

Методы вычислений

1. Алгоритм Евклида
2. Решение уравнений
3. Оптимизация
4. Восстановление зависимостей
5. Статистика
6. Моделирование

Методы вычислений

Тема 1. Алгоритм Евклида

Вычисление НОД

НОД = наибольший общий делитель двух натуральных чисел – это наибольшее число, на которое оба исходных числа делятся без остатка.

Перебор:

1. Записать в переменную k минимальное из двух чисел.
2. Если a и b без остатка делятся на k , то стоп.
3. Уменьшить k на 1.
4. Перейти к шагу 2.

это цикл с условием!



Где будет НОД?




Почему алгоритм обязательно закончится?

Вычисление НОД (перебор)

```
k := a; { или k := b; }  
while (a mod k <> 0) or  
      (b mod k <> 0) do  
  k := k - 1;  
writeln ('НОД(' , a , ',' , b , ')=' , k);
```

ИЛИ

 Почему можно начинать с любого числа?

 Как начать с минимального?

 много операций для больших чисел

Алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a-b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b-a)\end{aligned}$$

Заменяем большее из двух чисел **разностью** большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.



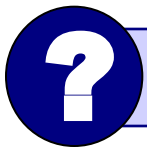
Евклид
(365-300 до. н. э.)

Пример:

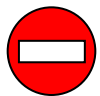
$$\begin{aligned}\text{НОД}(14, 21) &= \text{НОД}(14, 21-14) = \text{НОД}(14, 7) \\ &= \text{НОД}(7, 7) = 7\end{aligned}$$

Реализация алгоритма Евклида

```
пока  $a \neq b$  делай  
  если  $a > b$ , то  
     $a := a - b$   
  иначе  $b := b - a$ ;
```



Где будет НОД? Как его вывести?



много шагов при большой разнице чисел:

$$\text{НОД}(1998, 2) = \text{НОД}(1996, 2) = \dots = 2$$

Модифицированный алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a \bmod b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b \bmod a)\end{aligned}$$

Заменяем большее из двух чисел **остатком от деления** большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

Пример:

$$\text{НОД}(14, 21) = \text{НОД}(14, 7) = \text{НОД}(0, 7) =$$

Еще ⁷ один вариант:

$$\text{НОД}(2 \cdot a, 2 \cdot b) = 2 \cdot \text{НОД}(a, b)$$

$$\text{НОД}(2 \cdot a, b) = \text{НОД}(a, b) \quad // \text{ при нечетном } b$$

Задания

«4»: Составить программу для вычисления НОД и заполнить таблицу:

N	64168	358853	6365133	17905514	549868978
M	82678	691042	11494962	23108855	298294835
НОД(N,M)					

«5»: То же самое, но сравнить для всех пар число шагов обычного и модифицированного алгоритмов (добавить в таблицу еще две строчки).

Методы вычислений

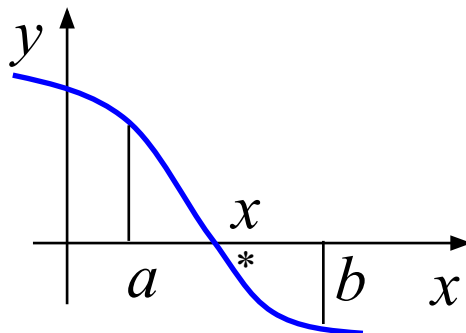
Тема 2. Решение уравнений

- Точные (аналитические)

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Приближенные

- графические



- Численные

(методы последовательного приближения):

- 1) по графику найти интервал $[a, b]$, в котором находится x^* (или одно **начальное приближение** x_0)
- 2) по некоторому алгоритму уточнить решение, сужая интервал, в котором находится x^*
- 3) повторять шаг 2, пока не достигнута требуемая точность:

$$b - a < \varepsilon$$

Численные методы

Применение: используются тогда, когда точное (аналитическое) решение неизвестно или очень трудоемко.



- дают хотя бы какое-то **решение**

- во многих случаях можно оценить ошибку и найти решение **с заданной точностью**

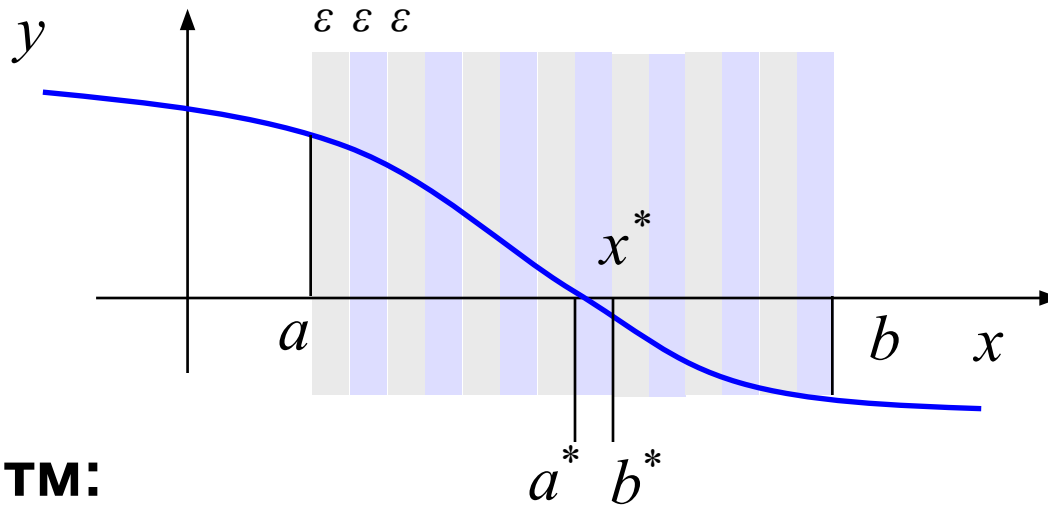


- решение всегда приближенное, **неточное**

$$\sqrt{x+1} - 4 \sin(x-1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \cancel{1,2974} \quad x \approx 1,3974$$

Метод прямого перебора

Задача: найти решение уравнения $f(x) = 0$ на интервале $[a, b]$ с заданной точностью ε (чтобы найденное решение отличалось от истинного не более, чем на ε).



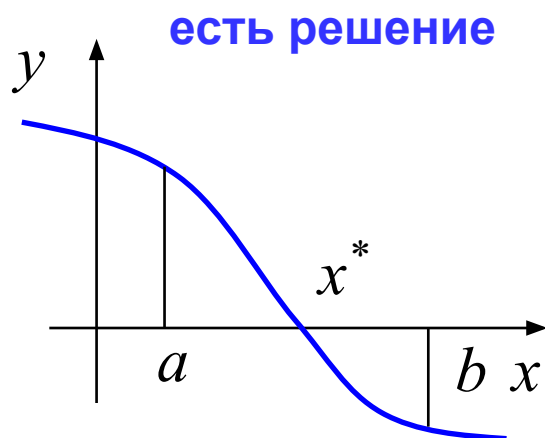
Алгоритм:

- разбить интервал $[a, b]$ на полосы шириной ε
- найти полосу $[a^*, b^*]$, в которой находится x^*
- решение — a^* или b^*



Как улучшить решение?

