Деревья

Лекции 13-14

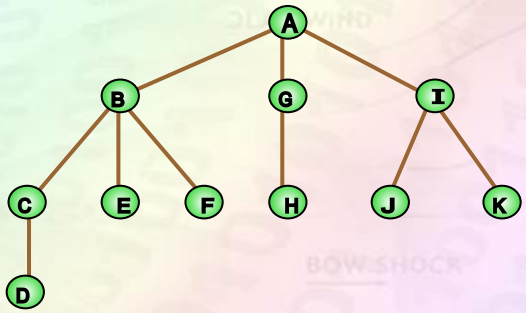
Н.В. Белоус

Факультет компьютерных наук

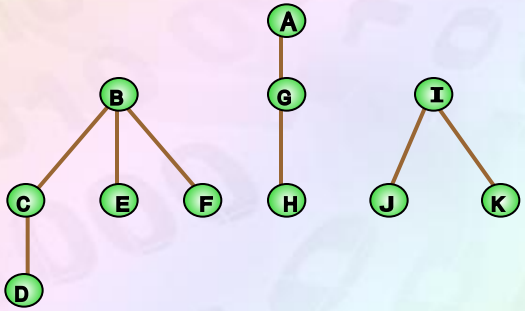
Кафедра ПО ЭВМ, ХНУРЭ

Дерево, лес

Деревом называется связный неориентированный граф без циклов (ациклический), который содержит более двух вершин.



Ациклический граф, который содержит несколько компонент связности (состоит из нескольких деревьев), называют ***лесом***.

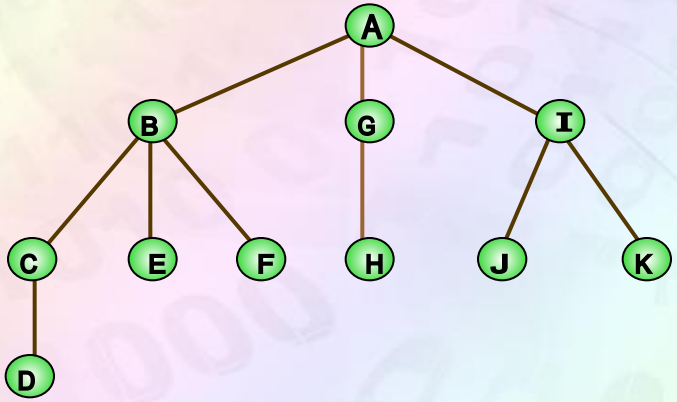


Неориентированное дерево

Корнем неориентированного дерева называют вершину с минимальным порядковым номером.

Если в дереве T корень задан (то есть оно изображено сверху вниз, и в нем есть самая верхняя вершина), то дерево T называют ***корневым***.

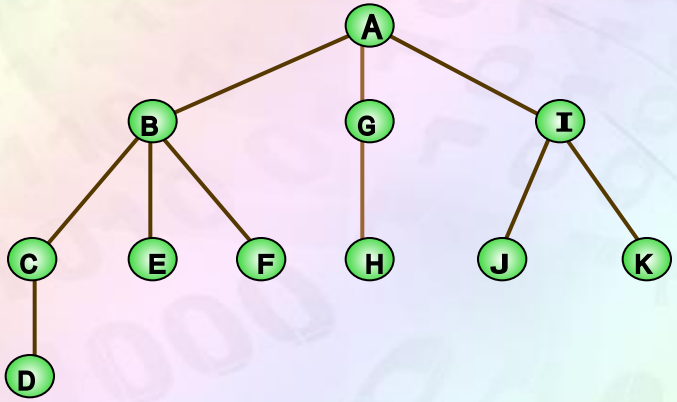
В неориентированном дереве, как и в произвольном графе, пара вершин соединяется ***ребром***.



Неориентированное дерево

Листьями неориентированного дерева (висячими вершинами) называются вершины, которым инцидентно лишь одно ребро.

Узлом (внутренней вершиной) произвольного дерева называют вершину, которая не является корнем, и не является листом.



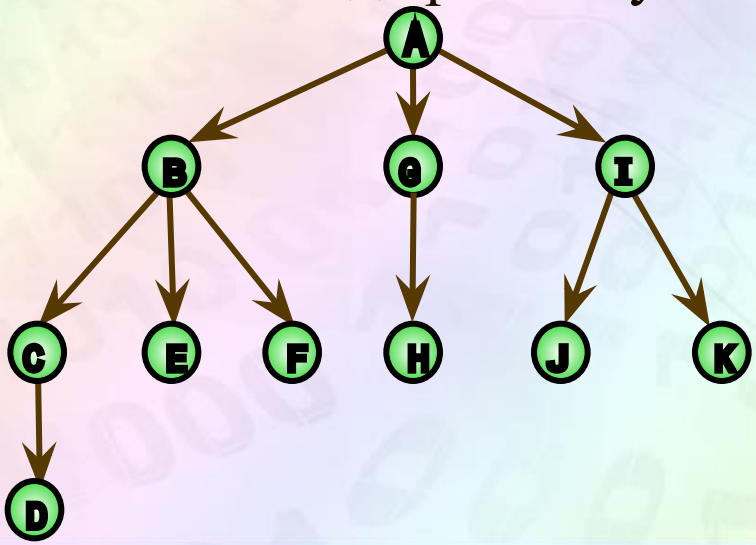
Ориентированное дерево

Маршрут в любом дереве называют ветвью

В ориентированном дереве, как и в графе, ребра называют ***дугами.***

Корнем ориентированного дерева называют вершину, полустепень захода которой равна нулю.

Листьями ориентированного дерева (висячими вершинами) называются вершины, полустепень захода которых равна единице, полустепень исхода равна нулю.



