Геометрические задания В6 ЕГЭ

Презентацию выполнил:
ученик 11 класса
Бальвас Андрей
Преподаватель:
Бисимбаева Любовь Бакеевна
ГБОУ СОШ «ОЦ»
с. Августовки.

2013год

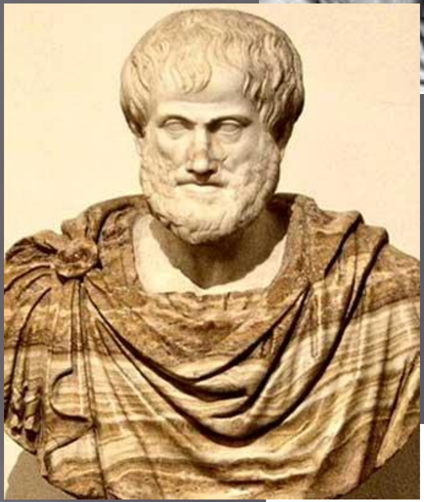
Содержание

Введение

Вопросы инновационных технологий в строительстве, космонавтике, технике невозможны без умения производить необходимые чертежи и вычисления, которые требуют знания важных и интереснейших свойств окружности.

Из истории.

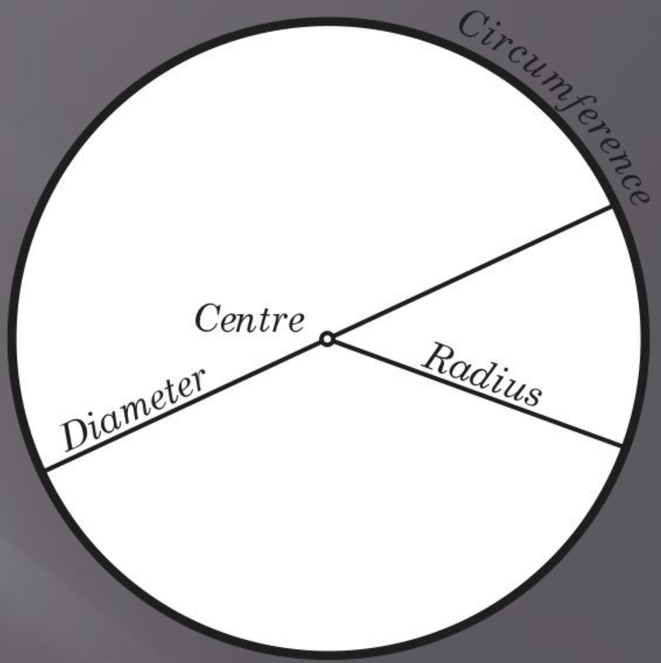
- Самая простая из всех кривых линий - окружность. Это одна из древнейших геометрических фигур. Философы древности придавали ей большое значение. Согласно Аристотелю, небесная материя, из которой состоят планеты и звезды, как самая совершенная, должна двигаться по самой совершенной линии - окружности. Сотни лет астрономы считали, что планеты двигаются по окружностям. Это ошибочное мнение было опровергнуто лишь в XVII веке учением Коперника, Галилея, Кеплера и Ньютона.



Пифагор Самосский

Теоретический материал

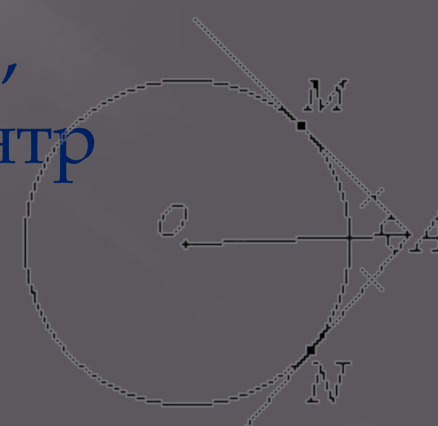
- *Окружностью* называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся от данной точки на данном расстоянии. Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности,
— *радиусом* окружности. Радиус окружности равен половине диаметра.



Касательная - Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, а их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

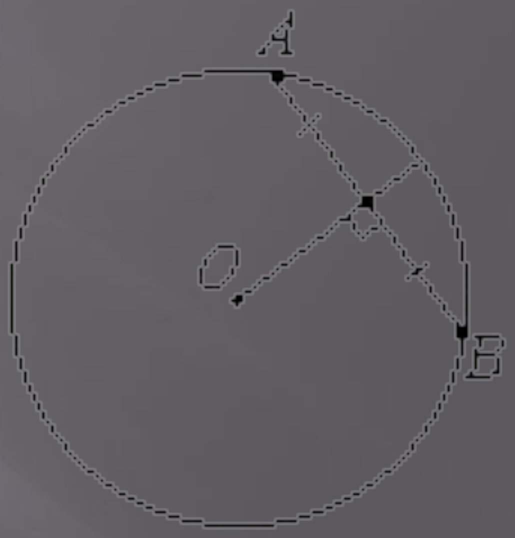
- Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

- Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

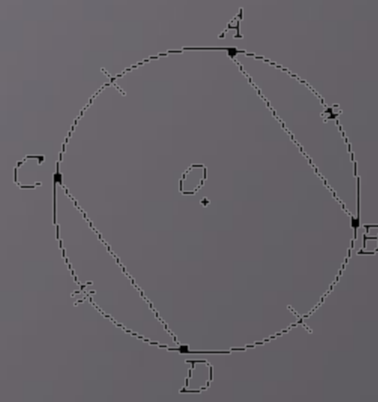


Хорда - отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.*

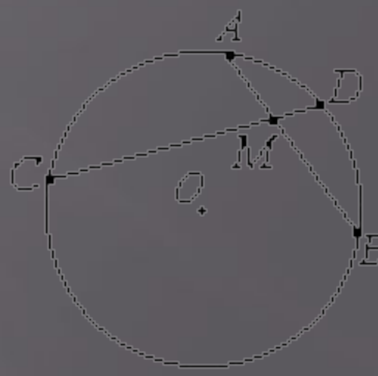
- Диаметр (радиус), перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Верна и обратная теорема: если диаметр (радиус) делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.



- Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

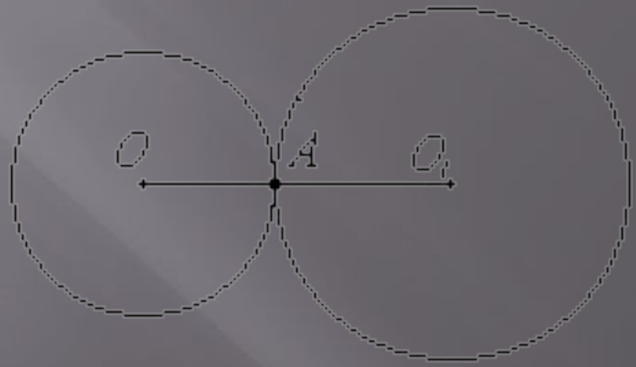


- Если две хорды окружности, *AB* и *CD* пересекают ся в точке *M*, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: *AM•MB* = *CM•MD*.



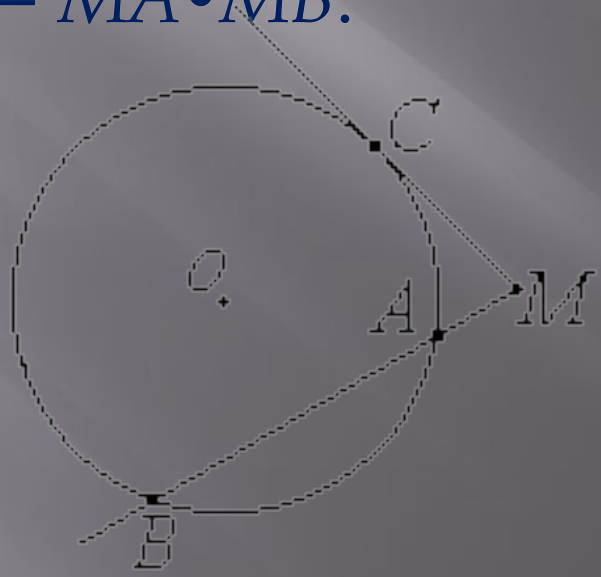
Свойства окружности

- Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (*касательная*); иметь с ней две общие точки (*секущая*).
- Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.
- Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.



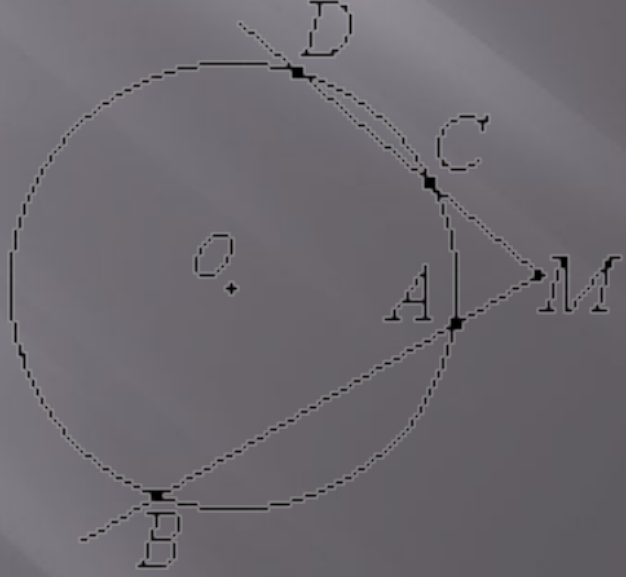
Теорема о касательной и секущей

- Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $MC^2 = MA \cdot MB$.



