A2	2	3	1	2	40
A3	3	2	7	4	20
Потребность в товаре	30	25	30	25	110

Решение:

2 этап. ***Составление модели***

Целевая функция (*стоимость всей перевозки*):

$$C = 3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 3x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \to min$$

Проверяем задачу на разрешимость: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 50 + 40 + 20 = 110, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 30 + 25 + 30 + 25 = 110 =$$

Ограничения по поставкам

x11 + x12 + x13 + x14 = 50
x21 + x22 + x23 + x 24 = 40
x31 + x32 + x33 + x34 = 20

$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}$

Ограничения по потребителям

x11 + x21 + x31 = 30
x12 + x22 + x32 = 25
x13 + x23 + x33 = 30
x14+ x24 + x34 = 25

<u>*Условимся:*</u>

1. Построение опорных решений системы, а также преобразования этих решений будут производиться в таблицах.
2. Если базисное неизвестное $x_{ij} = a$, то это число записывается в соответствующей клетке (i, j), и эта клетка называется <u>*загруженной*</u>, если же переменная не базисная, то $x_{ij} = 0$ и соответствующая клетка остается свободной

3 этап. *Составление плана*

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

min (50, 30) = 30

min (25, 20) = 20

	B1	B2	B3	B4	*Наличие товара*
A1	3 **30**	2 **20**	4	6	50-30 = **20** **50**
A2	2	3	1	2	**40**
A3	3	2	7	4	**20**
Потребность в товаре	30-30 = **0**	25 - 20 = **5**	**30**	**25**	**110**

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	*Наличие товара*
A1	3 **30**	2 **20**	4	6	**50**
A2		**5**	1	2	**40**
A3	3	2	7	4	**20**
Потребность в товаре	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

min (5, 40) = 5

30-30 = **0**

25 - 20 = **5**

<u>Метод северо-западного угла заключается</u> в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	***Наличие товара***
A1 **3**	3 **0**	2 **20**	4	6	**50**
A2		**5**	1 **30**	2	40-5 = **35** **40**
A3	3	2	7	4	**20**
Потребность в товаре	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

min (5, 40) = 5

30-30 = **0**

5 - 5 = **0**

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	*Наличие товара*
A1	3 **30**	2 **20**	4	6	**50**
A2	2	3 **5**	1 **30**	2 **5**	40-35 = **5** **40**
A3	3	2	7	4	**20**
Потребность в товаре	**30** 30-30 = **0**	**25** 5 - 5 = **0**	**30** 30 - 30 = **0**	**25**	**110**

min (…5) = 5

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	*Наличие товара*
A1	3 **30**	2 **20**	4	6	**50**
A2	2	3 **5**	1 **30**	2 **5**	**40**
A3	3	2		4 **20**	**20**
Потребность в товаре	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

min (25, 20) = 20

30-30 = **0**

5 - 5 = **0**

35 - 35 = **0**

25 - 25 = **0**

Исчерпаны все запасы и удовлетворены все потребности

	B1	B2	B3	B4	*Наличие товара*
A1	3 **30**	2 **20**	4	6	**50**
A2	2	3 **5**	1 **30**	2 **5**	**40**
A3	3	2	7	4 **20**	**20**
Потребность в товаре	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Условия разрешимости задачи:

1 условие –
число загруженных клеток должно быть равно (m+n-1)

2 условие -
загруженные клетки не должны образовывать замкнутого цикла

4 этап. *Подсчет стоимости перевозки*

	B1	B2	B3	B4	***запас***
A1	3 **30**	2 **20**	4	6	**50**
A2	2	3 **5**	1 **30**	2 **5**	**40**
A3	3	2	7	4 **20**	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

$$C = 30\cdot 3 + 20\cdot 2 + 5\cdot 3 + 30\cdot 1 + 5\cdot 2 + 20\cdot 4 = 265$$

Ответ: Общие затраты на доставку всей продукции, для начального решения, составляют **265 ден. ед.**

Метод минимального тарифа учитывает величины затрат на грузоперевозки, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем стоимость перевозок при плане северо-западного угла

Этапы метода минимального тарифа

Этап 1

Выбирается клетка, имеющая минимальную стоимость перевозок (минимальный тариф). Если таких клеток более одной, то выбирается первая по порядку.