Свойства деревьев

Для графа G(v,e) эквивалентны следующие утверждения:

1) G – дерево;
2) G – связный граф, |e|=|v|–1, где e – количество ребер, v– количество вершин графа G.
3) G – ациклический граф, |e|=|v|–1;
4) G – граф, в котором две вершины соединяются единственной цепью;
5) G – ациклический граф, и добавление нового ребра приводит к появлению точно одного цикла.

При описании соотношений между узлами дерева используется терминология, принятая в генеалогических деревьях.

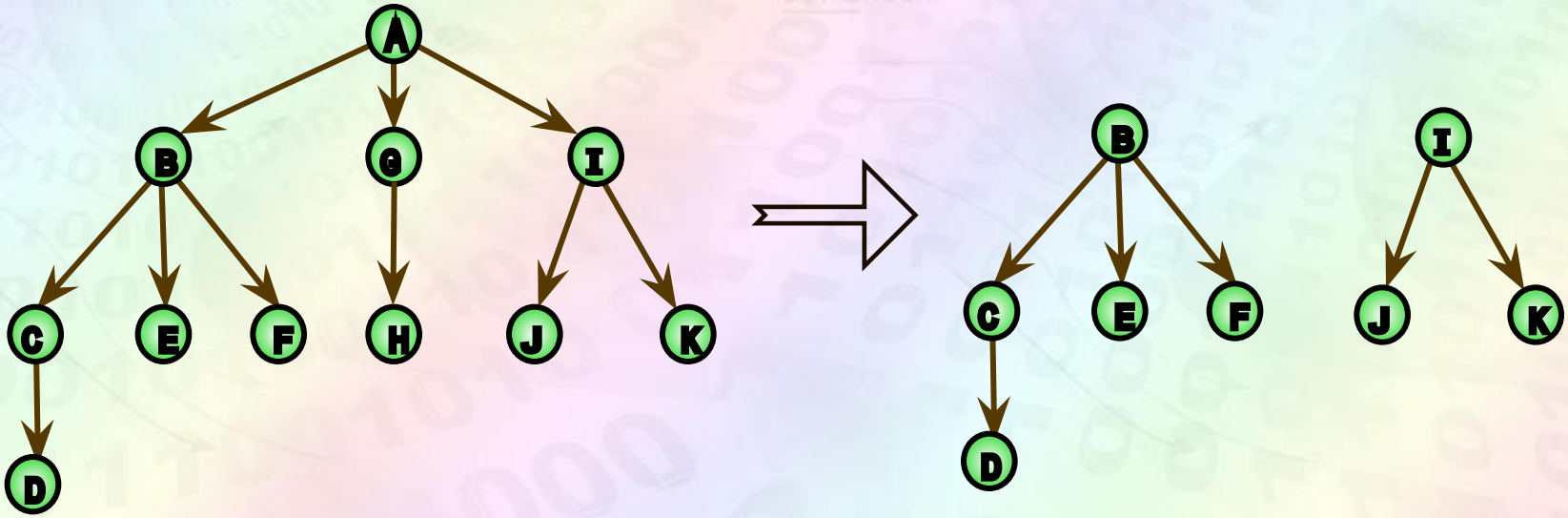
В дереве (или поддереве) все узлы являются ***потомками*** его корня, и наоборот, корень есть ***предок*** всех своих потомков.

Если существует дуга, входящая из вершины A в вершину B, то A называется ***отцом*** вершины B, а B – ***сын*** A.

Корень является отцом корней его поддеревьев, которые в свою очередь являются сыновьями корня. Вершины, являющиеся сыновьями одного отца называются ***братьями***.

Поддерево

Поддеревом дерева T называют дерево T1, которое содержит часть вершин дерева T, причем корнем дерева T1 может быть любая другая вершина дерева T.



n-арное дерево

Корневое дерево называется ***n-арным***, если каждая внутренняя вершина имеет не более n детей.

Порядком дерева называется максимальное количество потомков вершин данного дерева.

Корневое дерево называется ***полным n-арным деревом***, если каждая внутренняя вершина имеет ровно n детей.

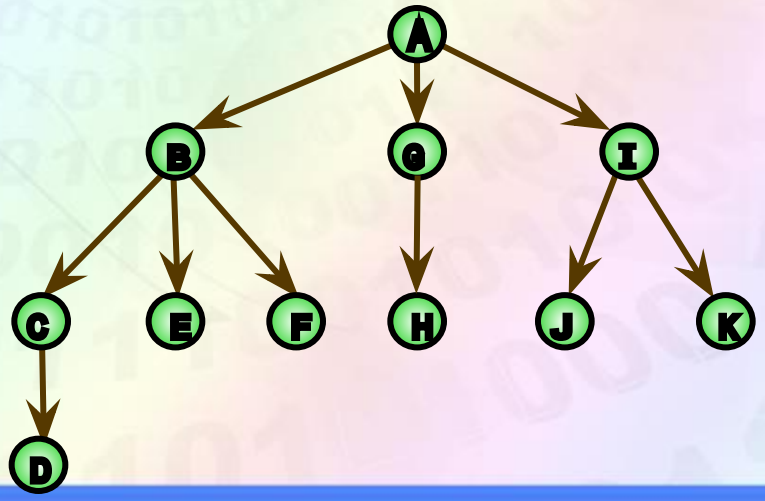
Корневое дерево называется ***бинарным деревом***, если каждая внутренняя вершина имеет не более двух детей (n = 2).

Высота и количество уровней дерева

Уровнем вершины v_i в корневом дереве называется длина пути от корня дерева до данной вершины. Корень имеет уровень, равный нулю.

Высотой h корневого дерева T называется величина, равная максимальному из уровней вершин.

Глубина (количество уровней) d дерева ***T*** равняется количеству вершин, которые лежат на максимальной ветви от корня к листьям.