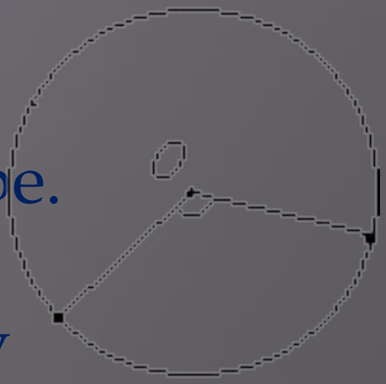
Теорема о секущих

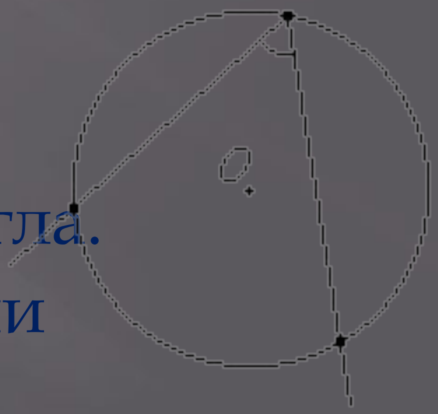
- Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.



Углы в окружности

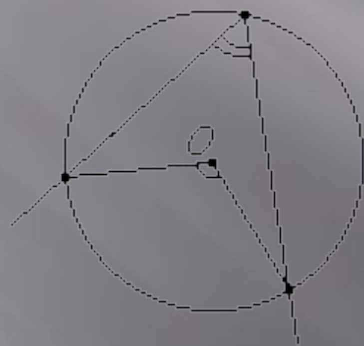
- *Центральным* углом в окружности называется угол с вершиной в ее центре.
- Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным углом.*
- Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности. Мерой дуги может служить мера соответствующего ей центрального угла.
- Дуга называется *полуокружностью,* если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром.

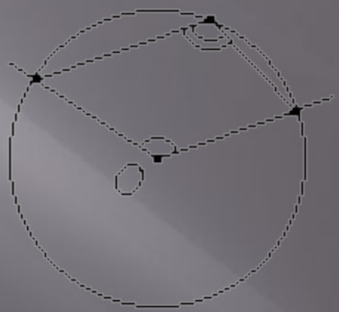




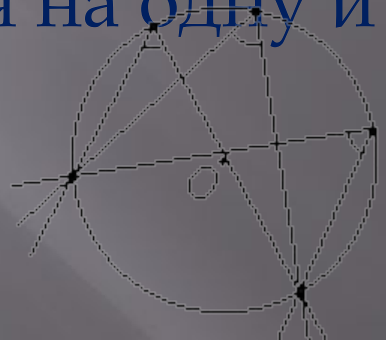
Свойства углов, связанных с окружностью

- Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до 180°.

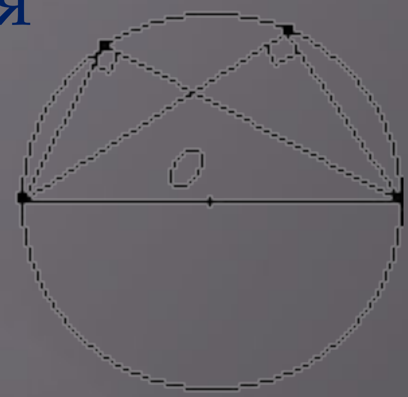




- Углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



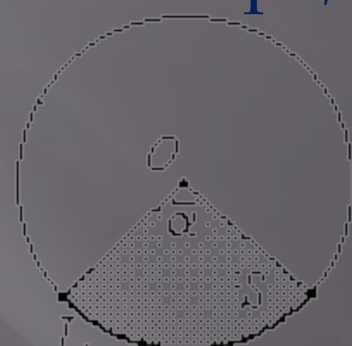
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°



- Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.

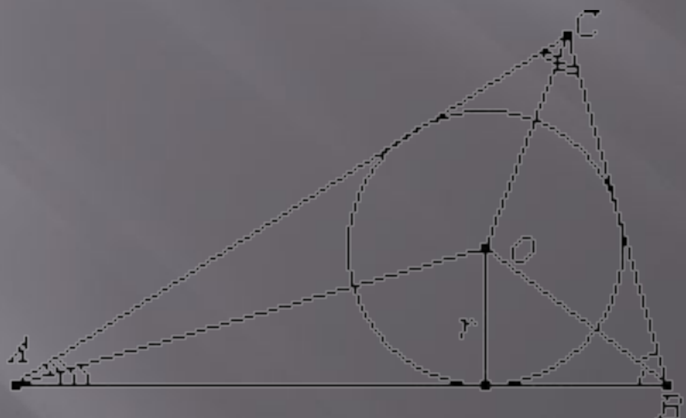
Длины и площади

- Длина окружности *C* радиуса *R* вычисляется по форм $C = 2\pi R.$
- Площадь *S* круга радиуса *R* вычисляется по формуле $S = \pi R^2.$
- Длина дуги окружности *L* радиуса *R* с центральным углом ,измеренным в радианах, вычисляется $L = R\alpha$ рмуле:
- Площадь *S* сектора радиуса *R* с центральным углом в радиан вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$



Вписанные и описанные окружности
Окружность и треугольник

- Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис треугольника, ее радиус r вычисляется по форму $r = \frac{S}{p}$
- где S – площадь треугольника, а – полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$



- Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров, ее радиус R вычисляется по фор

$$R = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin\alpha}$$

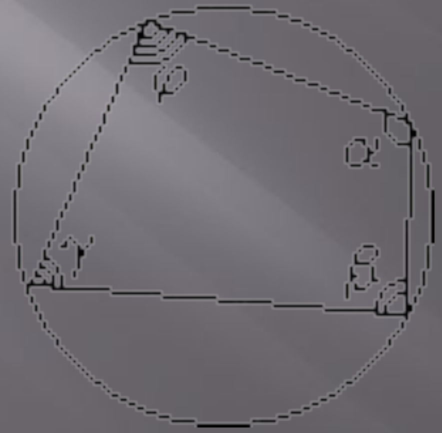
$$R = \frac{abc}{4S}$$

- здесь a, b, c — стороны треугольника, — угол, лежащий против стороны *a*, *S* — площадь треугольника.
- центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы,
- центр описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают только в том случае, когда этот треугольник — правильный.

Окружность и четырехугольники

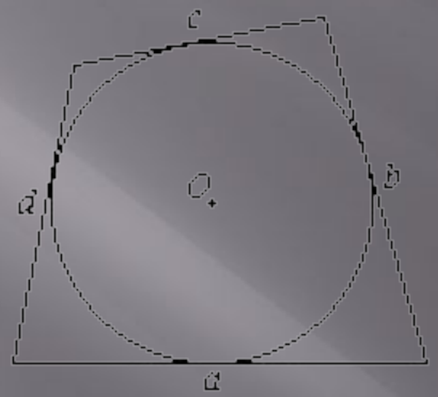
- Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его внутренних противоположных углов равна 180°.

α γ β φ



- В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у него равны суммы противоположных сторон

$a + c = b + d$



- около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником,
- около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — равнобедренная; центр окружности лежит на пересечении оси симметрии трапеции с серединным перпендикуляром к боковой стороне,
- в параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

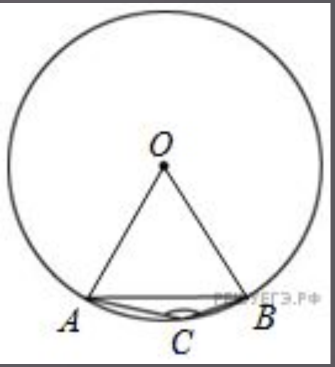
Центральные и вписанные углы

- Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 135.

- **Решение.** вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хо180°ду до .

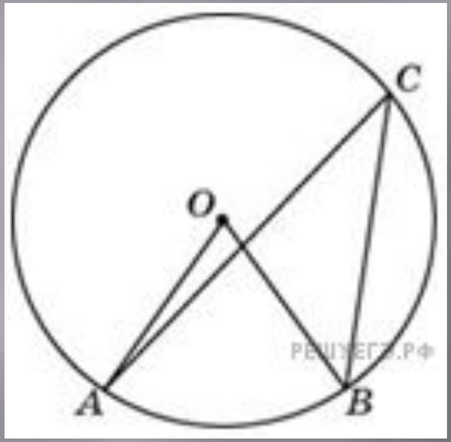
$$\angle ACB = 180^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$$



$$\angle AOB = 90^\circ$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

- Центральный угол на бо36°ше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 36.

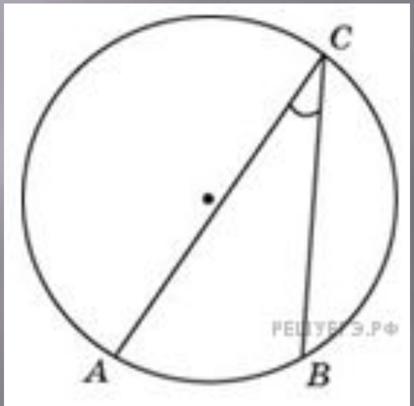
- Решение. вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же

$$\angle ACB + 36^\circ = 2\angle ACB \Leftrightarrow \angle ACB = 36^\circ.$$

- Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет $200°$. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет $80°$. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

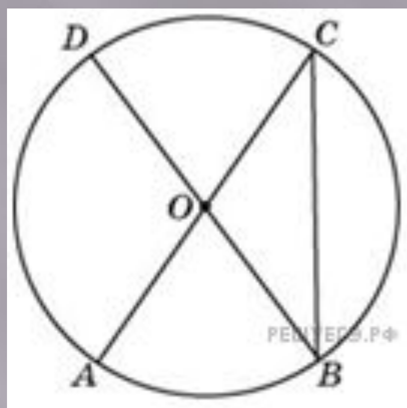
- **Решение.** вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2}(360° - \cup AC - \cup CB) =$$
$$= \frac{1}{2}(360° - 280°) = 40°.$$



Ответ: 40.

- В окружности с центром O AC и BD диаметры. Вписанный угол ACB равен $38°$. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах.