	B1	B2	B3	B4
A1	3	2	4	6
A2	2	3	1	2
A3	3	2	7	4

	B1	B2	B3	B4
A1	3	2	4	6
A2	2	3	5	2
A3	3	2	7	4

Этап 2

В клетку с наименьшим тарифом помещается наименьшее из чисел a_i или b_j

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3	2	4	6	**50**
A2	2	3	1 **30**	2	**40**
A3	3	2	7	4	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

min (30, 40) = 30

Этап 3

Затем из рассмотрения исключается строка, соответствующая поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен.

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3	2	4 -	6	**50**
A2	2	3	1 30	2	**40**
A3	3	2	7 -	4	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	min (25, 50) = 25		B3	B4	*запасы*
A1	3	2 **25**	4 -	6	**50**
A2	2	3	1 30	2	**40**
A3	3	2	7 -	4	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

40-30 = 10

Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	B1 B2	B3 B4	***запасы***		
A1	3	2 4	6 25 -		**50**
A2	**10** 2	3 1 - 30	2		**40**
A3	3	2 7	4 - -		**20**
спрос	**30**	**25 30 25**			**110**

50-25 = 25

min (30, 10) = 25

40-30 = 10

Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

min (20, 25) = 20

	B1 B2 B3 B4				*запасы*
A1	20	3 2 25 -	4	6	**50**
A2	10	2 3 - 30	1	2 -	**40**
A3		3 2 - -	7	4	**20**
спрос	**30**	**25 30**		**25**	**110**

50-25 = 25

40-10-30 =0

30-10 = 20

Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3 20	2 25	4 -	6	**50**
A2	2 10	3 -	1	2	**40**
A3	3 -	2 -	2 -	4 **20**	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25** 2	

50-45 = 5

min (2 2 0, 25) = 0

5-20 = 5

Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

min (5, 5) = 5

	B1 B4	запасы			
A1	3 20	2 25	4 -	6 **5**	**50**
A2	2 10	3 -	1 30	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	

50-45 = 5

25-20 = 5

Получается оптимальный план грузоперевозок по минимальному тарифу

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 20	2 25	4 -	6 5	**50**
A2	2 10	3 -	1 30	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Этап 5

В завершении проверяется число загруженных клеток $(m + n - 1)$.

Если число загруженных клеток будет меньше, то следует загрузить нулем клетку с наименьшим тарифом, но такую, чтобы она не образовывала замкнутого цикла.

Ответ:

Оптимальный опорный план грузоперевозок:

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3 20	2 25	4 -	6 5	**50**
A2	2 10	3 -	1 30	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Минимальная стоимость грузоперевозок:

$$C = 20\ 3 \bullet 25 + 2\quad 5 \bullet\ 6 + 10 \bullet 2\ + 30\ 1 \bullet\ 20 + \quad \bullet \quad + \quad \bullet\ 4 = 270$$

Метод потенциалов - процесс последовательного улучшения исходного плана грузоперевозок до оптимального

Автор метода: Л. В. Канторович 1949 год

Теорема:

Если для некоторого плана транспортной задачи можно набрать систему из $m+n$ чисел u_i, называемых потенциалами поставщика и v_j, называемыми потенциалами потребителя, удовлетворяющим условиям

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0$$

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0,$$

то план оптимальный.

Экономический смысл выражения

$\mathbf{v}_j - u_i = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$

Для поставщиков и потребителей, между которыми запланированы перевозки, разность потенциалов совпадает с затратами на транспортировку единицы груза.

Экономический смысл выражения $v_j - u_i \le c_{ij}$, если $x_{ij} = 0$

Для всех остальных пар поставщиков и покупателей, между которыми перевозки не запланированы, разности потенциалов не превосходят затраты по транспортировке.