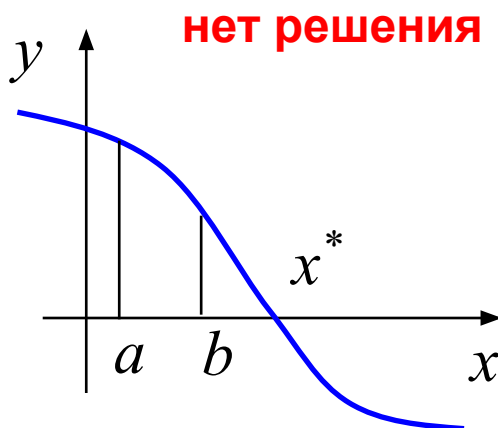
Есть ли решение на $[a, b]$?



$$f(a) > 0$$

$$f(b) < 0$$

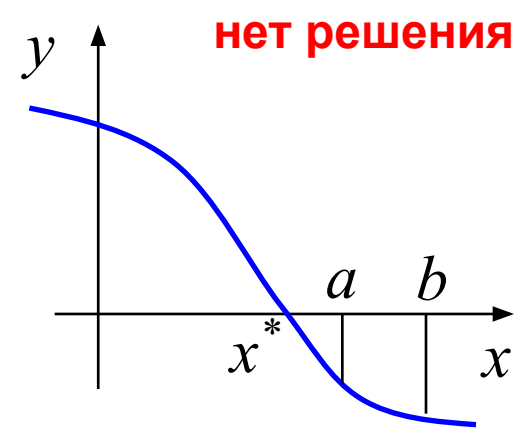
$$f(a)f(b) < 0$$



$$f(a) > 0$$

$$f(b) > 0$$

$$f(a)f(b) > 0$$



$$f(a) < 0$$

$$f(b) < 0$$



Если **непрерывная** функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервала $[a, b]$, то в некоторой точке x внутри $[a, b]$ она равна 0, то есть $f(x) = 0$!

Метод прямого перебора

```
eps := 0.001; { точность решения }
```

```
x := a;
```

```
пока f(x)*f(x+eps) > 0 делай
```

```
  x := x + eps; { к следующему интервалу }
```

```
конец
```

```
ответ := x;
```



Как повысить точность без лишних вычислений?

```
eps := 0.001; { точность решения }
```

```
x := a;
```

```
while f(x)*f(x+eps) > 0 do begin
```

```
  x := x + eps; { к следующему интервалу }
```

```
end;
```

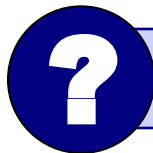
```
x := x + eps/2;
```



Что опасно?

Метод прямого перебора

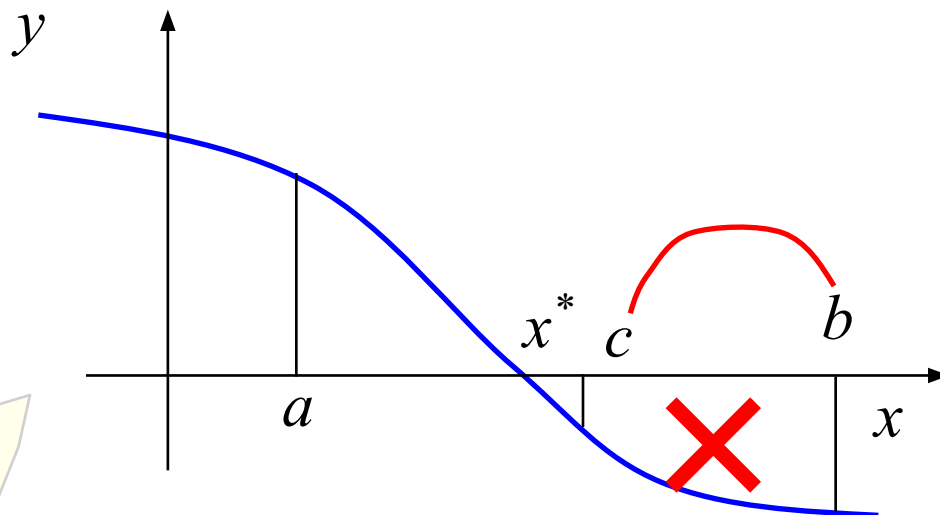
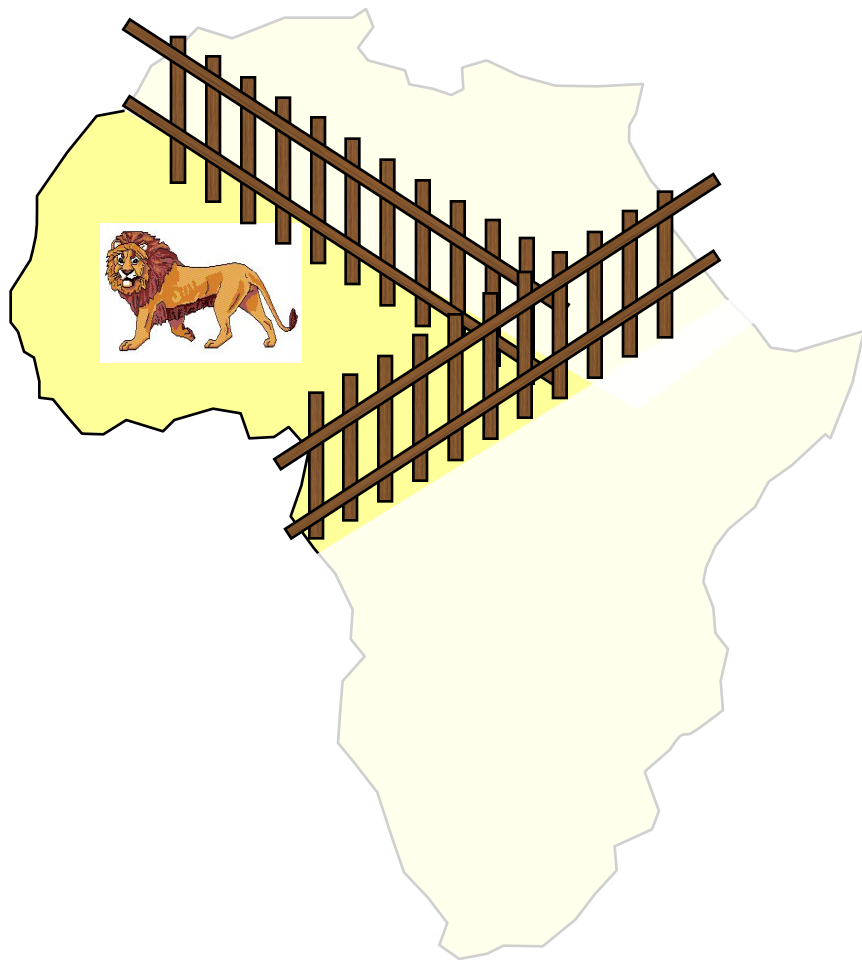
```
program qq;  
var ...: real;  
  
function f(x: real): real;  
begin  
    f := -x;  
end;  
  
begin  
    { основная программа }  
end.
```



Как найти все решения на $[a,b]$?



Задания

- «4»:** Найти все решения уравнения $x^2 = 5 \cos(x - 1)$ на интервале $[-5, 5]$ и вывести их на экран.
- «5»:** Сделать то же самое с помощью только одного цикла.



1. Найти середину отрезка $[a, b]$:
$$c = (a + b) / 2;$$
2. Если $f(c) * f(a) < 0$, сдвинуть правую границу интервала
$$b = c;$$
3. Если $f(c) * f(a) \geq 0$, сдвинуть левую границу интервала
$$a = c;$$
4. Повторять шаги 1-3, пока не будет $b - a \leq \epsilon$.

Метод дихотомии (деления пополам)

-  • простота
 - можно получить решение с **любой** заданной **точностью**
-  • нужно знать **интервал** $[a, b]$
 - на интервале $[a, b]$ должно быть только **одно** решение
 - **большое число шагов** для достижения высокой точности
 - только для функций **одной** переменной

Метод дихотомии (в программе)

```
пока  $b - a > \epsilon$  делай  
   $c := (a + b) / 2;$   
  если  $f(a) * f(c) < 0$  то  
     $b := c$   
  иначе  $a := c;$   
конец  
ответ  $:= (a + b) / 2;$ 
```

Задания

- «4»:** Найти все решения уравнения $x^2 = 5 \cos(x - 1)$ на интервале $[-5, 5]$ методом дихотомии и вывести их на экран.
- «5»:** Сделать задачу на «4» и сравнить число шагов цикла при использовании метода перебора и метода дихотомии.