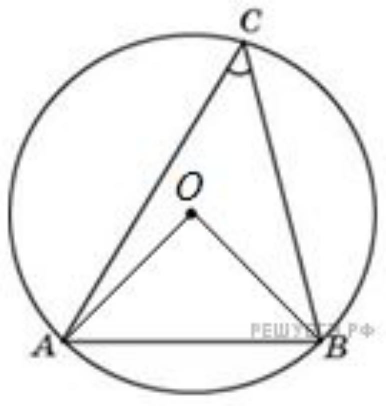


- **Решение.** Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности,

$$\angle AOD = 180° - \angle AOB = \\ = 180° - 2\angle ACB = 180° - 76° = 104°.$$

Ответ: 104.

- Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.



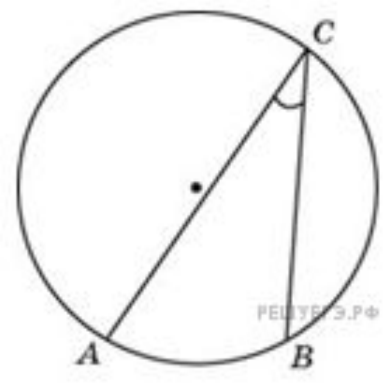
- **Решение.**
  По теореме синусов для треугольника *ACB* имеем:

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, искомый угол равен 45°.

Ответ: 45.

- Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

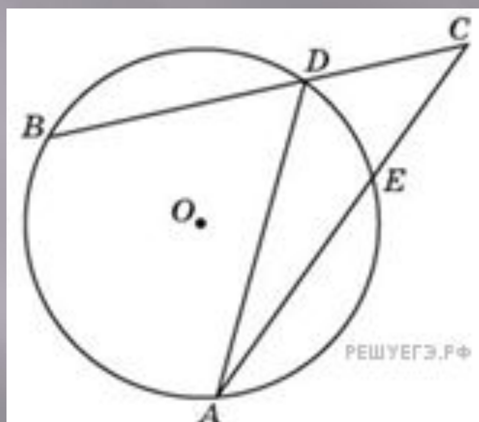


Ответ: 36.

- Решение.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 36^\circ.$$

- Угол ACB равен $42°$. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна $124°$. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.

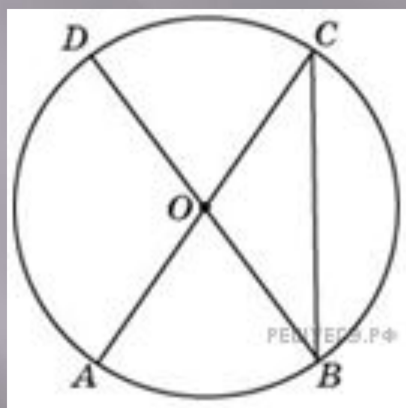


- **Решение.** центральный угол равен дуге, на которую он опирается, а вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается,

$$\angle DAE = 180° - (\angle ACB + \angle CDA) = \\ = 180° - (\angle ACB + 180° - \angle ADB) = \\ = \frac{\cup AB}{2} - \angle ACB = 62° - 42° = 20°.$$

Ответ: 20.

- В окружности с центром диаметр O Ц AC гра BD ный угол равен . Най AOD вписа 110° й угол . Ответ дайте в градусах. ACB

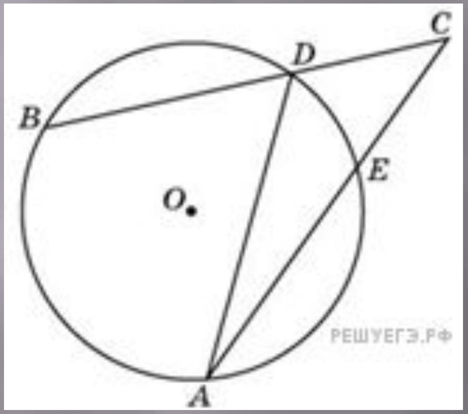


- и **Решение.**
вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности,

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \\ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOD) = \frac{1}{2}\cdot 70^\circ = 35^\circ.$$

Ответ: 35.

- Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно $118°$ и $38°$. Ответ дайте в градусах.



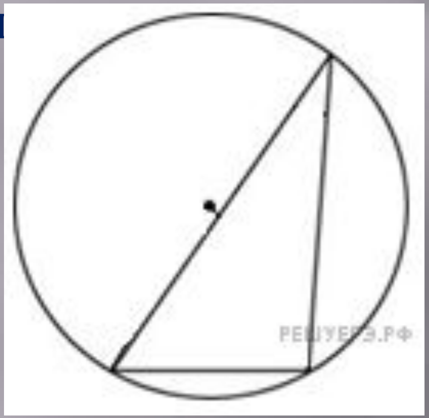
- **Решение.**

Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых

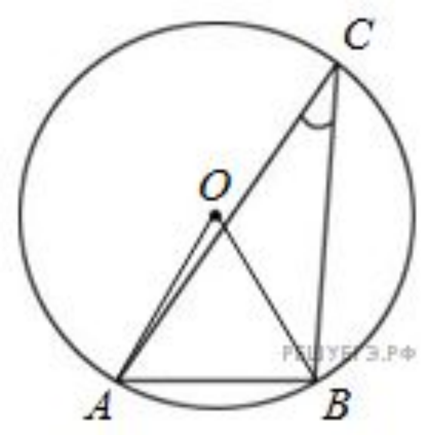
$$\angle ACB = \frac{\cup AB - \cup DE}{2} = \frac{118° - 38°}{2} = 40°.$$

Ответ: 40.

- Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в г



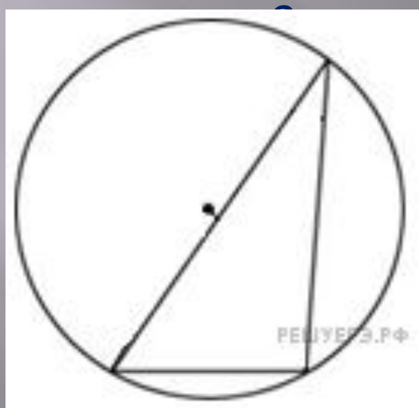
- **Решение.**
Рассмотрим треугольник . Он равнос AOB нний, так как .
Тог $AO = OB = AB = R$
равен $\angle AOB = 60^\circ.$
$\angle ACB$ ального угла, опирающегося на ту же хорду, т. е.
$\frac{\angle AOB}{2}.$



Ответ: 30.

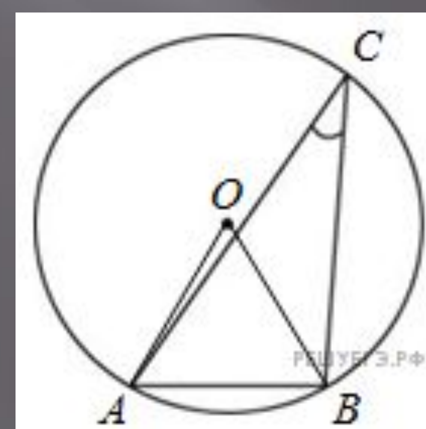
Касательная, хорда, секущая

- Найдите хорду, на которую опирается угол 30° , вписанный в окружность ?



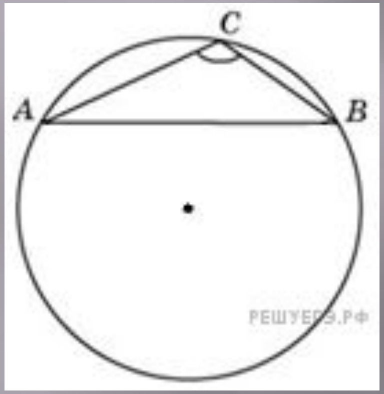
- Решение.

Угол <ACB=30°, значит, <AOB=60° , т. к. является центральным углом, опирающимся на ту же хорду. Соответственно, треугольник AOB – равносторонний, так какAO=OB=AB=R=3 .



Ответ: 3.

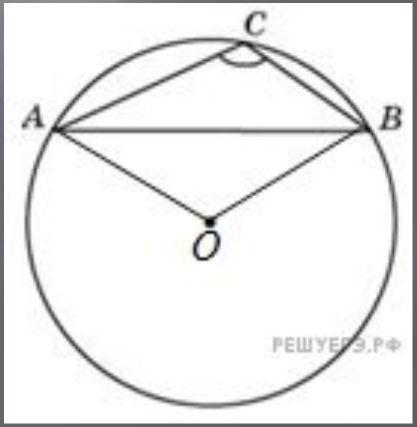
- Найдите хорду, на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



- Решение.

вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду, до 180°, значит, <AOB=2(180° -120°)=120°. По теореме

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos \angle AOB} =$$
$$= \sqrt{3 + 3 + 6 \cdot \frac{1}{2}} = 3$$



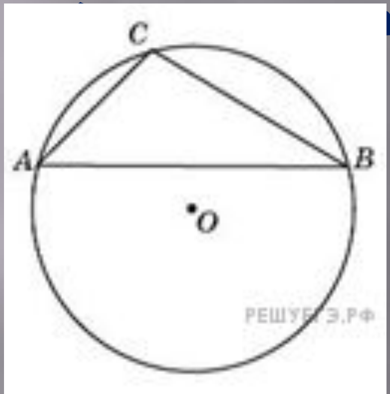
Ответ: 3.

- Найдите хорду, на которую опирается угол 90°, вписанный в окружность радиуса 1.

- **Решение.** вписанный угол является прямым, значит, он опирается на диаметр окружности. $D=2R=2$

Ответ: 2.

- Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ ах.



Ответ: 105.