$h_B = 1$
$h_C = 2$
$h_D = 3$
$h_E = 2$
$h_F = 2$
$h_G = 1$
$h_H = 2$
$h_I = 1$
$h_J = 2$
$h_K = 2$
$h = 3$
$d = 4$

Задача Кели. Пример

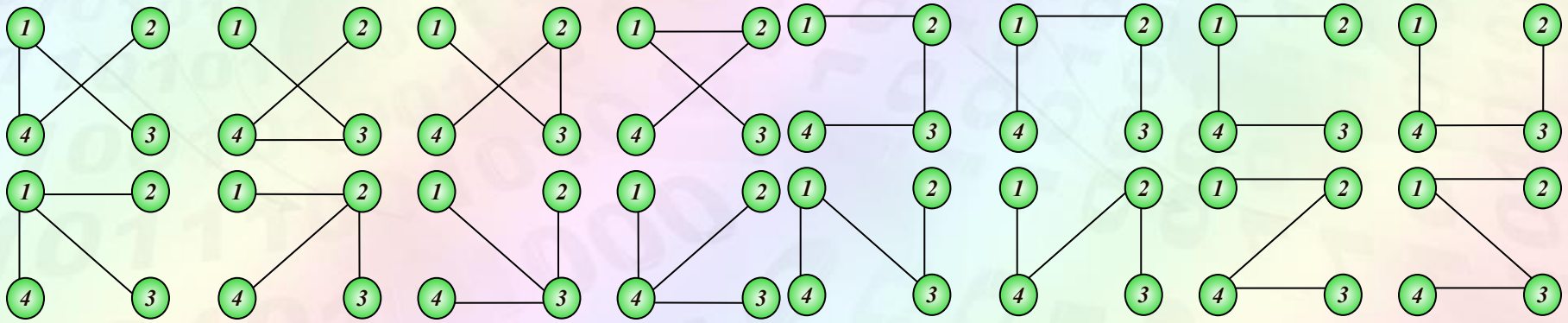
Пусть для некоторого множества ***M*** городов известна стоимость ***c(a, b)*** постройки дороги между любыми двумя городами ***a, b*** $\in$ ***M***. Какова должна быть сеть дорог между городами, входящими в ***M***, чтобы по ней можно было проехать из любого города ***a*** $\in$***M*** в любой город ***b*** $\in$***M*** и чтобы стоимость этой сети была минимальной?

Теорема

На *n* вершинах можно построить n^{n-2} деревьев.

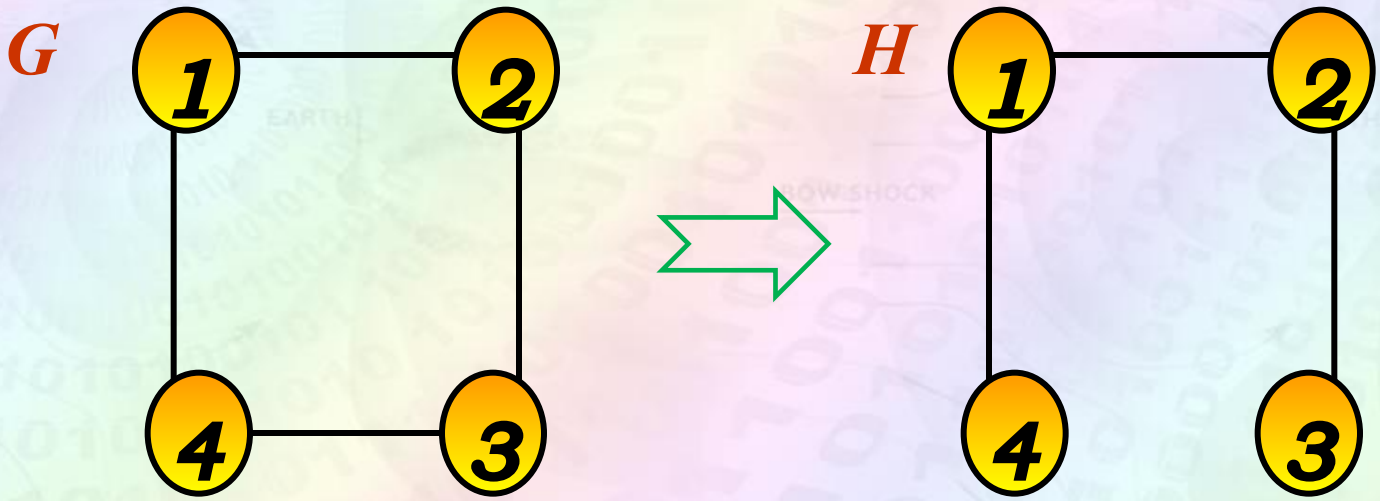
Пример ***n=4***

$$n^{n-2} = 4^2 = 16.$$



Остовные деревья

! ***Остовное дерево*** – дерево, которое содержит все вершины исходного графа.

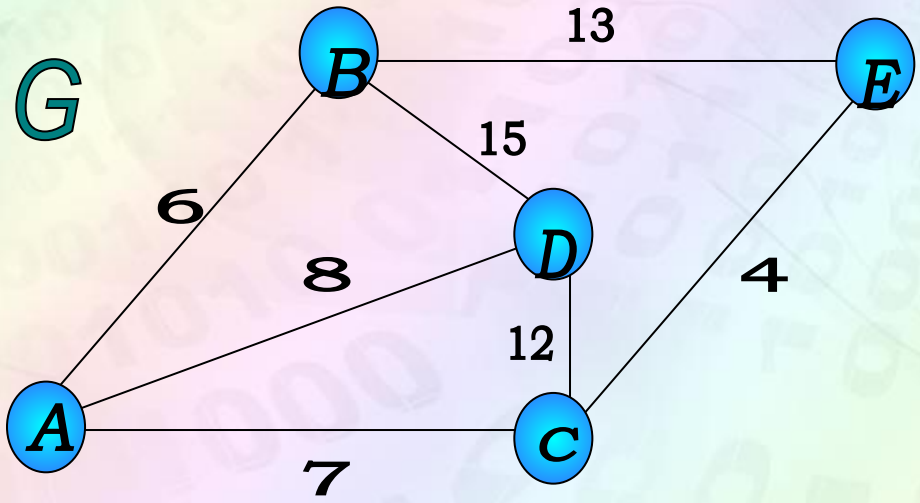


! ***Хорда остовного дерева H*** графа ***G*** – это ребро графа ***G***, не принадлежащее остовному дереву ***H***.