Решение уравнений в Excel

Задача: найти все решения уравнения $x^2 = 5 \cos x$ на интервале $[-5, 5]$



Как решить математическими методами?

Методы решения уравнений:

- **аналитические:** решение в виде формулы $x = \dots$
- **численные:** *приближенное* решение, число
 - 1) выбрать *начальное приближение* x_0 «рядом» с решением



Как выбрать начальное приближение?

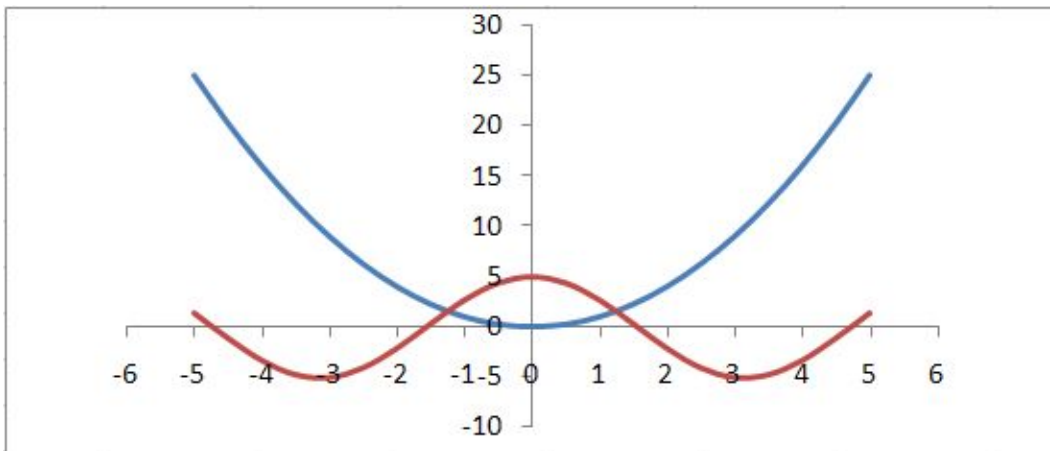
- 2) по некоторому алгоритму вычисляют первое приближение, затем – второе и т.д. $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$
- 3) вычисления прекращают, когда значение меняется очень мало (метод сходится) $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{15} \rightarrow x_{16} \approx x^*$

Решение уравнения $x^2 = 5 \cos x$

1. Таблица значений функций на интервале $[-5, 5]$

	A	B	C	D
1	x	f1	f2	
2	-5	=A2^2	=5*COS(A2)	
3	-4,5			
4				

2. Графики функций (диаграмма «Точечная»)



2 решения:

начальные приближения

$$x_0 = -1,5$$

$$x_0 = 1,5$$

Решение уравнения $x^2 = 5 \cos x$

3. Подготовка данных

начальное
приближение

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,5	=E2^2	=5*COS(E2)	=F2-G2
3				

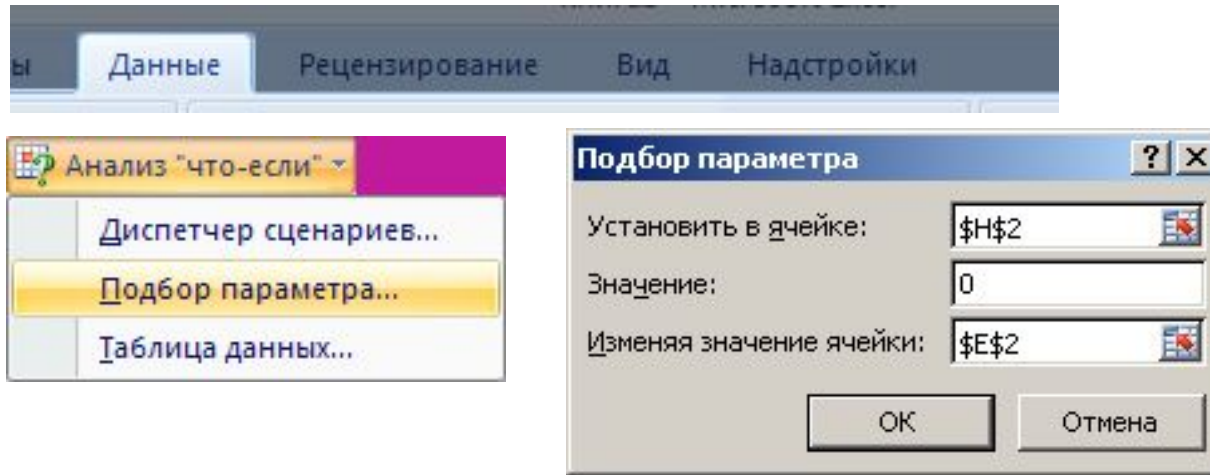
целевая
ячейка

Цель: H2=0

 Зачем нужна разность?

Решение уравнения $x^2 = 5 \cos x$

4. Подбор параметра



решение
уравнения

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,252	1,568	1,567	0,00053

ошибка



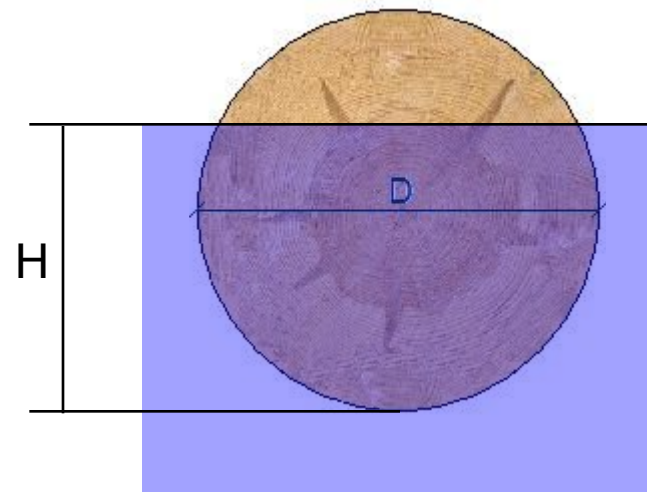
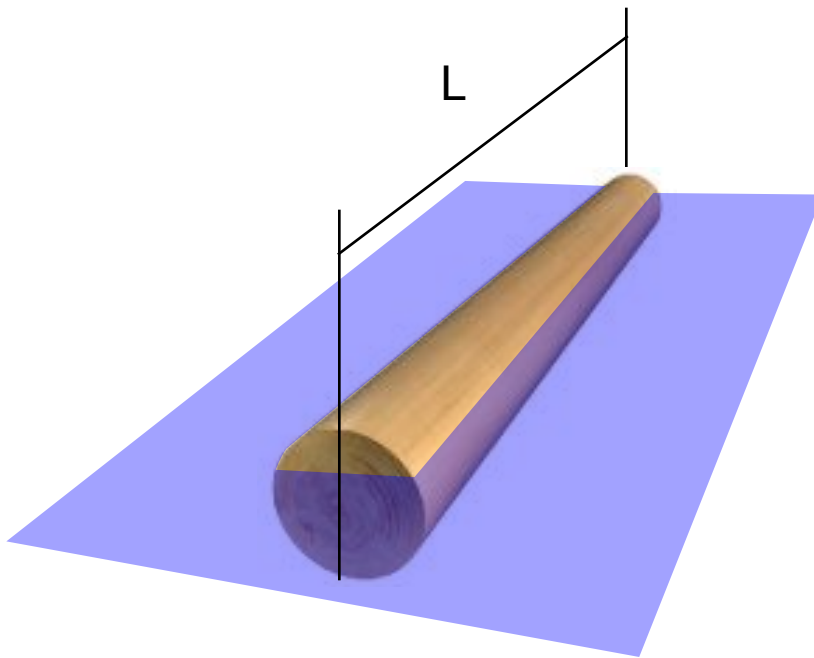
Почему
не нуль?