- **Решение.**

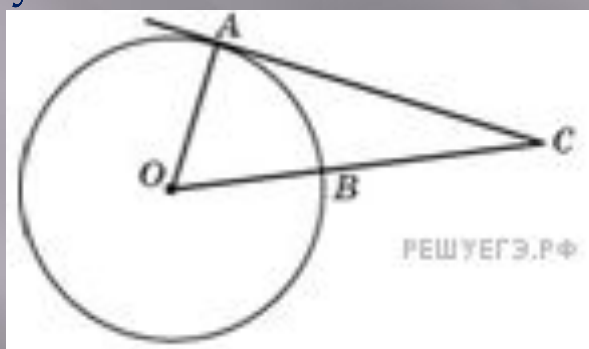
Из точки *C* хорда *AB* видна под углом *ACB*. Пусть большая часть окружности равна 7x, тогда меньшая

$$7x + 5x = 360^\circ \Leftrightarrow 12x = 360^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

Значит, меньшая дуга окружности равна 150°, а большая — 210 °

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит, опирающийся на большую дугу угол *ACB* равен 105°

- Угол АСО равен 28°, где О – центр окружности. Его сторона СА касается окружности. Найдите величину меньшей дуги АВ окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в

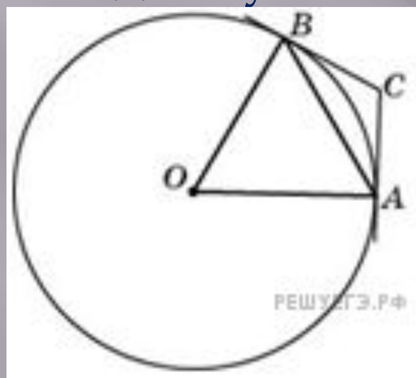


- **Решение.**
касательная к окружности перпендикулярна радиусу, центральный угол равен дуге, на которую он опирается, значит, треугольник ОАС –

$$\cup AB = \angle AOB = \angle AOC =$$
$$= 90^\circ - \angle ACO = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

Ответ: 62.

- Через концы A , B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC . Найдите угол ACB . Ответ

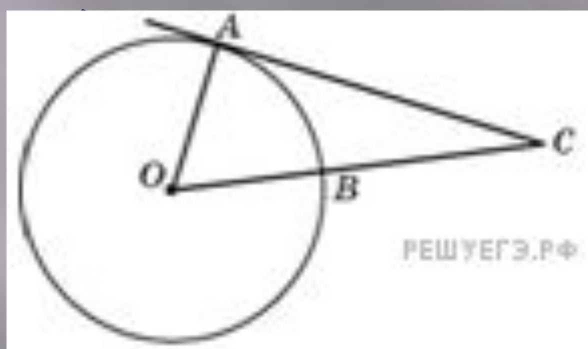


- **Решение.**
Угол между касательной и хордой равен половине заключенной между ними дуги. В

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle CBA) =$$
$$= 180^\circ - \cup AB = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ.$$

Ответ: 118.

- Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O – центр окружности, а дуга меньшая дуга окружности AB, заключенная внутри этого угла, равна 64° . Ответ

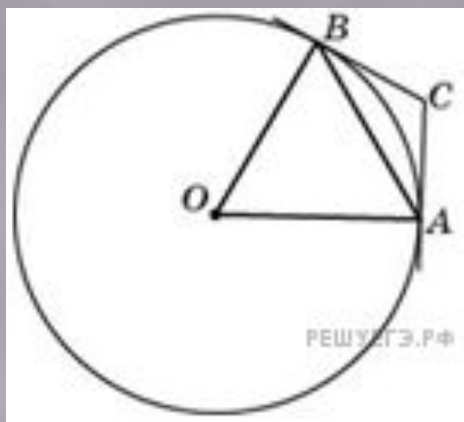


- **Решение.**
касательная к окружности перпендикулярна радиусу, центральный угол равен дуге, на которую он опирается, значит, треугольник OAC –

$$\angle ACO = 90^\circ - \angle AOC = = 90^\circ - \cup AB = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ.$$

Ответ: 26.

- Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB , равный 122°. Найдите величину меньшей дуги AB , стягиваемой точками



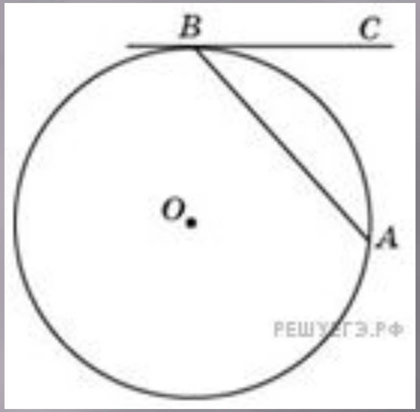
йте в

- **Решение.**
угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой, рассмотрим треугольник ABC:

$$\cup AB = 2\angle BAC = \angle BAC + \angle CBA =$$
$$= 180^\circ - \cup AB = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ.$$

Ответ: 58.

- Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B . Ответ дайте

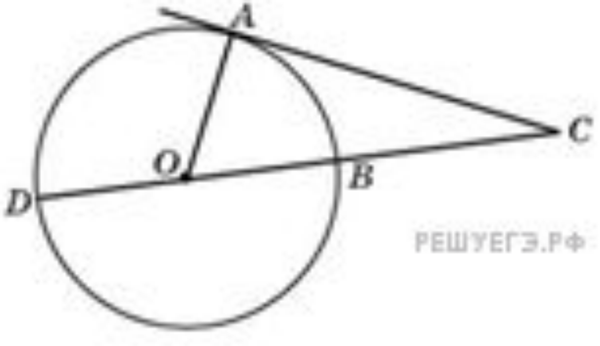


- **Решение.**
угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой

$$\angle ABC = \frac{\cup AB}{2} = \frac{92^\circ}{2} = 46^\circ.$$

Ответ: 46.

- Угол АСО равен 24° . Его сторона СА касается окружности. Найдите градусную величину большей
дуги AD окружности, заключенной внутри этого



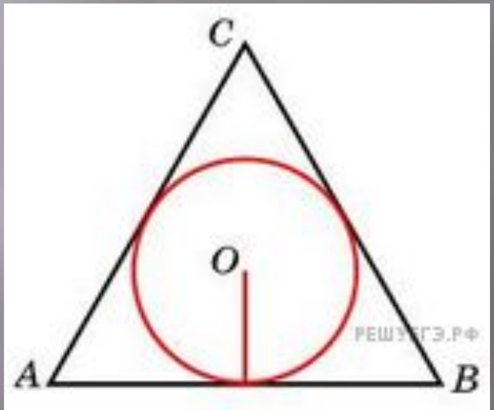
- **Решение.**
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, центральный угол равен дуге, на которую он опирается, значит, треугольник ОАС –

$$\cup AD = \angle DOA = 180^\circ - \angle AOB =$$
$$= 180^\circ - (90^\circ - \angle ACO) =$$
$$= 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$$

Ответ: 114.

Окружность, вписанная в треугольник

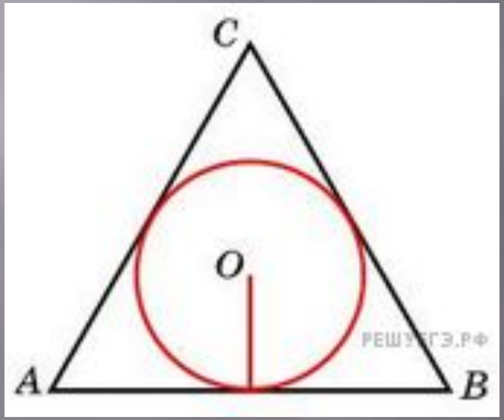
- Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



- **Решение.**
Радиус круга, вписанного в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.

- Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.



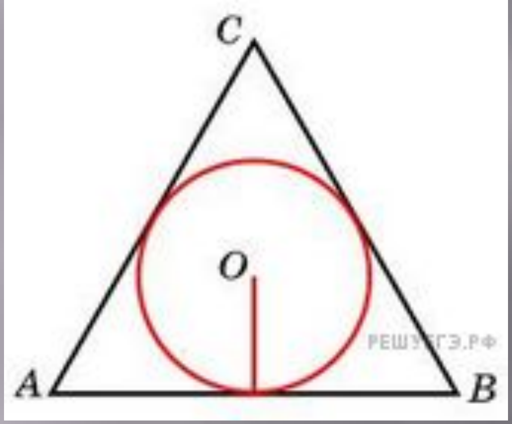
Ответ: 1.

- **Решение.**

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AB^2 \sin A}{3AB} = \frac{AB \sin A}{3},$$

$$AB = \frac{3r}{\sin A} = \frac{3r}{\sin 60^\circ} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

- Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



- **Решение.**

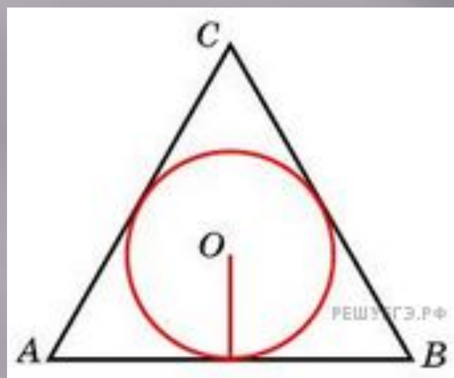
$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ}{3AC} = \frac{AC \sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{3},$$

значит,

$$h = 3r = 18.$$

Ответ: 18.

- Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

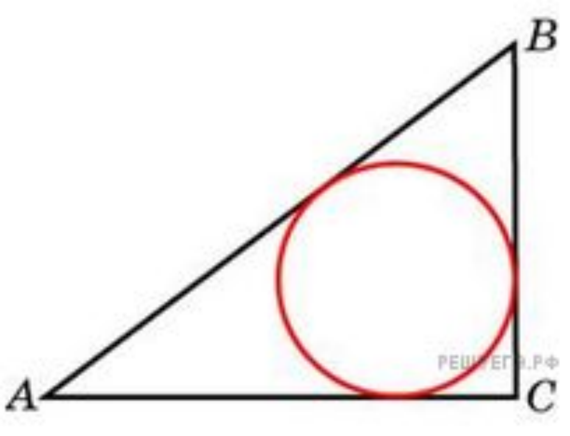


- **Решение.**
Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

$$r=\frac{S_{ABC}}{p_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AB^2\sin A}{\frac{3AB}{2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

- В треугольнике ABC AC=4 , BC=3, угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.