Дерево минимальной стоимости (веса)

Граф ***G*** с весами на дугах называется ***взвешенным графом***.

Весом подграфа из ***G*** называется сумма весов ребер подграфа.

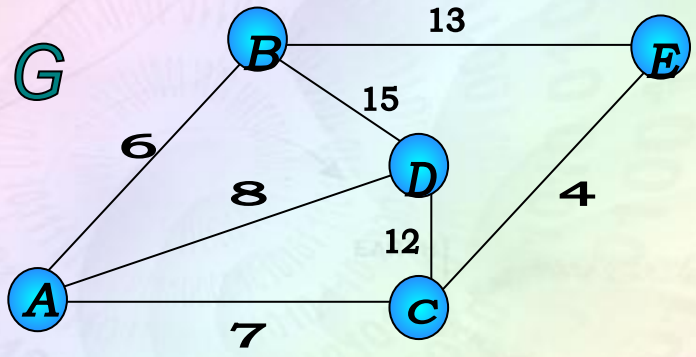


Алгоритм Борувки

1. Упорядочиваем ребра в порядке возрастания их весов.
2. Включаем в остовное дерево, ребра в порядке их возрастания.
3. Если вновь включенное ребро образует цикл с ребрами, включенными до него, то пропускаем его.
4. Дерево построено тогда, когда в него включено ***n-1*** ребро.

Алгоритм Борувки. Пример

Построить дерево минимальной стоимости для заданного графа ***G***.



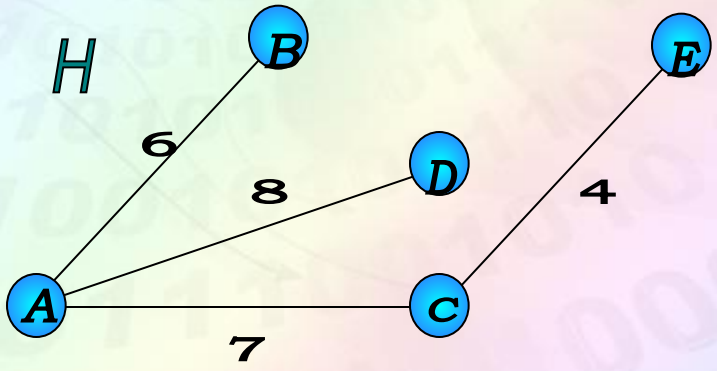
Находим ребра с наименьшей мерой. Поочередно включаем их в остовное дерево.

CE= 4

AB= 6

AC= 7

AD = 8



$S_H=6+8+7+4=25.$

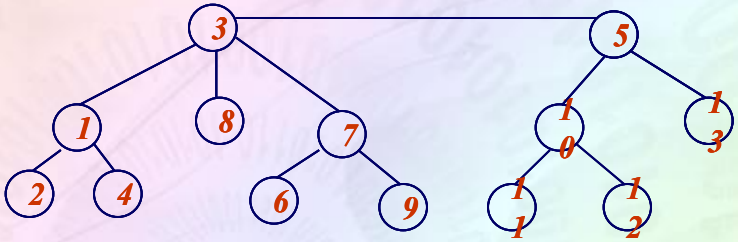
Алгоритм кодирования деревьев

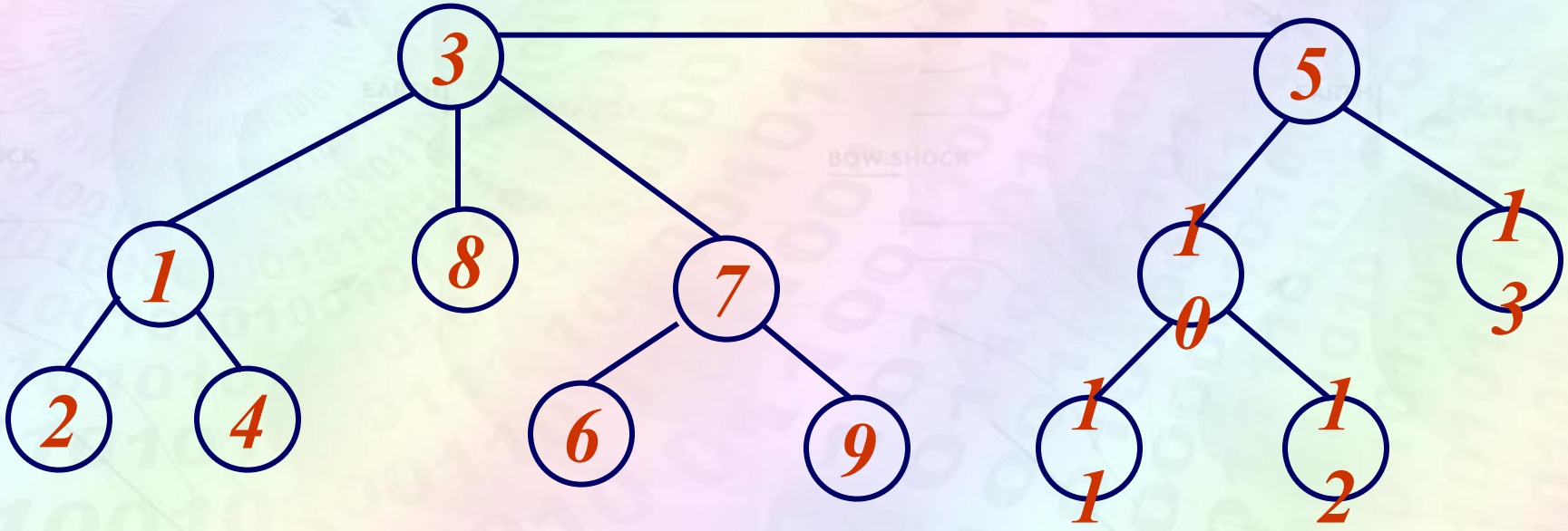
1) Вводится последовательность $N_p = (1, 2, \ldots, p)$, где p – количество вершин графа.