Как найти второе решение?

Плавающее бревно

На сколько погрузится бревно радиуса R , брошенное в воду, если плотность дерева $\rho_{\text{д}} = 700 \text{ кг/м}^3$. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$?



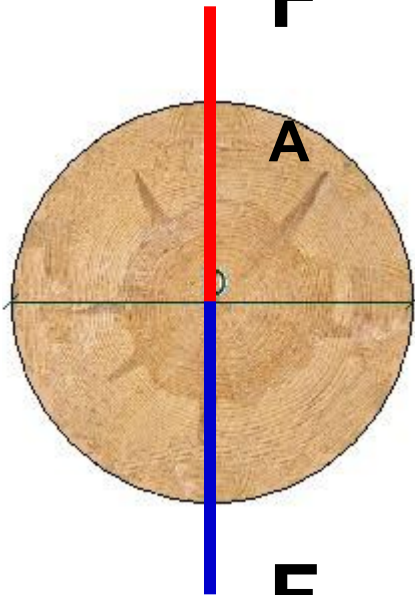
Плавающее бревно: силы

Сила Архимеда

F

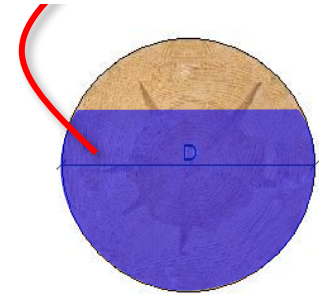
объем
погруженной
части

площадь сечения
погруженной части



$$F_A = \rho_B \cdot g \cdot V_1$$

площадь
сечения



F_g

$$F_g = mg = \rho \cdot V \cdot g$$

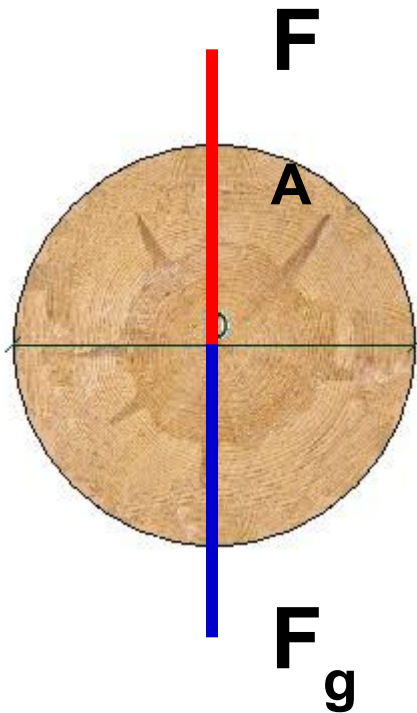
Сила тяжести

полный объем

$$S = \pi \cdot R^2$$

Плавающее бревно: равновесие

Сила Архимеда



Сила тяжести

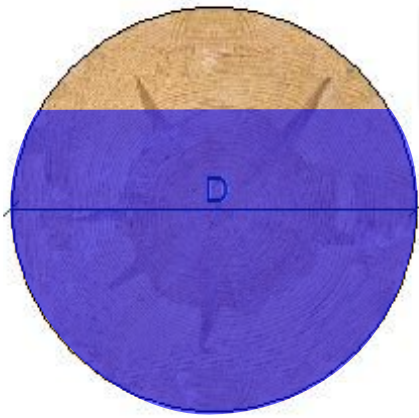
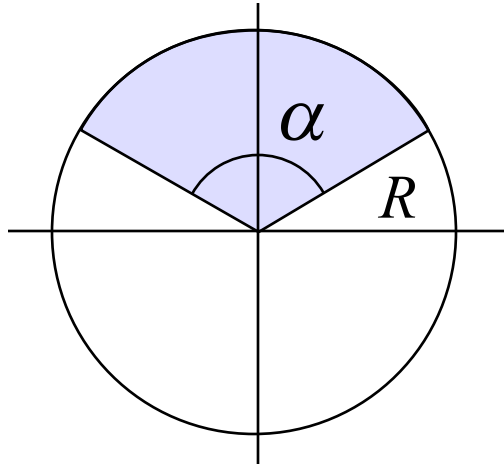
$$F_A = F_g$$

~~$$\rho_B \cdot S_1 \cdot L \cdot g = \rho \cdot S \cdot L \cdot g$$~~

$$\rho_B \cdot S_1 = \rho \cdot S$$

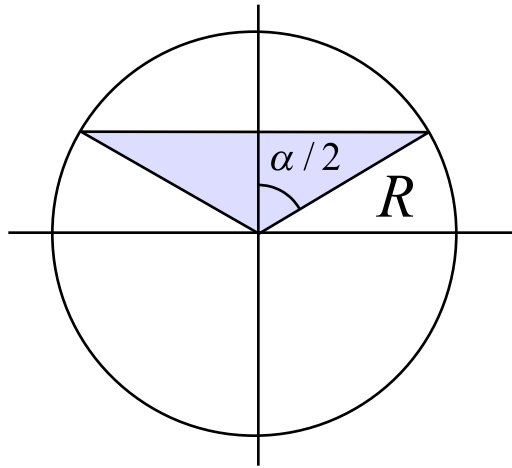
НЕИЗВЕСТНО

Плавающее бревно: площадь сечения


 S_1


$$S_0 = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha$$

$$2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$



$$S_{\Delta} = 2 \cdot \frac{1}{2} R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \alpha$$

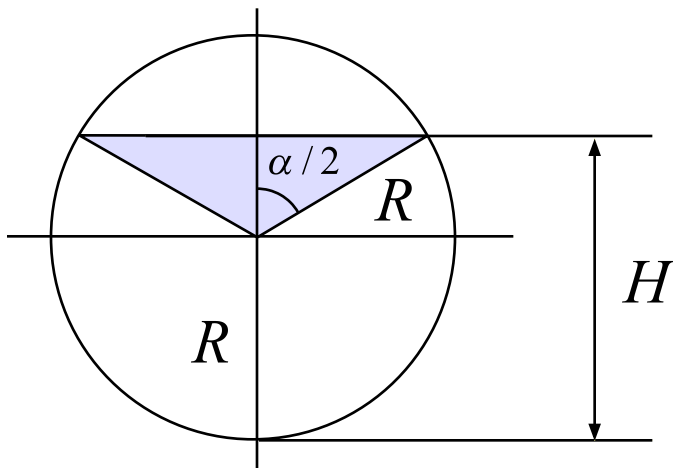
$$S_1 = \pi \cdot R^2 - S_0 + S_{\Delta}$$

Плавающее бревно: уравнение

$$\rho_B \cdot S_1 = \rho \cdot S$$

$$\rho_B \cdot \left[\pi \cdot R^2 - \frac{1}{2} R^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha) \right] = \rho \cdot \pi \cdot R^2$$

найти α



$$H = R + R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Методы вычислений

Тема 3. Оптимизация

Оптимизация

Оптимизация – это поиск оптимального (наилучшего) варианта в заданных условиях.

Оптимальное решение – такое, при котором некоторая заданная функция (*целевая функция*) достигает минимума или максимума.