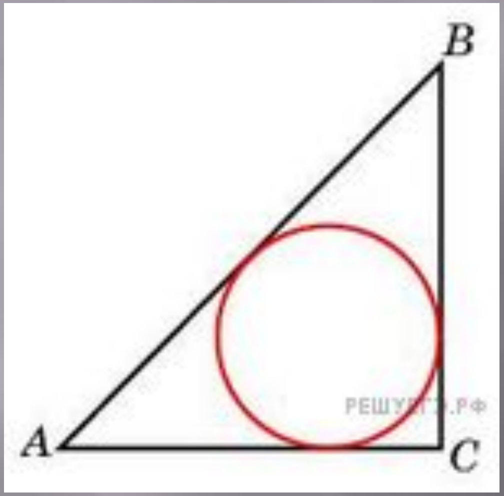


- **Решение.**

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=$$
$$=\frac{AC+BC-\sqrt{AC^2+BC^2}}{2}=\frac{7-\sqrt{25}}{2}=1.$$

Ответ: 1.

- Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2+\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот

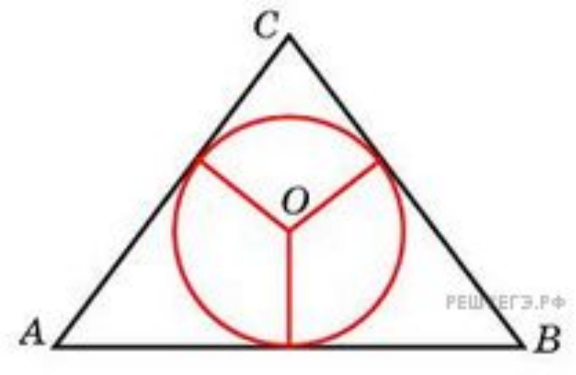


- **Решение.**

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

- Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



- **Решение.**

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}.$$

- Для нахождения площади, воспользуемся формулой Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{2}\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AB\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - BC\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AC\right)} =$$

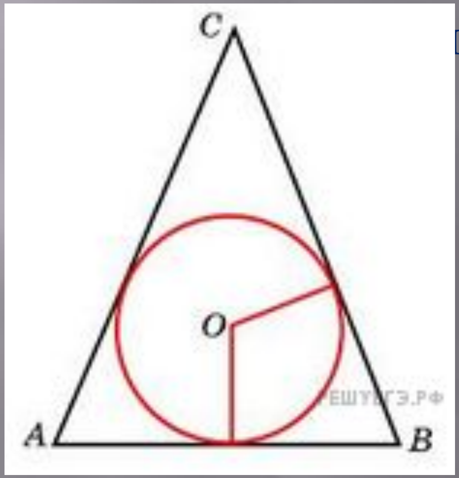
$$= \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$$

тогда:

$$r = \frac{2 \cdot 12}{16} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

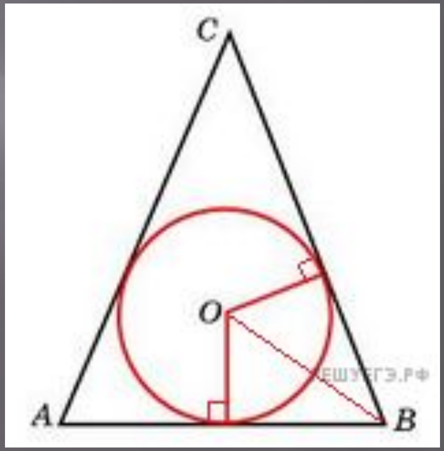
- Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите ьника.



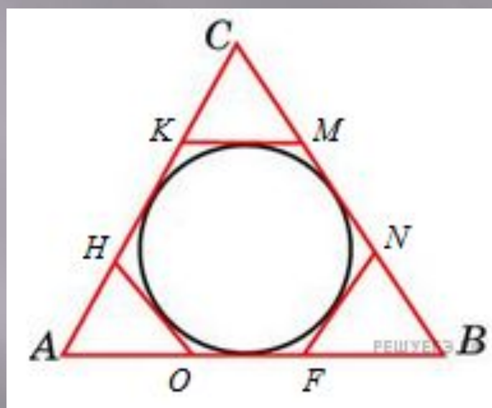
Ответ: 22.

- **Решение.** треугольники НОВ и КОВ равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами,

$$P_{ABC} = AC + CB + AH + HB = \\ = 2CB + 2HB = 16 + 6 = 22.$$



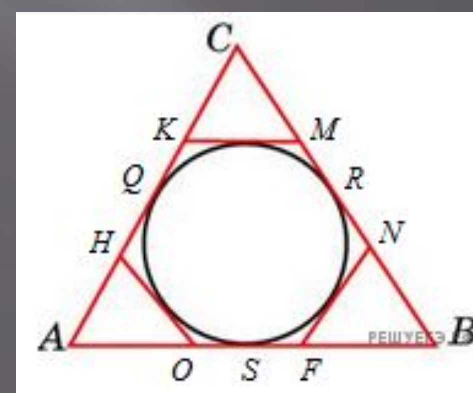
- К окружности, вписанной в треугольник *ABC*, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного



- **Решение.**
  Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K,H,O,F,N,M , соответственно равны друг другу. Поэтому

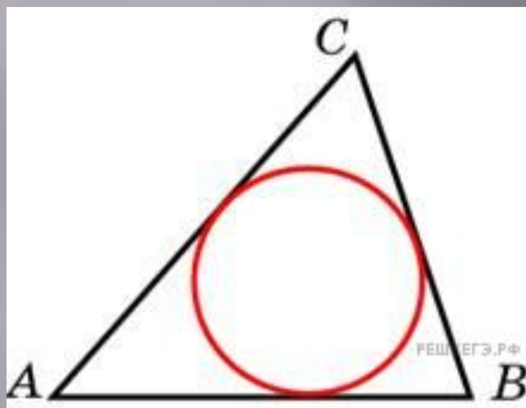
$$CQ + CR = P_{CKM},\ AQ + AS = \\ = P_{AHO},\ BS + BR = P_{BFN}.$$

$$P_{ABC} = P_{AOH} + P_{KCM} + P_{FNB} = 24.$$



Ответ: 24.

- Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр



- **Решение.**
Из формулы $S = pr$ находим, что периметр описанного многоугольника равен отношению удвоенной площади к радиусу ности:

$$P = \frac{2S}{r} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24$$

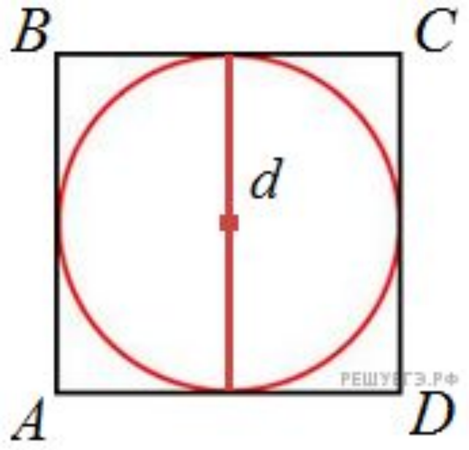
Ответ: 24.

Окружность, вписанная в четырехугольник

- Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 4.

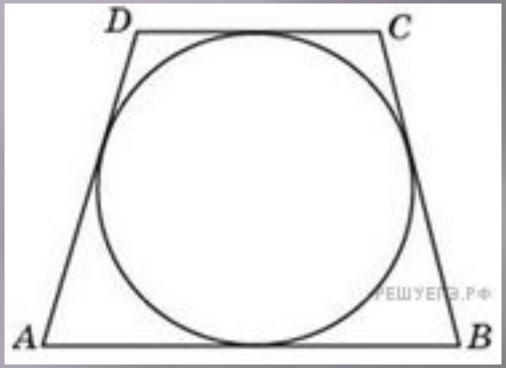
- **Решение.**

$$AB = d = 2r = 8.$$



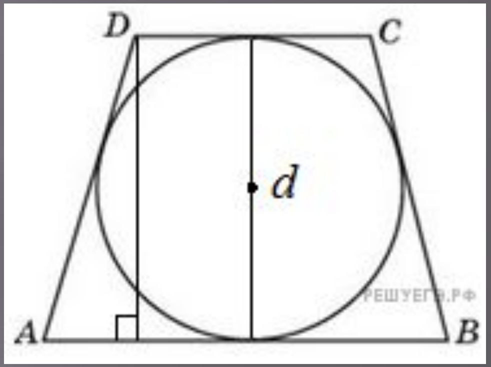
Ответ: 8.

- Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 1.



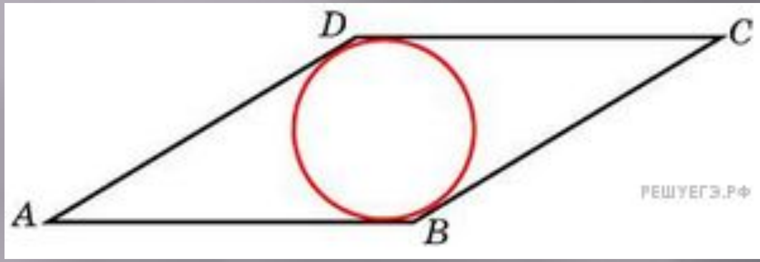
- **Решение.**

$$h = D = 2r = 2.$$



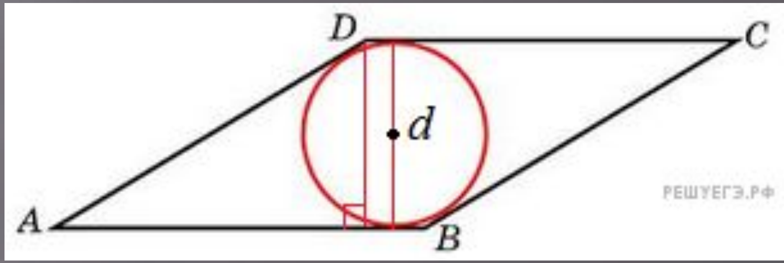
Ответ:
2.