Если план перевозок *оптимален*, то можно присвоить грузам в пунктах отправления и пунктах назначения потенциалы при которых перевозка из любого пункта отправления в любой пункт назначения не могла дать «прибыль», и чтобы в то же время перевозки, внесенные в план, являлись безубыточными

Экономический смысл потенциалов

Определения:

1. ***Набор*** – произвольная совокупность клеток в матрице перевозок.

2. ***Цепь*** – последовательный набор клеток, в котором каждые две соседние клетки расположены в одном ряду (строке или столбце).

3. ***Цикл*** – замкнутая цепь, последняя клетка которой расположена в одном ряду с первой.

1 шаг. После того как найден исходный опорный план перевозок, каждому поставщику a_i ставится в соответствие потенциал u_i, а каждому потребителю b_j ставится в соответствие потенциал v_j

Числа u_i и v_j выбираются так, чтобы в любой загруженной клетке сумма потенциалов равнялась стоимости перевозки в этой клетке:

$$v_j + u_i = c_{ij}$$

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3 **U1+V1=3**	2 **U1+V2=2**	4 -	6 **U1+V4=6**	**50**
A2	2 **U2+V2=2**	3 -	1 **U2+V3=1**	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 **U3+V4=4**	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Предполагается, что ***U1 = 0,*** тогда

U1 = 0
U2 = 0
U3 = -2

V1 = 3
V2 = 2
V3 = 2
V4 = 6

2 шаг. Для оценки плана необходимо просмотреть ***свободные клетки***, для которых определяются косвенные тарифы $c'_{ij} = u_i + v_j$

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 20	2 25	4 -	6 5	**50**
A2	2 10	3 -	1 30	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

C'_{13} = U1+V3 = 0+1=1
C'_{22} = U2+V2 = 0+2=2
C'_{24} = U2+V4=0+6=6
C'_{31} = U3+V1=-2+3=1
C'_{32} =U3+V2=-2+2=0
C'_{33} = U3+V3= -2+1=1

3 шаг. Для каждой свободной клетки вычисляется оценка – разность между тарифом клетки и ее косвенным тарифом:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$$

План оптимален тогда, когда по каждой свободной клетке эта оценка неотрицательна.

$$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4-1=3$$

$$\Delta_{22} = C_{22} - C'_{22} = 3-2=1$$

$$\Delta_{24} = C_{24} - C'_{24} = 2-6=-4$$

$$\Delta_{31} = C_{31} - C'_{31} = 3-1=2$$

$$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} = 2-0=2$$

$$\Delta_{33} = C_{33} - C'_{33} = 7-1=6$$

Полученный план перевозок ***не является оптимальным***, так как среди оценок Δ_{ij} имеется отрицательная оценка Δ_{24}

Полученный план перевозок *не является оптимальным*, так как среди оценок Δ_{ij} имеется отрицательная оценка Δ_{24}

4 шаг. Если есть хоть одна отрицательная оценка, то план надо улучшить, то есть построить новый план.

Загружается та клетка, у которой оценка отрицательная. Если будет несколько отрицательных оценок, то выбирается клетка для загрузки, у которой отрицательная оценка наибольшая по абсолютной величине.

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3 20	2 25	4 -	6 5	**50**
A2	2 10	3 -	1 30	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

$$\Delta_{24} = C_{24} - C'_{24} = 2-6 = -4$$

Для выбранной клетки строится замкнутый цикл, то есть замкнутый путь, соединяющий выбранную незаполненную клетку с ней же самой и проходящий через заполненные клетки.

Для каждой свободной клетки существует только один цикл.

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 20	2 25	4 -	6 5	**50**
A2	2 10	3 -	1 30	2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

В каждой клетке цикла, начиная со свободной проставляются поочередно знаки «+» и «-». В клетках со знаком «-» (*четные клетки*) выбирается наименьший груз, который «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т.е. прибавляется к поставкам x_{ij} в клетках со знакам «+» (включая свободную) и вычитается в клетках со знаком «-».