Постановка задачи:

- **целевая функция**

$$f(x) \rightarrow \min \quad (\text{расходы, потери, ошибки})$$

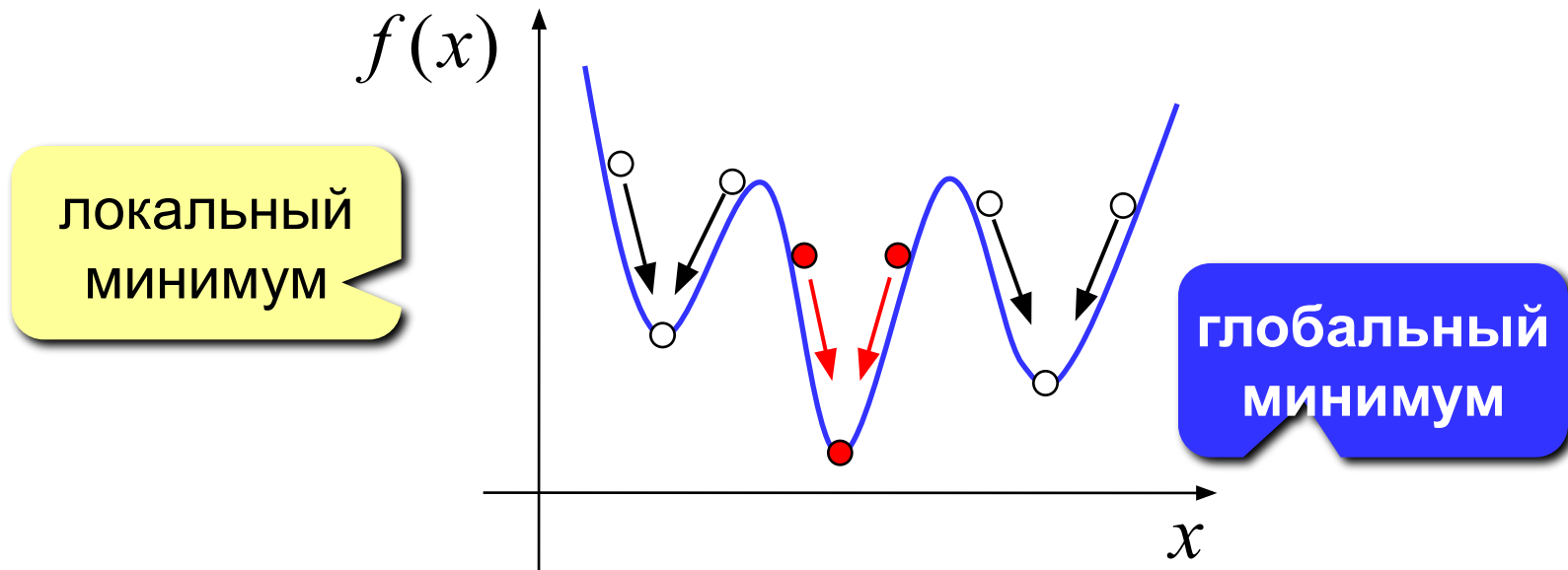
$$f(x) \rightarrow \max \quad (\text{доходы, приобретения})$$

- **ограничения**, которые делают задачу осмысленной

Задача без ограничений: построить дом
при минимальных затратах.

Решение: не строить дом вообще.

Оптимизация

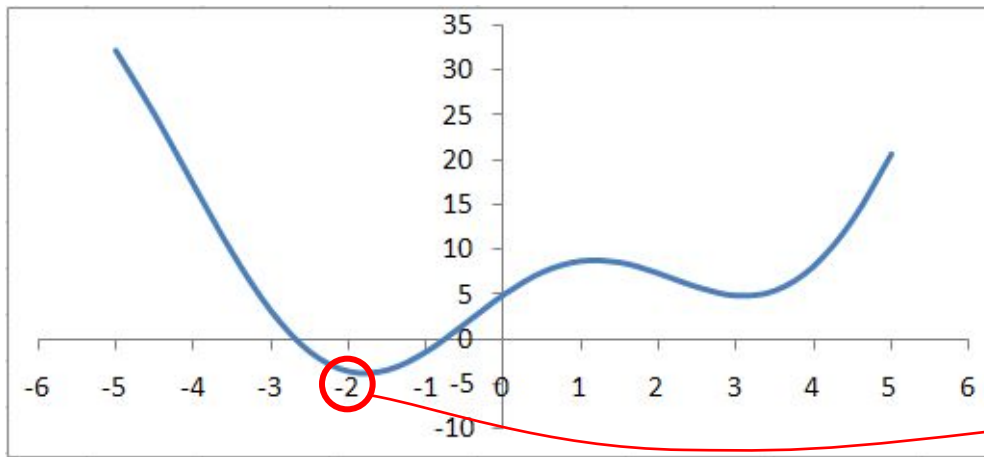


- обычно нужно найти **глобальный минимум**
- большинство численных методов находят только **локальный минимум**
- минимум, который найдет *Excel*, зависит от выбора начального приближения («шарик на горке скатится в ближайшую ямку»)

Поиск минимума функции

$$y = x^2 + 6 \sin x + 5 \cos x$$

1. Строим график функции (диаграмма «Точечная»)



Зачем нужен график?

начальное приближение

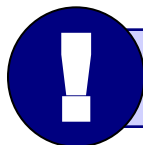
$$x_0 = -2$$

2. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

целевая ячейка



Изменение E2 должно влиять на F2!

Поиск минимума функции

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

3. Настройка «Поиск решения»

целевая
ячейка

изменяемые
ячейки:

E2

D2:D6

D2:D6; C5:C8

ограничения

A1 <= 20

B2:B8 >= 5

A1 = целое

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Параметры оптимизации

Параметры поиска решения [X]

Максимальное время: секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:

Допустимое отклонение: %

Сходимость:

Линейная модель Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения Показывать результаты итераций

Оценки линейная квадратичная

Разности прямые центральные


Метод поиска Ньютона сопряженных градиентов

Оптимизация

 Подбор параметра – это оптимизация?

Надстройка «Поиск решения» позволяет:

- искать минимум и максимум функции
- использовать несколько изменяемых ячеек и диапазонов
- вводить ограничения (\leq , \geq , целое, двоичное)

 Как влияет ограничение «А1-целое» на сложность решения задачи?

Методы вычислений

Тема 4. Восстановление зависимостей

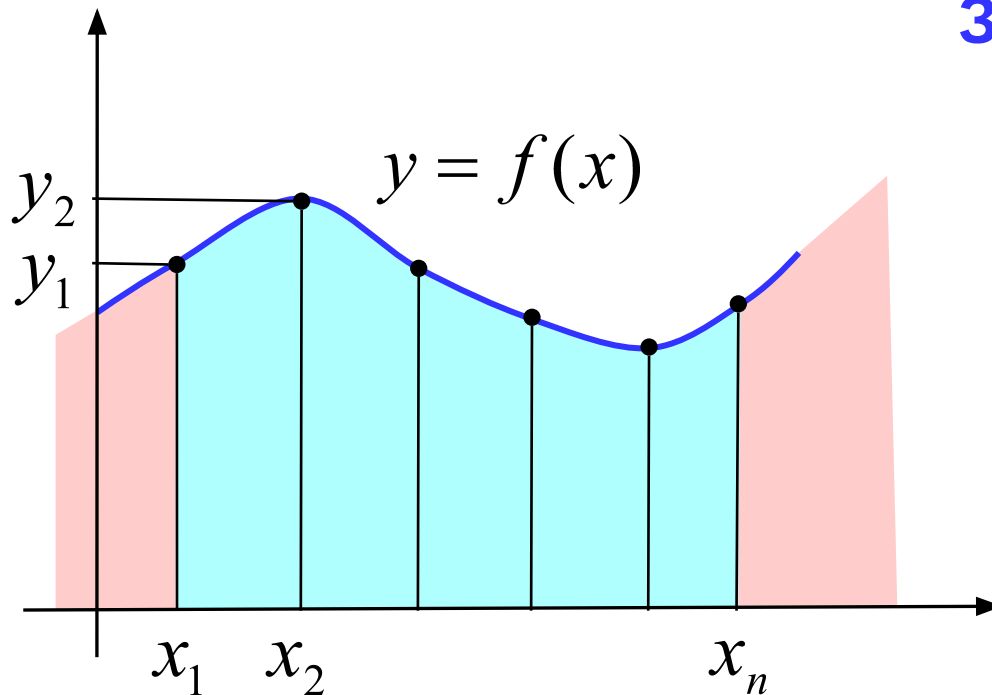
Восстановление зависимостей

Пары значений (аргумент-функция):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

какую?