- Острый угол ромба равен 30° . Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону



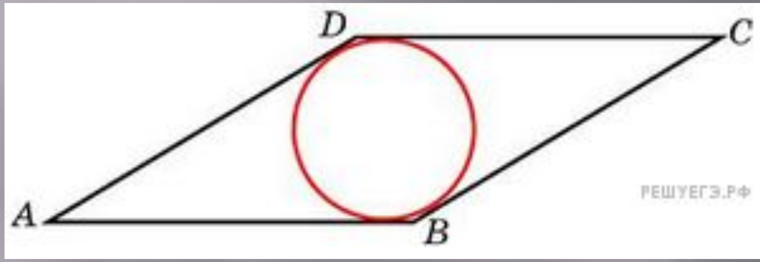
- **Решение.**

$$AD = \frac{DH}{\sin A} = \frac{d}{\sin A} = \frac{2r}{\sin A} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8.$$



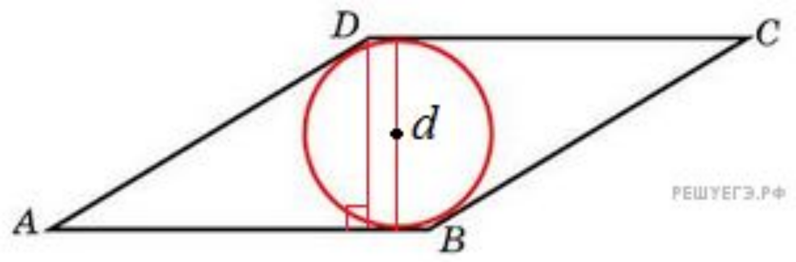
Ответ: 8.

- Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30° . Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.



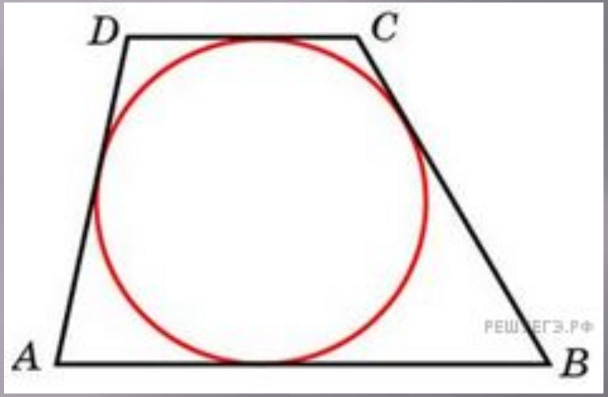
- **Решение.**

$$r = \frac{d}{2} = \frac{DH}{2} = \frac{AD\sin A}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0,25.$$



Ответ: 0,25.

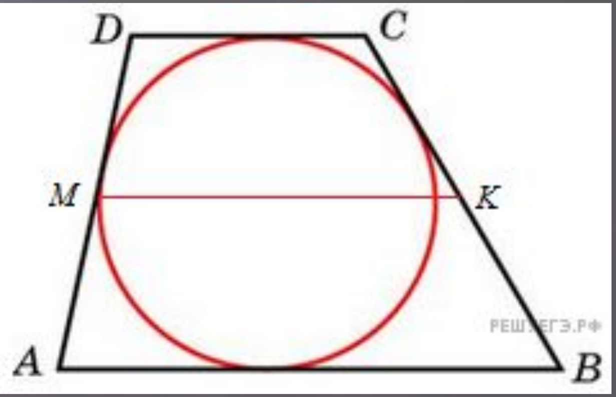
- Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите ее среднюю линию.



- **Решение.**
  В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда огда

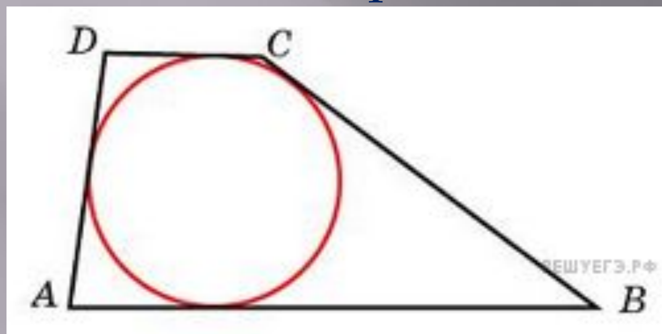
$$AB + CD = BC + AD,$$

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{P_{ABCD}}{4} = 10.$$



Ответ: 10.

- Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю

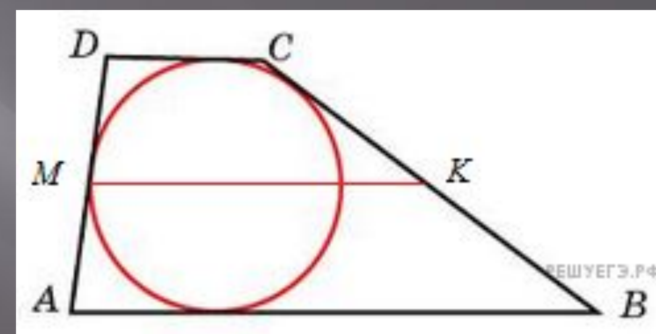


- **Решение.**
в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда

$$AB + CD = BC + AD,$$

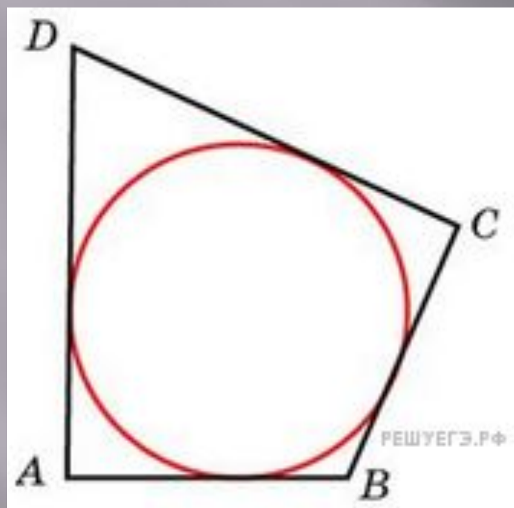
а

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$



Ответ: 4.

- В четырехугольник ABCD вписана окружность,AB=10 , CD=16 . Найдите периметр четырехугольника.

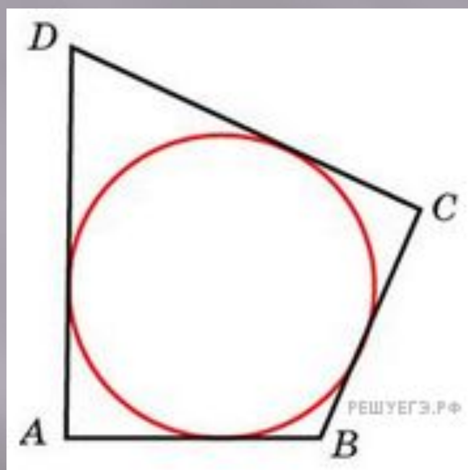


- **Решение.**
  В выпуклый прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда

$$P_{ABCD} = AB + CD + BC + DA = \\ = 2(AB + CD) = 52.$$

Ответ: 52.

- Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из



н.

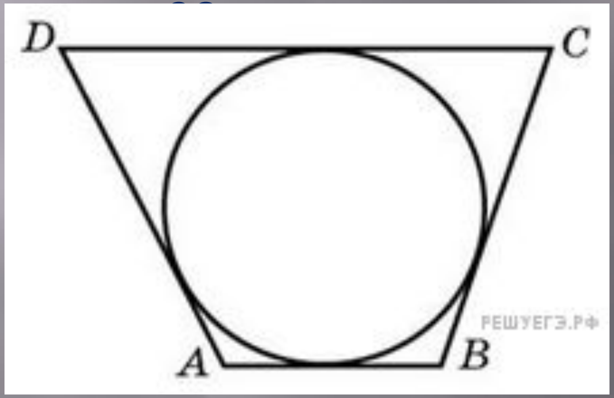
Ответ: 7.

- **Решение.**
Пусть большая из двух оставшихся сторон имеет длину x, тогда длина четвертой стороны равна 24-4-5-x=13- x. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны. В этом случае периметр четырехугольника вдвое больше суммы длин противоположных сторон, а значит, стороны длиной x и 13 − x, как и стороны длиной 5 и 6, не могут быть противоположными и являются смежными.
Итак, напротив большей из первой пары смежных сторон с длинами x и 13 − x лежит меньшая из второй пары смежных сторон с длинами 5

$$x + 5 = (13 - x) + 6 \Leftrightarrow x = 7.$$

равны, имеем:

- Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр



Ответ: 12.

- **Решение.**
в выпуклый прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда AB+CD=BC+AD. Пусть меньшая сторона равна

$$x + 3x = \frac{P}{2} \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4,$$

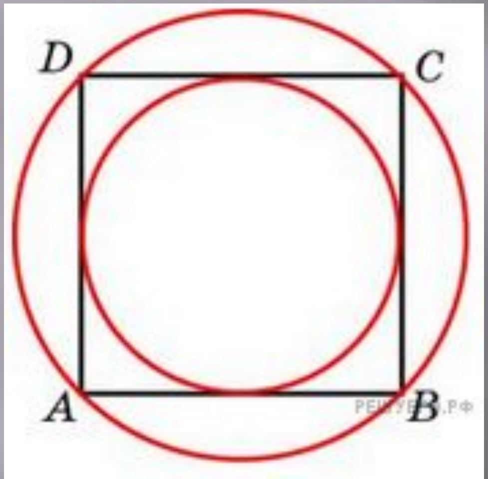
значит, четвертая сторона

$$\frac{P}{2} - 2x = 16 - 8 = 8.$$

Тогда большая сторона

$$3x = 12.$$

- Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



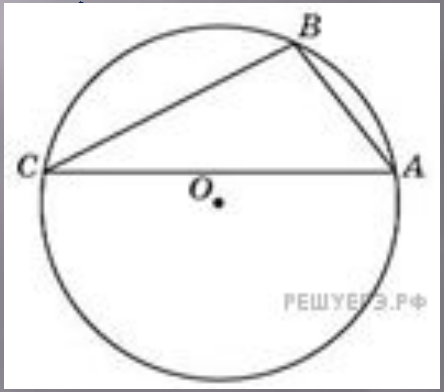
- **Решение.**
Сторона квадрата вдвое больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому AB=$2\sqrt{8}$. Радиус описанной вокруг квадрата окружности равен половине его диагонали.