2) Выбирается висячая вершина с наименьшим номером, эта вершина удаляется из последовательности $N_p=(1,2,\ldots,p)$, а номер связанной с ней вершины записывается.

3) Затем этот процесс повторяется до тех пор, пока не получим последовательность $a(T)=(a_1, a_2,\ldots,a_{p-2})$.

Пример кодирования деревьев





1 1 3 7 3 7 3 5 10 10 5

Алгоритм декодирования деревьев

1) Находим общее количество вершин (количество вершин в коде дерева + 2);
2) Находим висячие вершины (т.е. которые не входят в код);
3) Находим висячую вершину с минимальным номером и соединяем ее с первой неиспользованной вершиной в коде. Если выбранная вершина не встречается далее в последовательности кода, записываем ее вершину в последовательности листьев;
4) Повторяем пункт 3), до использования всех листьев;
5) Последнюю вершину кода соединяем с листом с

Пример декодирования деревьев

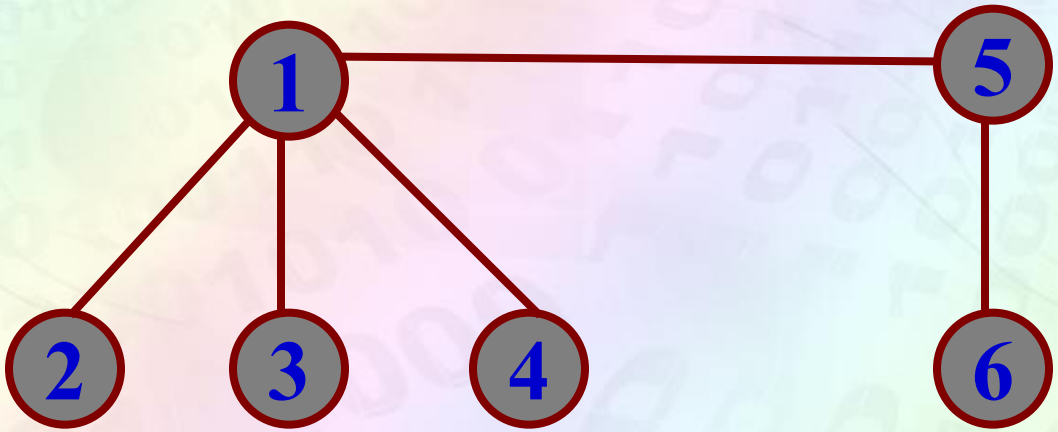
Дан код: 1, 1, 1, 5. Необходимо построить дерево.

Решение.

1. Общее количество вершин: ***4+2=6.***
2. Находим висячие вершины: ***2, 3, 4, 6***

Код дерева: 1 1 1 5

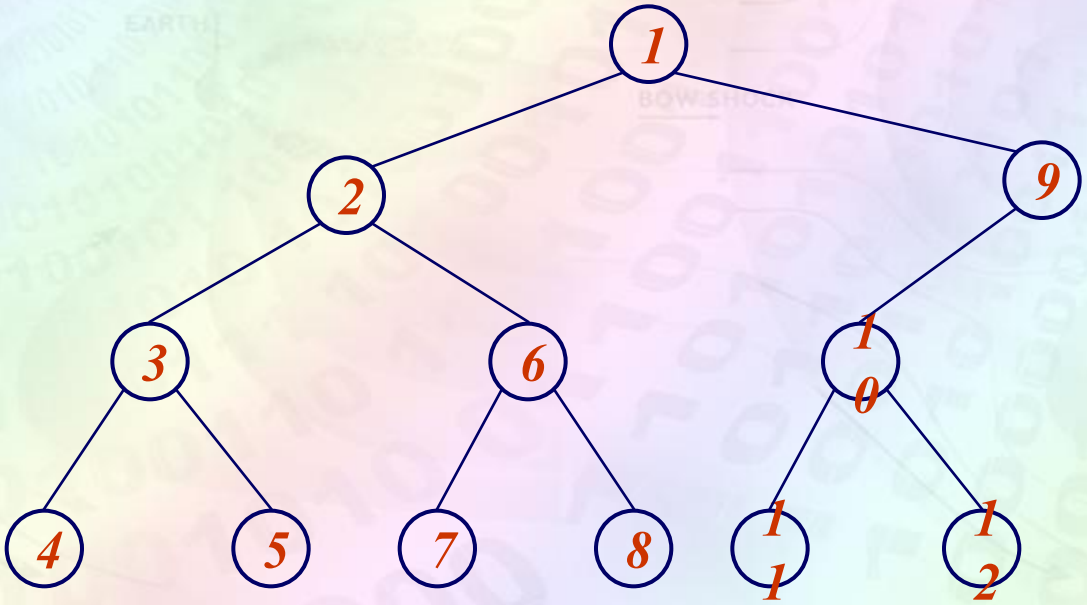
Висячие вершины: 2 3 ~~5~~ 4 6



Бинарные деревья

Бинарные деревья

Бинарным (двоичным) деревом Т называется упорядоченное дерево, из каждой вершины которого может исходить не более двух дуг.