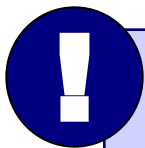
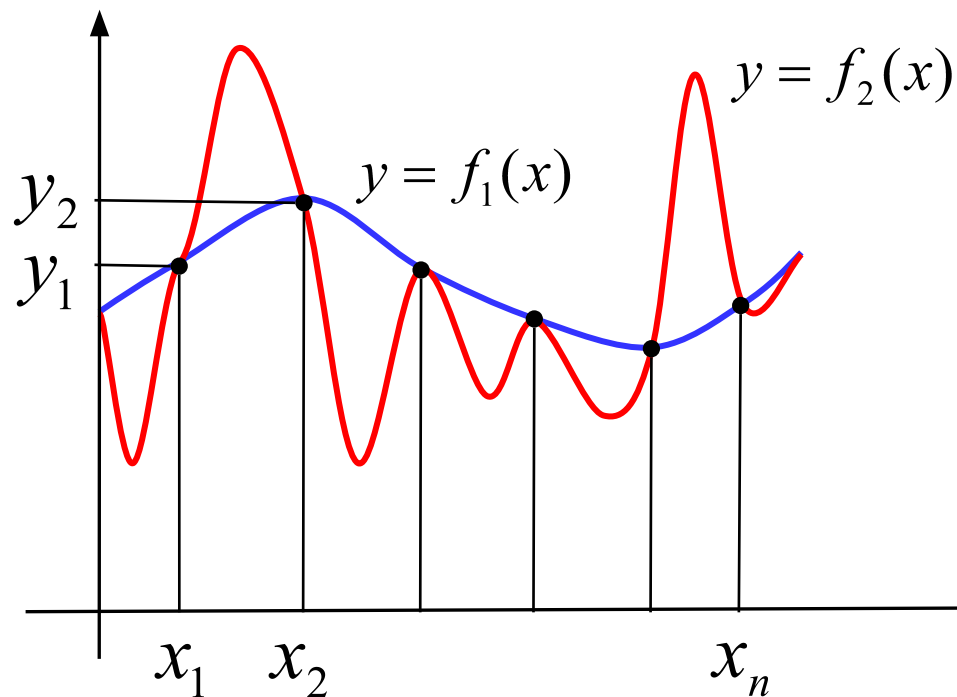
задают некоторую неизвестную функцию $y = f(x)$



Зачем:

- найти y в промежуточных точках (интерполяция)
- найти y вне диапазона измерений (экстраполяция, прогнозирование)

Какое решение нам нужно?

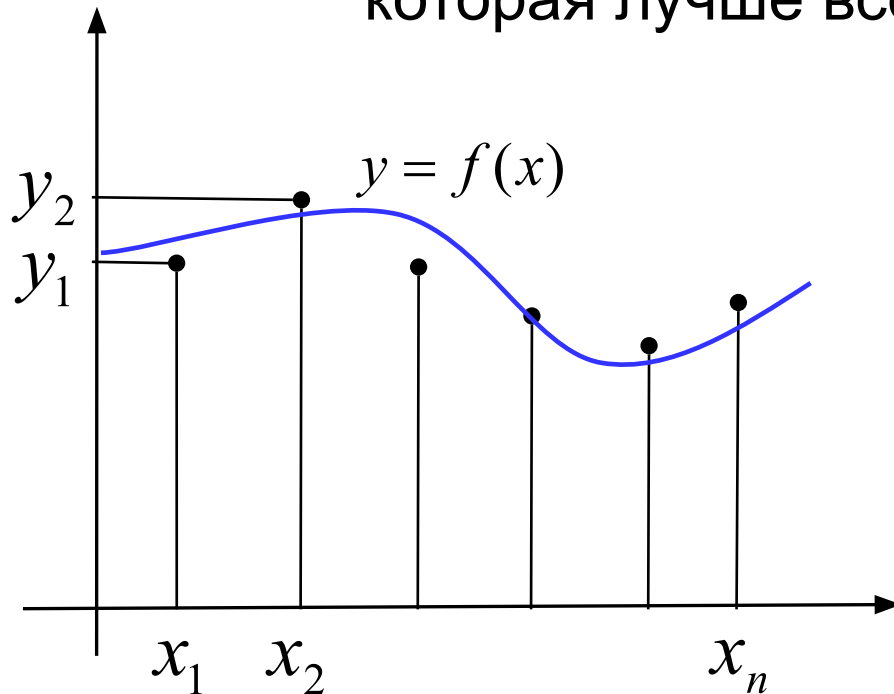


Через заданный набор точек проходит бесконечно много разных кривых!

Вывод: задача некорректна, поскольку решение неединственно.

Восстановление зависимостей

Корректная задача: найти функцию заданного вида, которая лучше всего соответствует данным.



Примеры:

• линейная $y = a \cdot x + b$

• полиномиальная

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

• степенная $y = a \cdot x^b$

• экспоненциальная

$$y = a \cdot e^{bx}$$

• логарифмическая

$$y = a \cdot \ln x + b$$



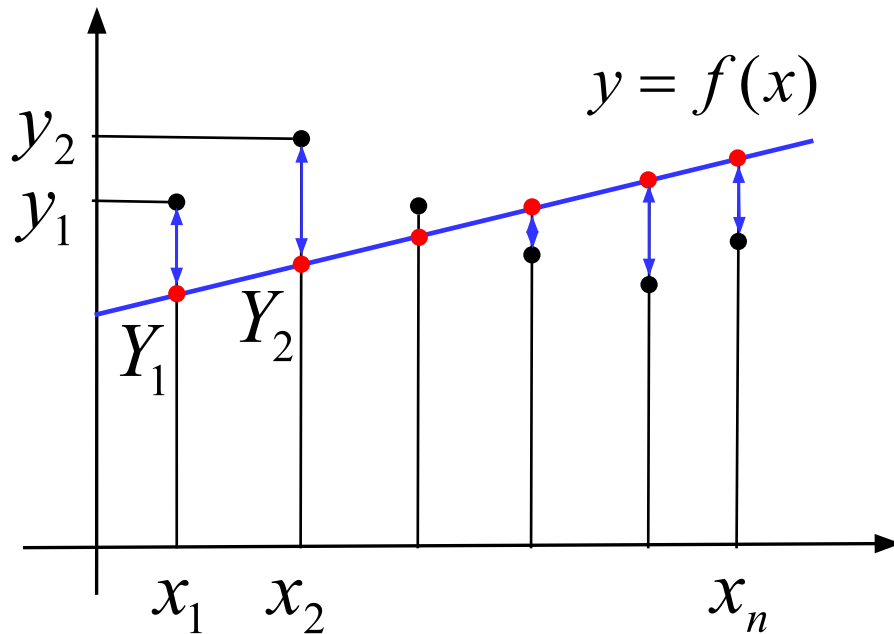
График функции не обязательно проходит через заданные точки!



Как выбрать функцию?