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{8}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{16} = 4.$$

Ответ: 4.

Окружность, описанная вокруг треугольника

- Точки А, В, С, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1:3:5. Найдите больший угол треугольника АВС. Ответ

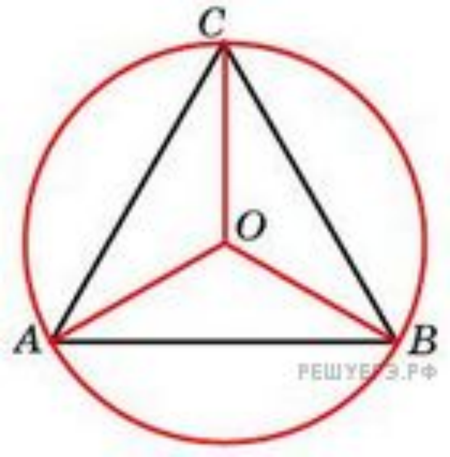


- **Решение.**
пусть меньшая часть окружности равна *x* тогда
x+3 x +5 x =360°,   x=40°
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \cdot 5x = \frac{5}{2} \cdot 40^\circ = 100^\circ.$$

Ответ: 100.

- Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите

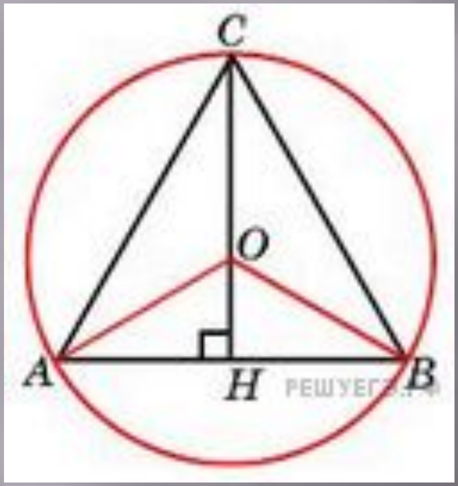


- **Решение.** треугольникABC правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$CB = 2R\sin A = 2\sqrt{3}\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

- Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.

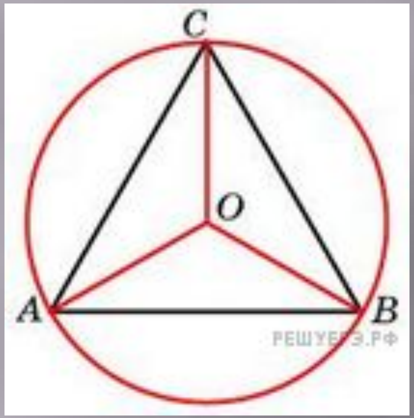


- **Решение.**
треугольник ABC правиль ный, значит, все углы равны по 60°.

$$CH = AC\sin A = 2R\sin B\sin A = 2\cdot 3\sin^2 60^\circ = 6\cdot\frac{3}{4} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

- Сторона правильного треугольника равна . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

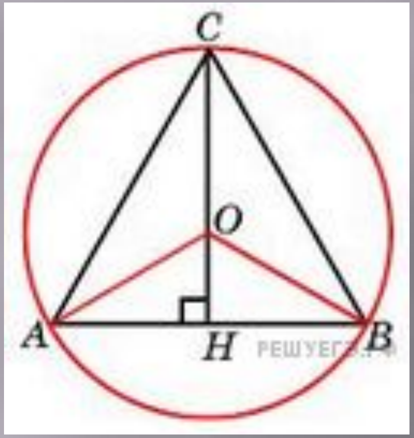


- **Решение.**
треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$R=\frac{AC}{2\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=1.$$

Ответ: 1.

- Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

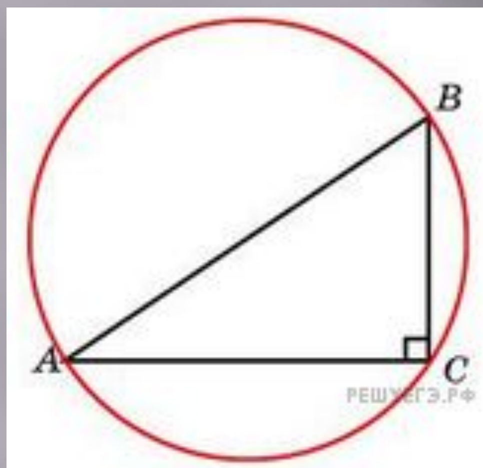


- **Решение.**
треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60°.

$$R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{CH}{2\sin A\cdot\sin B} = \frac{3}{2\sin^2 60^\circ} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2.$$

Ответ: 2.

- Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности



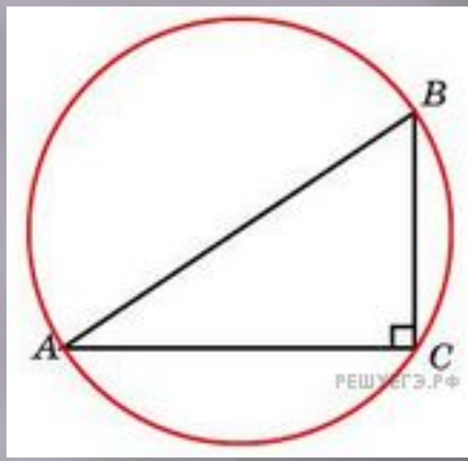
а.

- **Решение.**
вписанный угол опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, АВ – диаметр.

$$R = \frac{D}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

- В треугольнике ABC BC=6 , угол C равен 90°. Радиус описанной окружности этого треугольника равен 5. Найдите AC.

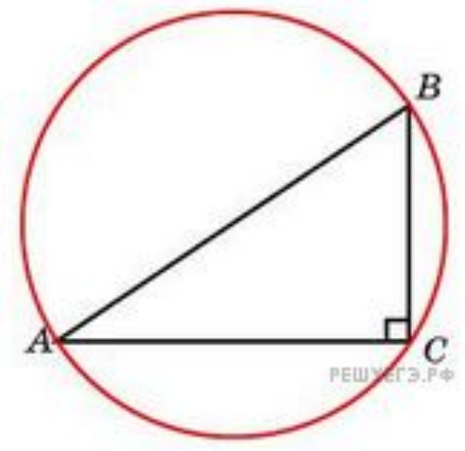


- **Решение.**
  Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной вокруг него окружности, поэтому ее длина 10. Тогда

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Ответ: 8.

- В треугольнике ABC AC=4 , BC=3, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

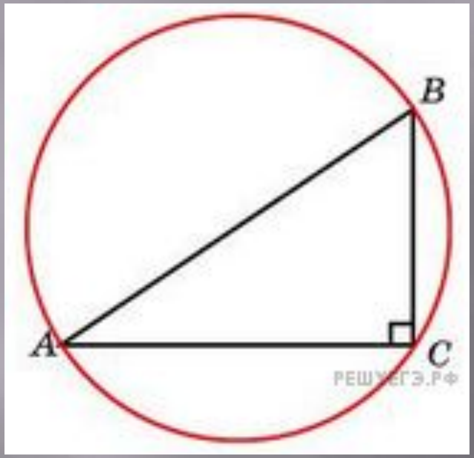


- **Решение.**
вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, AB – диаметр.

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5

- Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.

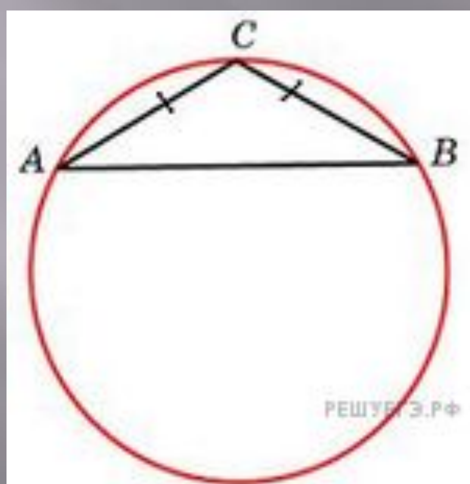


- **Решение.**
вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, AB– диаметр.

$$AB = D = 2R = 8.$$

Ответ: 8.

- Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности а.



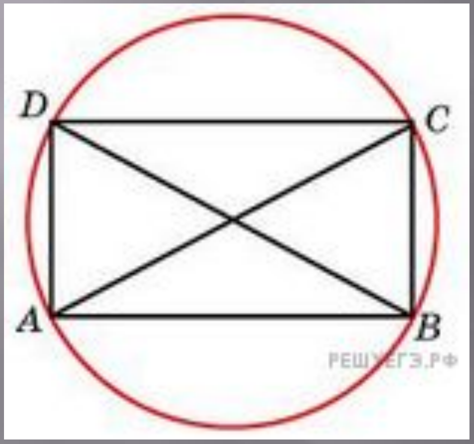
- **Решение.**
Сумма двух равных углов при основании треугольника равна 60°, поэтому каждый из них равен 30°. Тогда по теореме

$$d = \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$

Ответ: 2.

Окружность, описанная вокруг четырехугольника

- Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен 60°. Найдите радиус описанной окружности этого прямоугольника.