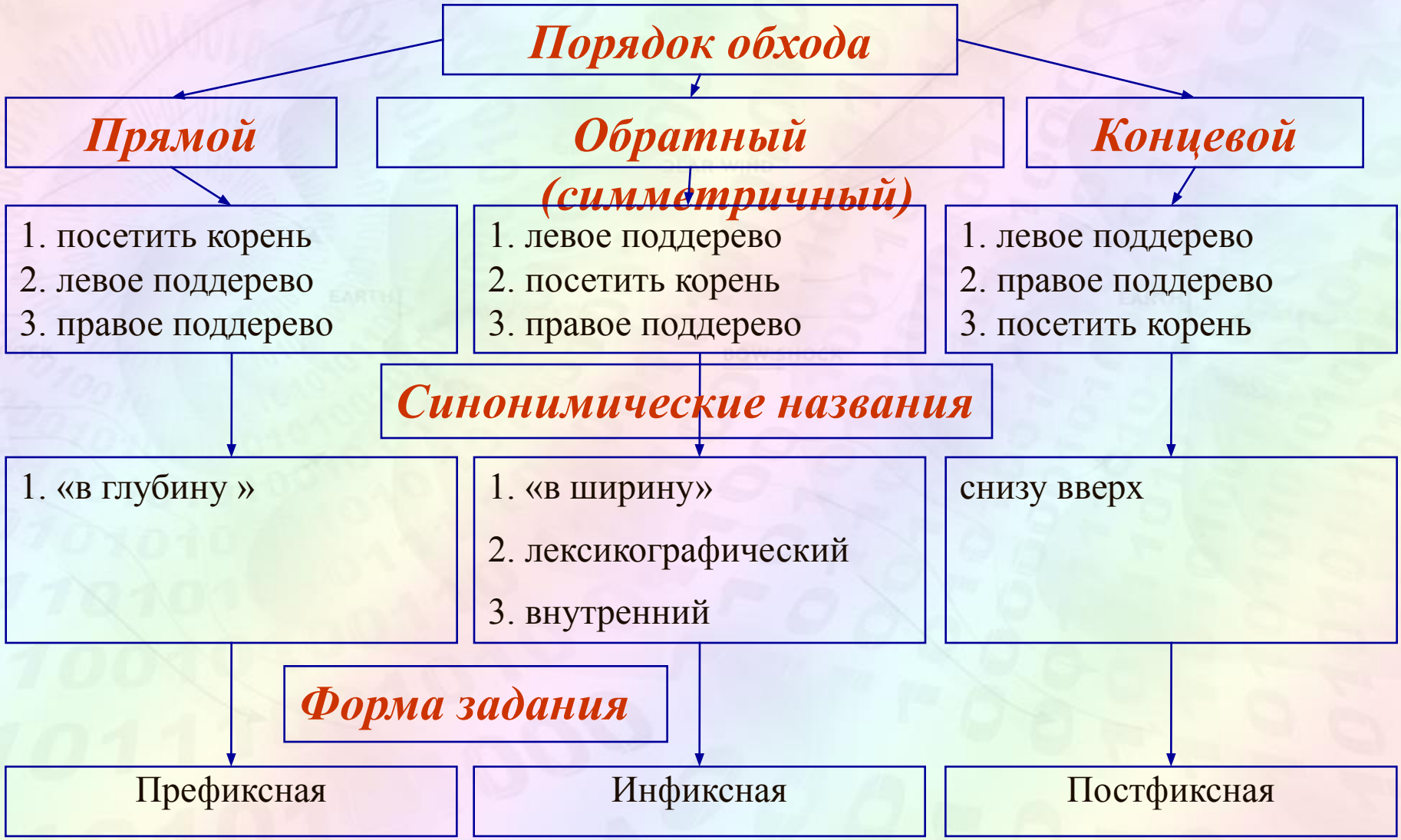
Бинарные деревья

Каждая вершина бинарного дерева может иметь либо двух сыновей – левого и правого, либо иметь только левого сына, либо только правого сына, либо не иметь ни одного сына.

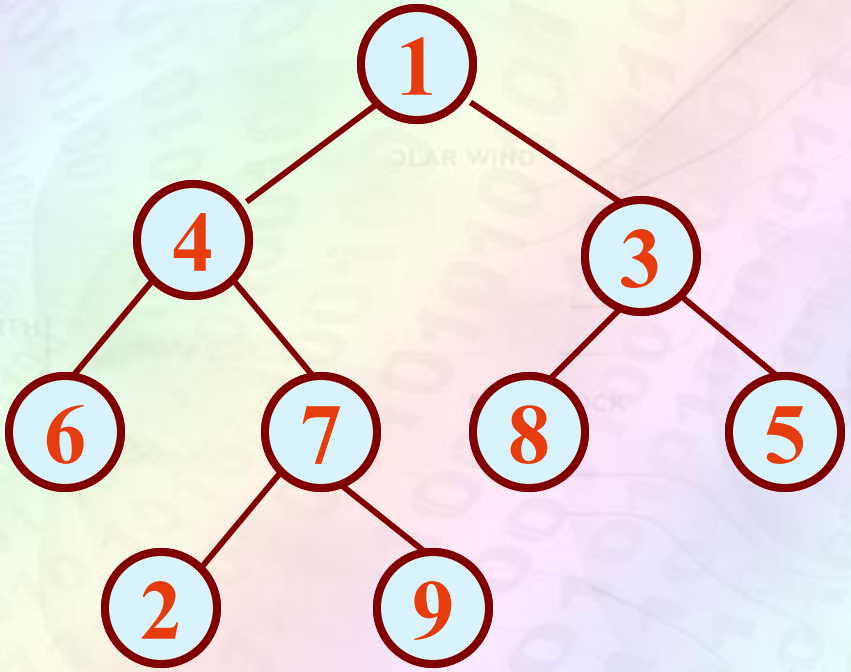
Поддерево, корень которого является левым сыном вершины v, называется левым поддеревом вершины v.

Поддерево, корень которого является правым сыном вершины v, называется правым поддеревом вершины v.