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	+ 3 20	2 25	4 -	- 6 **5**	**50**
A2	- 2 10	3 -	1 30	+ 2 -	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

В результате такого перемещения груза по циклу получим новый план перевозок.

Строится новый план

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	2 5	3 -	1 30	2 5	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Вычисления по методу потенциалов повторяются с 1 этапа

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3 **U1+V1=3**	2 **U1+V2=2**	4 -	6 -	**50**
A2	2 **U2+V2=2**	3 -	1 **U2+V3=1**	2 **U2+V4=2**	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 **U3+V4=4**	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Предполагается, что ***U1 = 0,*** тогда

U1 = 0
U2 = 0
U3 = 2

V1 = 3
V2 = 2
V3 = 1
V4 = 2

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	2 5	3 -	1 30	2 5	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

$C'_{13} = U1+V3 = 0+1=1$

$C'_{14} = U1+V4 = 0+2=2$

$C'_{22} = U2+V2=0+2=2$

$C'_{31} = U3+V1=2+3=5$

$C'_{32} = U3+V2=2+2=4$

$C'_{33} = U3+V3= 2+1=3$

$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4-1=3$

$\Delta_{14} = C_{14} - C'_{14} = 6-2=4$

$\Delta_{22} = C_{22} - C'_{22} = 3-2=1$

$\Delta_{31} = C_{31} - C'_{31} = 3-5=-2$

$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} =$

$\Delta 2-4=-2$

$_{33} = C_{33} - C'_{33} = 7-3=4$

Полученный план перевозок ***не является оптимальным***, так как среди оценок Δ_{ij} имеется отрицательная оценка Δ_{31}, Δ_{32}

План необходимо улучшить и построить новый

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	2 5	3 -	1 30	2 5	**40**
A3	3 -	2 -	7 -	4 20	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Загружается та клетка, у которой оценка отрицательная.

Δ31 = С31- С'31 = 3-5=-2

Δ32 = С32 - С'32 = 2-4=-2

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	- 2 5	3 -	1 30	2 + 5	**40**
A3	+ 3 -	2 -	7 -	20 - 4	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Строится новый план

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	2 -	3 -	1 30	2 10	**40**
A3	3 5	2 -	7 -	4 15	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Предполагается, что ***U1 = 0,*** тогда

U1 = 0
U2 = -2
U3 = 0

V1 = 3
V2 = 2
V3 = 3
V4 = 4

	B1	B2	B3	B4	***запасы***
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	2 -	3 -	1 30	2 10	**40**
A3	3 5	2 -	7 -	4 15	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

$C'_{13} = U1+V3 = 0+3=3$

$C'_{14} = U1+V4 = 0+4=4$

$C'_{21} = U2+V1=-2+3=1$

$C'_{22} = U2+V2=-2+2=0$

$C'_{32} =U3+V2=0+2=2$

$C'_{33} = U3+V3= 0+3=3$

$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4-3=1$

$\Delta_{14} = C_{14} - C'_{14} = 6-4=2$

$\Delta_{21} = C_{21}- C'_{31} = 2-1=1$

$\Delta_{22} = C_{22} - C'_{22} =$

$\Delta 3-0=3$

$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} =$

$2-2=0$

Полученный план перевозок ***является оптимальным***, так как среди оценок Δ_{ij} нет отрицательных оценок

Ответ:

Оптимальный план грузоперевозок:

	B1	B2	B3	B4	*запасы*
A1	3 25	2 25	4 -	6 -	**50**
A2	2 -	3 -	1 30	2 10	**40**
A3	3 5	2 -	7 -	4 15	**20**
спрос	**30**	**25**	**30**	**25**	**110**

Минимальная стоимость грузоперевозок:

$$C = 25 \cdot 3 + 25 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + \quad \cdot \quad = 250 \text{ ден.ед.}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!