Что значит «лучше всего соответствует»? 41

Метод наименьших квадратов (МНК):



(x_i, y_i) заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

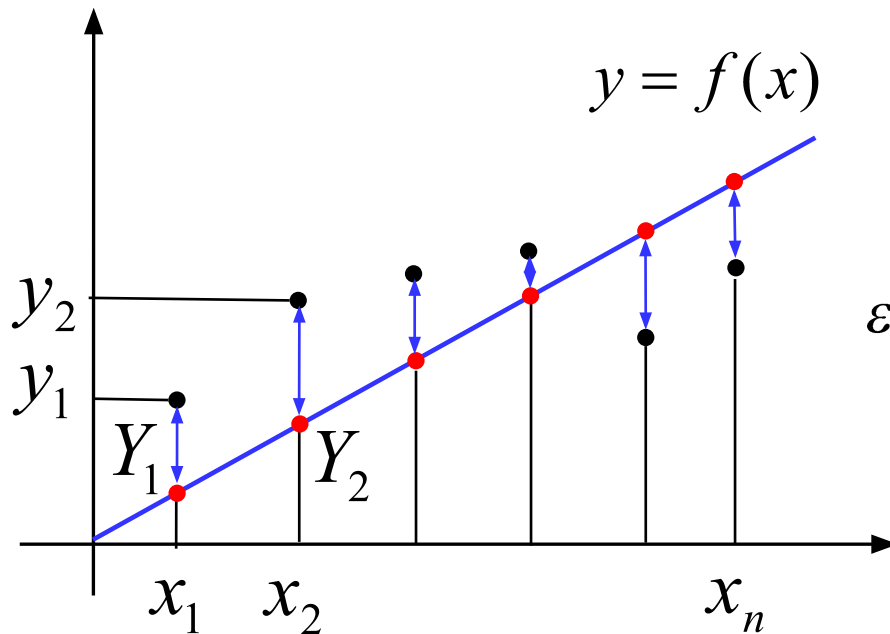
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \rightarrow \min$$



Зачем возведение в квадрат?

- 1) чтобы складывать положительные значения
- 2) решение сводится к системе линейных уравнений (просто решать!)

МНК для линейной функции



НЕИЗВЕСТНО!

$$Y_i = k \cdot x_i$$

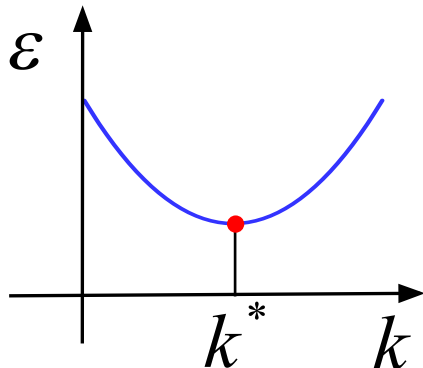
$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2 \\ &= k^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - k \cdot 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned}$$

a

$-b$

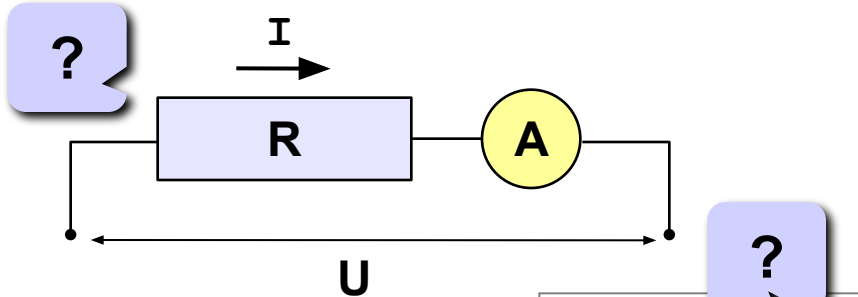
c

$$\varepsilon(k) = ak^2 + bk + c \rightarrow \min$$



$$k^* = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Сопротивление проводника

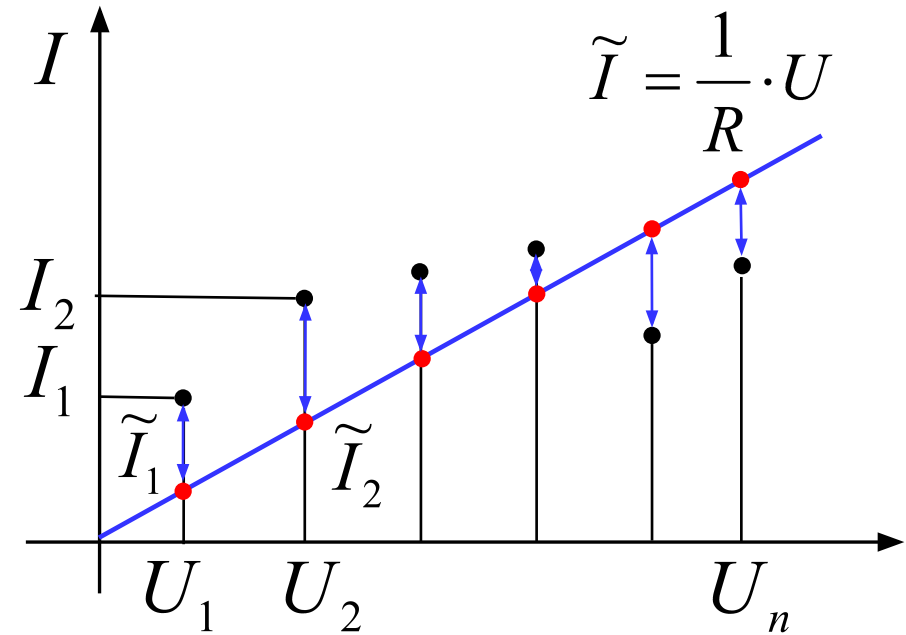


Закон Ома

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

Точки на линии:

$$\tilde{I}_k = \frac{1}{R^*} \cdot U_k$$



$$\begin{aligned} \varepsilon(R) &= \sum_{k=1}^n (I_k - \tilde{I}_k)^2 = \sum_{k=1}^n \left(I_k - \frac{1}{R} \cdot U_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{R^2} \cdot \sum_{k=1}^n U_k^2 - \frac{1}{R} \cdot 2 \sum_{k=1}^n I_k \cdot U_k + \sum_{k=1}^n I_k^2 \end{aligned}$$

a

$-b$

$$\frac{1}{R^*} = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{k=1}^n I_k U_k}{\sum_{k=1}^n U_k^2}$$

Обработка результатов эксперимента

Задача. В файле `mnk.txt` записаны в столбик 10 пар чисел (напряжение, ток), полученные в результате эксперимента с одним резистором. Найти (приблизительно) его сопротивление по методу наименьших квадратов.

$$\frac{1}{R^*} = \frac{\sum_{k=1}^n I_k U_k}{\sum_{k=1}^n U_k^2} \quad \Rightarrow \quad R^* = \frac{\sum_{k=1}^n U_k^2}{\sum_{k=1}^n I_k U_k}$$

Этапы решения:

1. Прочитать данные из файла в массивы U и I .

2. Вычислить $\sum_{k=1}^n I_k U_k$ $\sum_{k=1}^n U_k^2$

3. Вычислить R^* .