Правила обхода бинарных деревьев

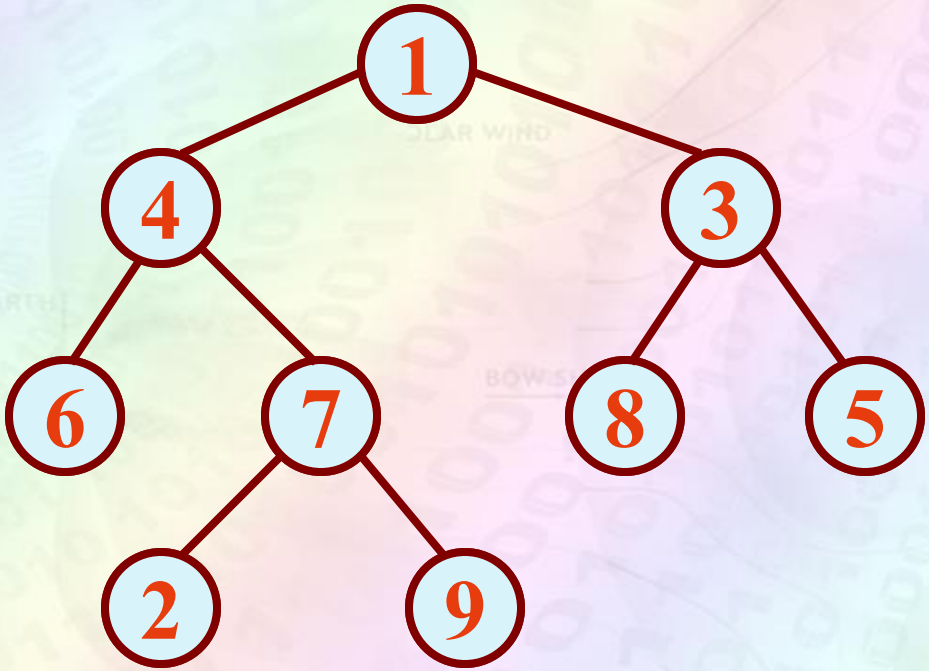


Обход бинарного дерева в прямом порядке



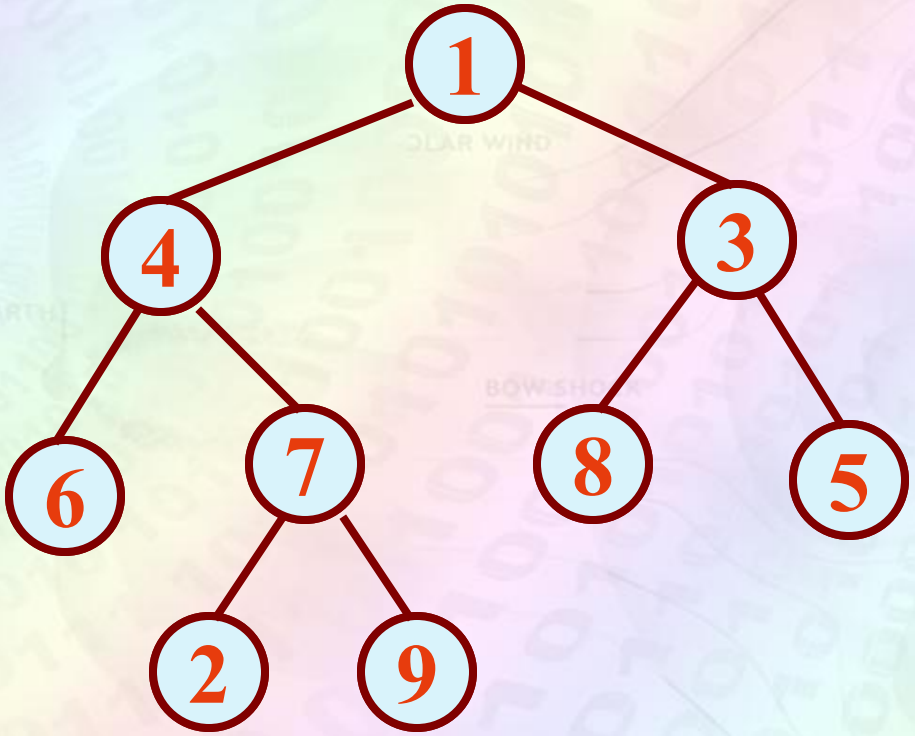
1 4 6 7 2 9 3 8 5

Обход бинарного дерева в симметричном порядке



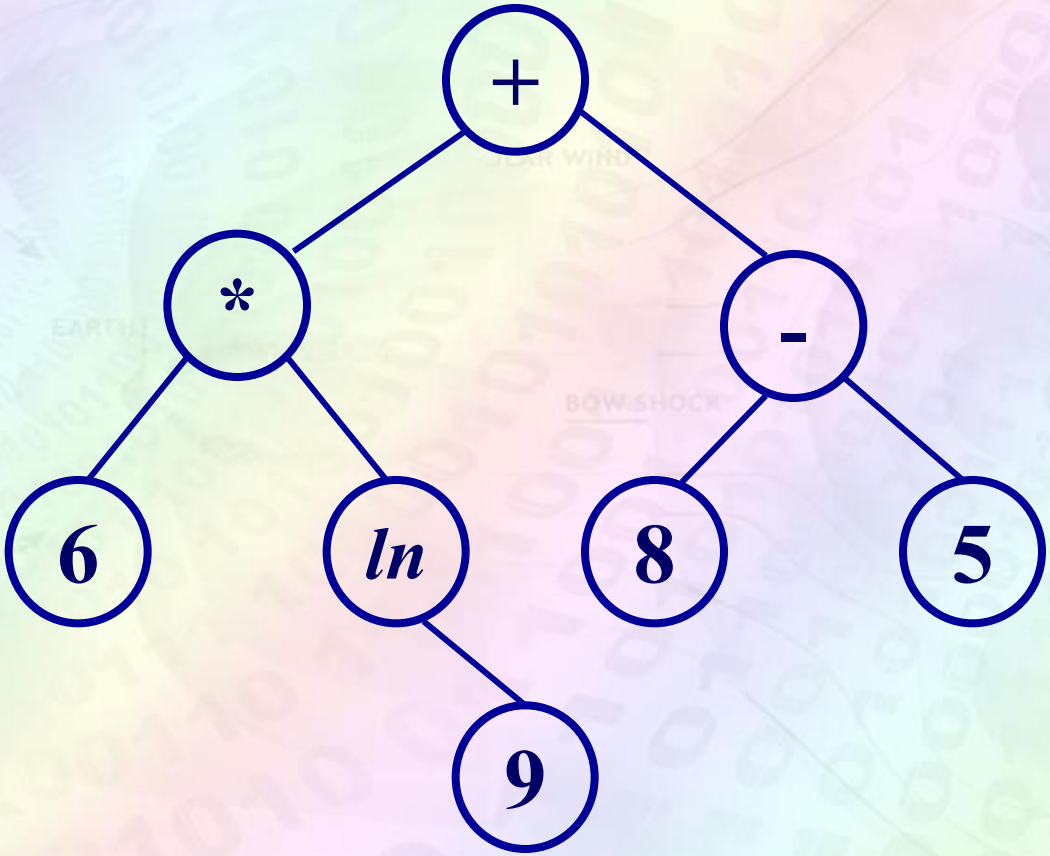
6 4 2 7 9 1 8 3 5

Обход бинарного дерева в концевом порядке



6 2 9 7 4 8 5 3 1

Запись математических выражений



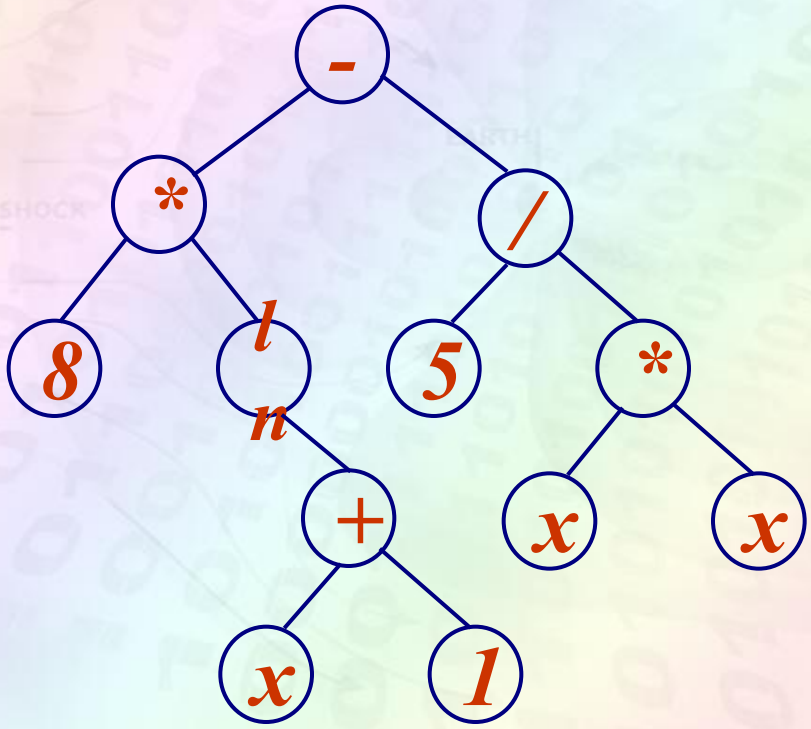
(6 * ln (9)) + (8 – 5)

Запись математических выражений

$$y = 8 * \ln(x + 1) - 5 / x^2$$

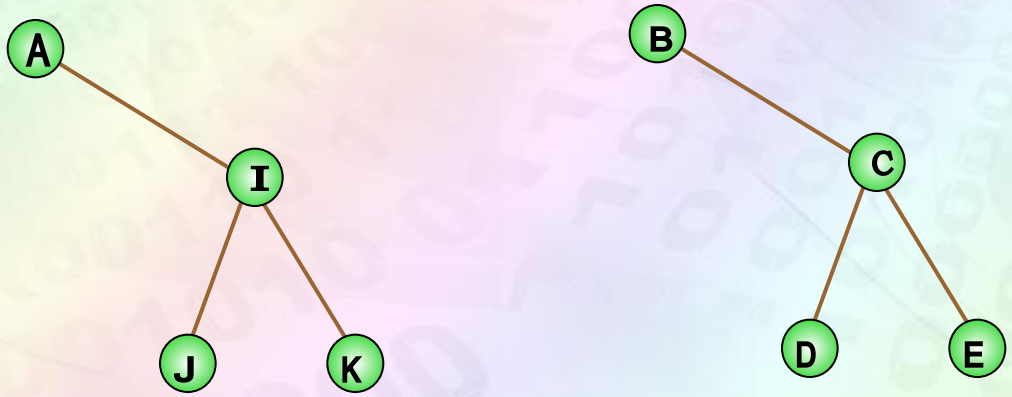
3 2 1 6 5 4

1. Построим концевые вершины, соответствующие переменным и константам заданного выражения.
2. Определим приоритет операций в выражении.
3. В соответствии с приоритетом операций добавляем в дерево вершины, соответствующие операциям и соединяем их с концевыми вершинами.



Подобные бинарные деревья

Два бинарных дерева называются ***подобными***, если они имеют одинаковую структуру, то есть либо они пусты, либо содержат одинаковое число поддеревьев и их левое и правое поддеревья подобны.



Эквивалентные бинарные деревья

Бинарные деревья ***эквивалентны***, если они подобны и соответствующие узлы содержат одну и ту же информацию.