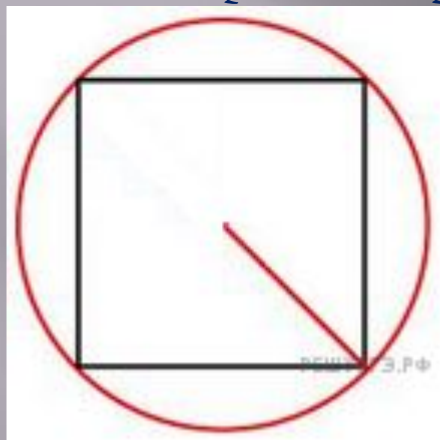


- **Решение.** рассмотрим треугольник AOD. Он равнобедренный, т. к. AO=OD=R; <A=<D=60° значит, треугольник AOD – равносторонний, тогда

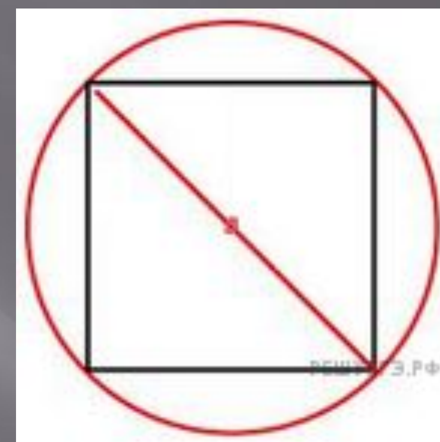
$$R = AO = AD = 6.$$

Ответ: 6.

- Найдите радиус окружности, описанной около квадрата с $\sqrt{8}$



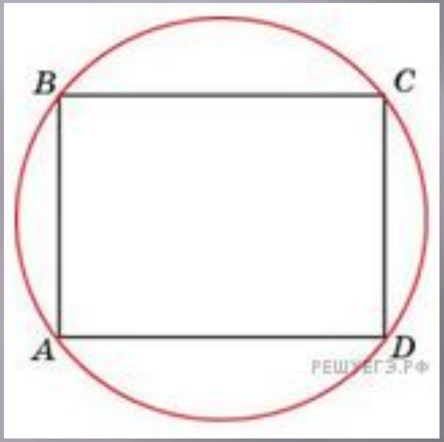
- **Решение.**
  угол A является прямым, он опирается на диагональ BD, которая является диаметром.



$$R = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

- Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 3

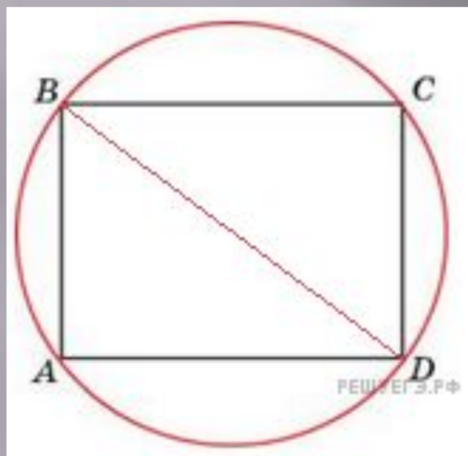


- **Решение.**
угол А является прямым, он опирается на диагональ BD которая является диаметром

$$R = \frac{D}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

- Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.

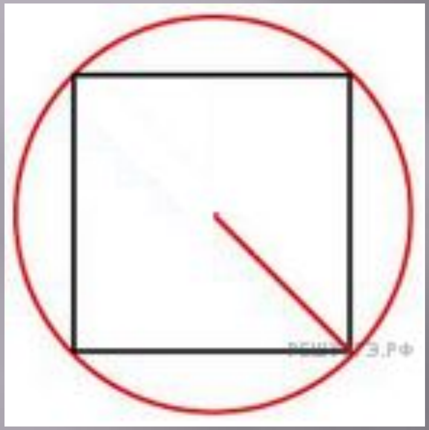


- **Решение.**
угол A является прямым, он опирается на диагональ BD которая является диаметром.

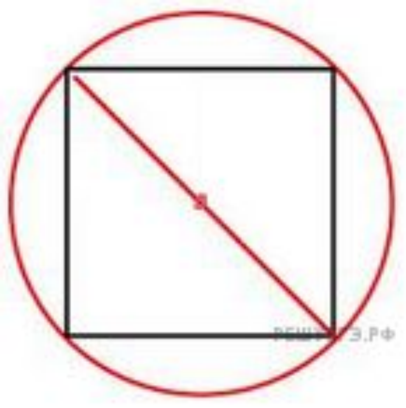
$$BD = 2R = 10.$$

Ответ: 10.

- Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$.



- **Решение.**
угол A является прямым, он опирается на диагональ BD, которая … ром.



$$AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$$

Ответ: 4.

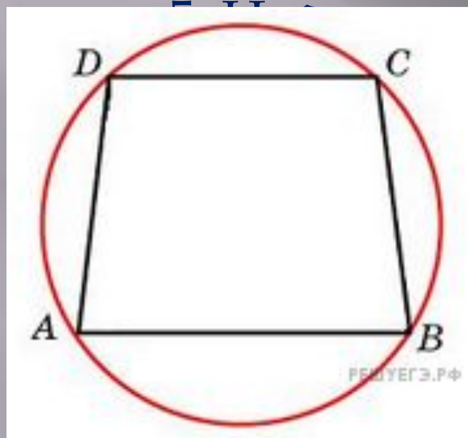
- Углы A, B и C четырехугол ьника относятся как 1:2:3 . Найдите угол D, если около данного четырехугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

- **Решение.**
  так как вокруг четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов

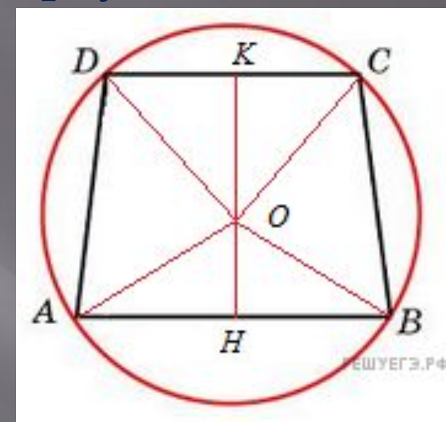
$$\angle A + \angle C = \angle A + 3\angle A = 180^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \angle A = 45^\circ, \ \angle B = 90^\circ.$$
$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Ответ: 90.

- Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности … высоту



- **Решение.**
высота трапеции KH=KO+OH и O H– высоты равнобедренных треугольников DOC и AOB … агора:



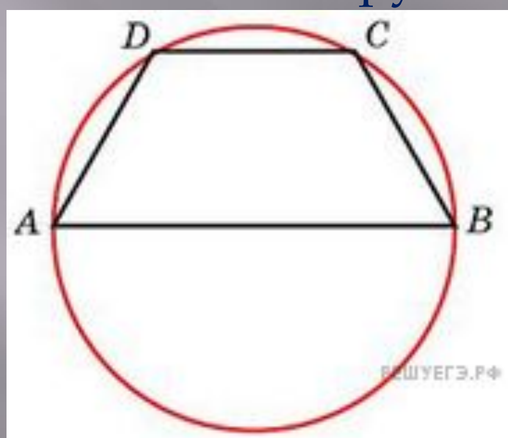
$$KO=\sqrt{OC^2-KC^2}=\sqrt{R^2-\frac{DC^2}{4}}=\sqrt{25-9}=4,$$

$$OH=\sqrt{OB^2-HB^2}=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{25-16}=3.$$

$$KH=KO+OH=7.$$

Ответ: 7.

- Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности

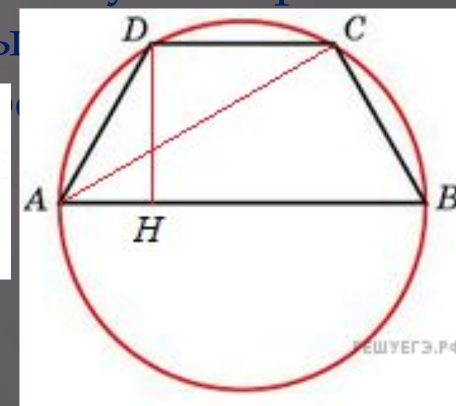


Ответ: 6.

- **Решение.**

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника . Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны

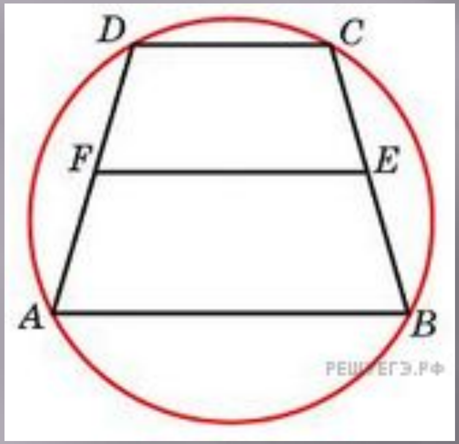
$$AD = AB - 2AH = AB - 2AD\cos 60^\circ = 12 - AD,$$
$$AD = 6.$$



- Тогда по теореме синусов:

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

- Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону

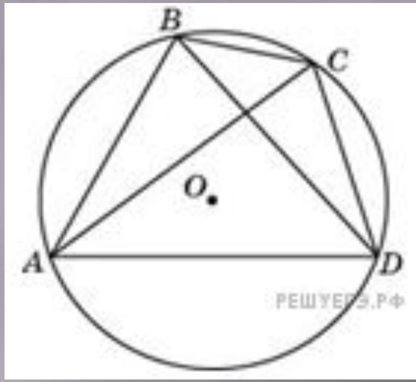


- **Решение.**
  трапеция ABCD – равнобедренная, т. к. вокруг неё описана

$$AD=\frac{P_{ABCD}-(AB+CD)}{2}=$$
$$=\frac{P_{ABCD}}{2}-\frac{AB+CD}{2}=$$
$$=\frac{P_{ABCD}}{2}-FE=11-5=6.$$

Ответ: 6.

- Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 105°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



- **Решение.** вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD = \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup CD) = \frac{1}{2}(2\angle ABC - 2\angle CAD) = 70^\circ.$$

Ответ: 70.

Заключение

- Исследование мною заданий В6 ЕГЭ показало, что свойства окружностей часто применяются при решении планиметрических задач и широко используются на практике.

Источники

- http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Rusanova/circles.htm
- http://reshuege.ru/?redir=1