ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

(ЧАСТЬ 1)

Л. А. Янкина, канд. пед. наук,

доцент кафедры методики начального образования

Отношение делимости и его свойства

Пусть даны натуральные числа a и b.

Говорят, что число a делится на число b, если существует такое натуральное число c, что

a = b · c

$$a \;\square\; b \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

b – делитель числа a

a – кратное числа b

<u>Пример</u>: 24 □ 8, так как 24 = 8 · 3.
8 – это делитель числа 24, а 24 есть кратное числа 8.

Замечание: понятие «делитель данного числа» следует отличать от понятия «делитель», обозначающего то число, на которое делят.

Пример: 18 : 5.

Здесь число 5 – делитель, но 5 **не является** делителем числа 18.

18 : 6, 6 – делитель,

18 □ 6, 6 – делитель числа 18

Свойства отношения делимости

1. Отношение делимости <u>рефлексивно</u>, т. е. любое натуральное число делится само на себя:

$$(\forall a \in N)\ a \;\square\; a$$

2. Любое целое неотрицательное число делится на 1 (или 1 является делителем любого целого неотрицательного числа):

$$(\forall a \in N_0)\ a \;\square\; 1$$

3. Делитель b данного числа a не превышает этого числа, т. е.

$$a \;\square\; b \Rightarrow b \leq a$$

4. Отношение делимости **антисимметрично**, т.е.

$a \square b,\ a \neq b \Rightarrow b \square a$

5. Отношение делимости **транзитивно**, т. е.

$a \square b$ и $b \square c \Rightarrow a \square c$

6. Число 0 делится на любое число:

$(\forall b \in N)\ 0 \square b$

7. Число **0 не является делителем** никакого натурального числа:

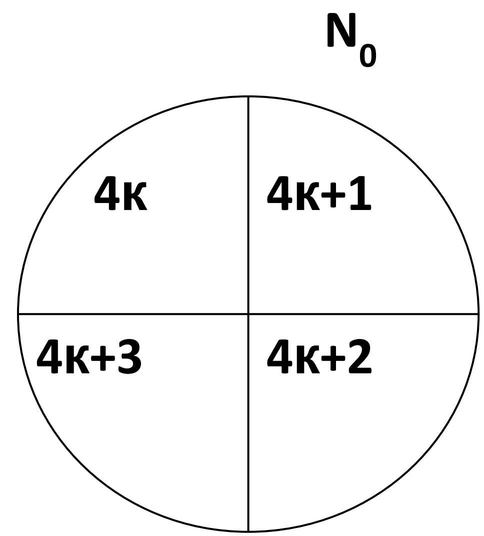
$(\forall a \in N) \qquad \overline{a \square 0}$

<u>Пример</u>:

$a \,\vdots\, 4 \Rightarrow a = 4k,\ k \in N$

$\overline{a \,\vdots\, 4} \Rightarrow a = 4k+1 \vee a = 4k+2 \vee a = 4k+3.$

Числа 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3 образуют множества, которые попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством целых неотрицательных чисел (т. е. множество разбито на 4 класса)



Делимость суммы, разности, произведения

Теорема 1 (признак делимости суммы)

Если числа a и b делятся на c, то и их сумма делится на c:

$$a \ □ \ c \wedge b \ □ \ c \Rightarrow (a + b) \ □ \ c$$

Пример: (63 + 81) □ 9, так как 63 □ 9 ∧ 81 □ 9

Обратное неверно: (5 + 6) □ 11, но 5□11 и 6□11

Теорема 2. Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится на натуральное число b, то и их сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ делится на это число

Пример: (63 + 81 + 45 + 18) □ 9, так как

63 □ 9 ∧ 81 □ 9 ∧ 45 □ 9 ∧ 18 □ 9

Теорема 3 (признак делимости разности)

Если числа a и b делятся на c и a > b, то их разность a – b делится на c:

$$a \;\square\; c \land b \;\square\; c \land a > b \Rightarrow (a - b) \;\square\; c$$

Пример: (66 - 48) □ 6, так как 66 □ 6 ⋀ 48 □ 6

Обратное неверно: (14 - 6) □ 8, но 14 □ 8 и 6 □ 8

Теорема 4. Если в сумме **одно слагаемое не делится** на число b, а **все остальные слагаемые делятся** на число b, то вся **сумма на число b не делится**.

Пример: (34 + 125 + 376 + 1024) не делится на 2, так как 34 □ 2, 376 □ 2, 124 □ 2, но 125 не кратно 2

Теорема 5 **(признак делимости произведения)**
Если число a делится на b, то произведение вида ax, где x ∈ N, делится на b;

a □ b ⇒ ax □ b

Пример: 24·976·305 □ 12, так как 24 □ 12

Обратное неверно: (5·6)□15, но ни 5, ни 6 на 15 не делятся

Делится ли произведение 75·12 на 9?

Теорема 6. Если в произведении ab a □ m, b□n, то ab делится на mn.

75·12 □ 9, так как 75□3 и 12□3

Теорема 7. Если произведение ac делится на произведение bc, причем c – натуральное число, то и a делится на b

Пример: 360 □ 90, т.е. (180·2) □ (45·2), значит, 180 □ 45

Из теорем 2 и 5 следует:

Теорема 8. Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делятся на натуральное число b, то каковы бы ни были числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, число $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ делится на b

Упражнения

1. **Не выполняя сложения, установите, делится ли значение выражения на 3:**

а) 180 + 144; б) 720 + 308 + 603.

2. **Не производя вычитания, укажите выражения, значения которых кратны 5:**

а) 535 – 413; б) 1215 – 470; в) 20147 – 1307.

3. **Не производя умножения, установите, будет ли произведение** $75 \cdot 32 \cdot 27$ **делиться на** 5, 8, 9, 10, 18, 45?

Признаки делимости

Признак делимости на число b –
это правило, позволяющее по записи числа a узнавать, делится ли оно на b,
не выполняя непосредственно деления
a на b.

Признак делимости на 2

Для того чтобы число x делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8

Доказательство

Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = \underbrace{a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10}_{\square\ 2} + a_0$$

□ 2 □ 2 □ 2

a_0 □ 2, т.е. равно одной из цифр 0,2,4,6,8 ⇒ x □ 2

$$\overline{a_0}\ \square 2 \Rightarrow \overline{x}\ \square 2$$

Признак делимости на 5

Для того чтобы число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0 или 5

***Доказательство* аналогично (самостоятельно)**

$2 \cdot 5 = 10$ $\quad 2^2 \cdot 5^2 = 10^2$ $\quad 2^3 \cdot 5^3 = 10^3$ $\quad$ и т. д.

Признак делимости на 4

Для того чтобы число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x

Доказательство

Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

□ □ □

4 4 4

□

4

$(a_1 \cdot 10 + a_0)$ □ 4 ⇒ x □ 4

$$\underline{(a_1 \cdot 10 + a_0) ⋮ 4} \Rightarrow \underline{x ⋮ 4}$$

Признак делимости на 25

Для того чтобы число x делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы оно заканчивалось либо на 00, либо на 25, либо на 50, либо на 75

***Доказательство** аналогично (самостоятельно)*

Признак делимости на 8

Для того чтобы число x делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось трехзначное число, образованное тремя последними цифрами десятичной записи числа x

Признак делимости на 125

Для того чтобы число x делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы на 125 делилось трехзначное число, образованное тремя последними цифрами десятичной записи числа x

Доказательство аналогично (самостоятельно)

Признак делимости на 9

Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9

Доказательство

Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$10 = 9 + 1 \qquad 10^2 = 99 + 1 \qquad 10^3 = 999 + 1 \qquad \ldots$

$$10^n = \underbrace{99\ldots9}_{n} + 1$$

$$x = a_n \cdot (\underbrace{99..9}_{n}+1) + a_{n-1} \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{n-1}+1) + \ldots + a_1 \cdot (9+1) + a_0$$

$$x = \underbrace{a_n \cdot 99..9}_{\vdots\, 9} + \underbrace{a_{n-1} \cdot 99\ldots9}_{\vdots\, 9} + \ldots + \underbrace{a_1 \cdot 9}_{\vdots\, 9} + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0)$$

$$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) \,\vdots\, 9 \Rightarrow x \,\vdots\, 9$$

$$\overline{(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) \,\vdots\, 9} \Rightarrow \overline{x \,\vdots\, 9}$$

Признак делимости на 3

Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3

***Доказательство** аналогично (самостоятельно)*

Признак делимости на 7

Число x делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится число

$$p = a_0 + 3a_1 + 2a_2 - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, … - цифры единиц, десятков, сотен, … числа x

Примеры:

1) число 1999 не делится на 7, так как на 7 не делится число $p = 9 + 3\cdot 9 + 2\cdot 9 - 1 = 53$

2) 36701 □7, так как $p = 1+3\cdot 0 + 2\cdot 7 - (6+3\cdot 3) = 0$ делится на 7

<u>Признак делимости на 11</u>

Число x делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр на нечетных местах

<u>Примеры</u>: Делится ли на 11 число 5482257,5630?

)(5+8+2+7) – (4+2+5) = 22 – 11 = 11 □ 11 ⇒ 5482257 □ 11

2) (5+3) – (6+0) = 8 – 6 = 2 – не кратно 11 ⇒ 5630 не кратно 11

Признак делимости на 13

Число x делится на 13 тогда и только тогда, когда на 13 делится число p, полученное из него зачеркиванием последней цифры и прибавлением к полученному числу учетверенного значения этой цифры

Пример: число 1105 делится на 13, так как число $p = 110 + 4 \cdot 5 = 130$ делится на 13.

Общий признак делимости на 7 и 13

Число x делится на 7(13) тогда и только тогда, когда на 7(13) делится разность числа тысяч и числа, образованного тремя последними цифрами числа x

Примеры:

1) 825678 □ 7, т. к. 825 – 678 = 147 □ 7.

2) 9264996 □ 13, т.к. 9264 – 996 = 8268,

8 - 268 = -260 □ 13

Спасибо за внимание!