Работа с файлами: принцип с

Переменная типа
«текстовый файл»:
`var f: text;`

I этап. открыть файл :

- связать переменную `f` с файлом

```
Assign (f, 'mnk.txt') ;
```

- открыть файл (сделать его активным, приготовить к работе)

```
Reset (f) ; {для чтения}
```

```
Rewrite (f) ; {для записи}
```

II этап: работа с файлом

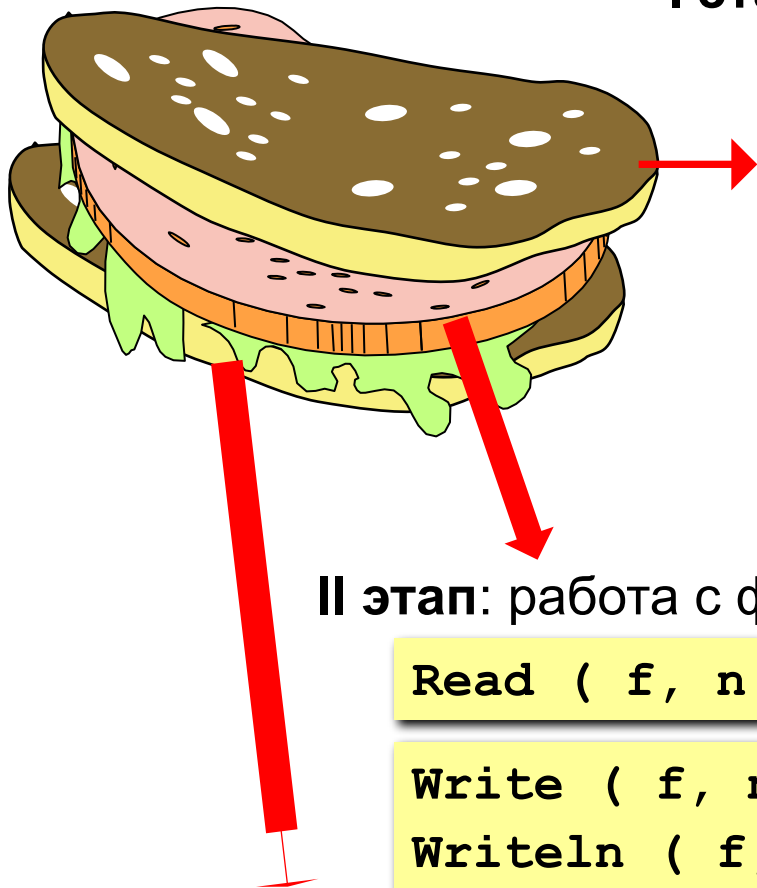
```
Read ( f, n ) ; { ввести значение n }
```

```
Write ( f, n ) ; { записать значение n }
```

```
Writeln ( f, n ) ; {с переходом на нов.строку }
```

III этап: закрыть файл

```
Close (f) ;
```



Обработка результатов эксперимента

Чтение данных:

```
var f: text;
```

```
...
```

```
begin
```

```
  Assign(f, 'mnk.txt');
```

```
  Reset(f);
```

```
  for k:=1 to 10 do begin
```

```
    Read(f, U[k], I[k]);
```

```
    Writeln(U[k]:0:3, ' ', I[k]:0:3);
```

```
  end;
```

```
  Close(f);
```

```
end.
```

```
U, I: array[1..10] of real;  
k: integer;
```



Какие переменные и массивы
надо объявить?

Обработка результатов эксперимента

Вычисления:

```

var UU: real;
...
UU := 0;
for k:=1 to 10 do begin
    UU := UU + U[k]*U[k];
end;
  
```

$$\sum_{k=1}^n U_k^2$$

? Что вычисляем?

? Как найти $\sum_{k=1}^n I_k U_k$?

? Как найти R^* ?

$$R^* = \frac{\sum_{k=1}^n U_k^2}{\sum_{k=1}^n I_k U_k}$$

Задания

- «4»: Используя метод наименьших квадратов, найти приближенное значение сопротивления по данным файла `mnk.txt`.
- «5»: Сделать то же самое, предполагая, что в файле неизвестное количество пар значений, но не более 100. Цикл ввода должен выглядеть так:

пока не достигнут конец файла (`eof = end of file`)

```
while not eof(f) do begin
    { читаем U[k] и I[k] }
    { тут еще что-то надо сделать }
end;
```


Коэффициент достоверности (*Excel*)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

(x_i, y_i) заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

\bar{y} – среднее значение y_i

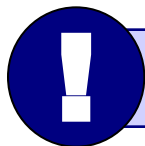
Крайние случаи:

- если график проходит через точки:

$$R^2 = 1$$

- если считаем, что y не меняется и $Y_i = \bar{y}$.

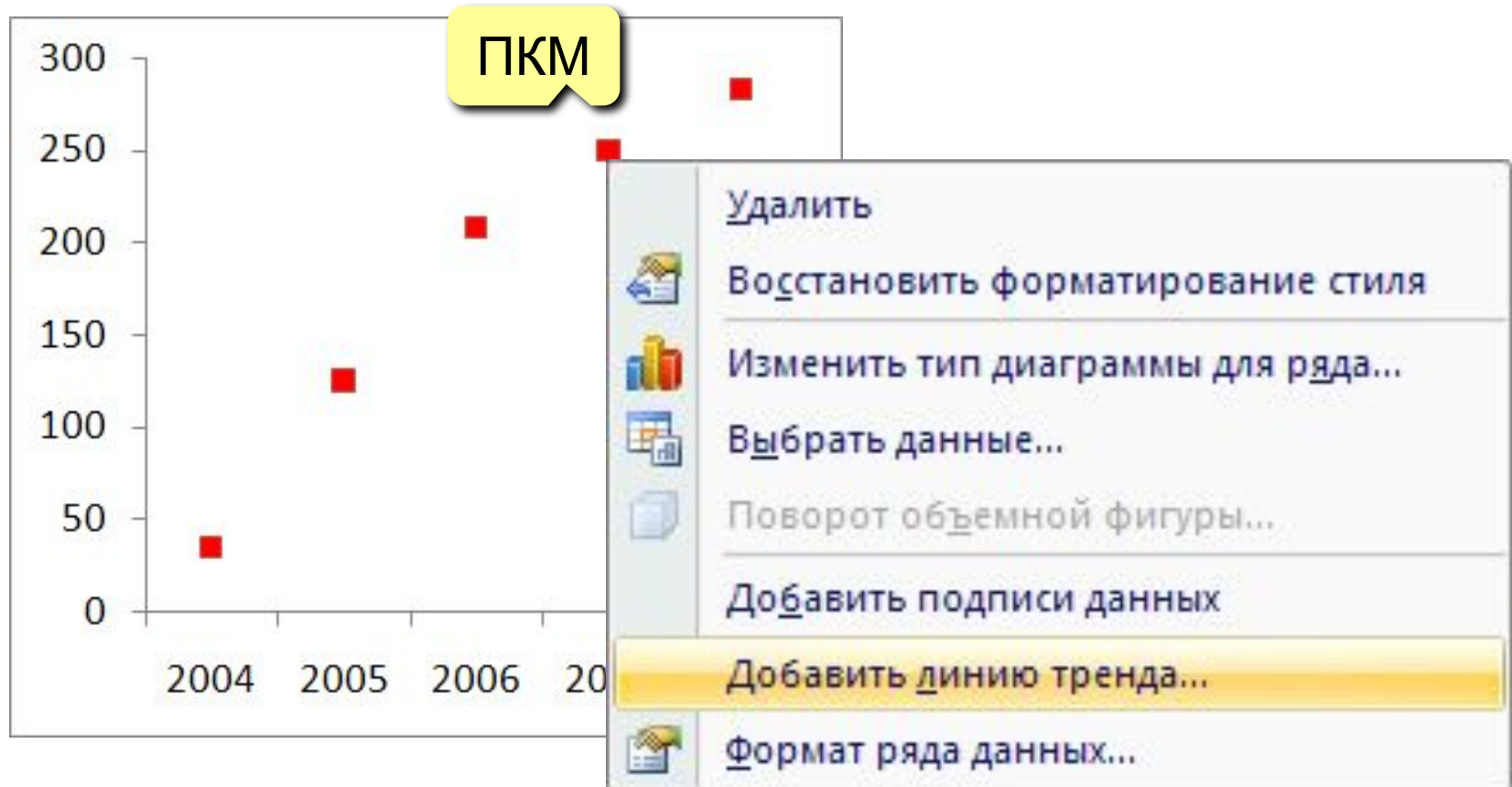
$$R^2 = 0$$

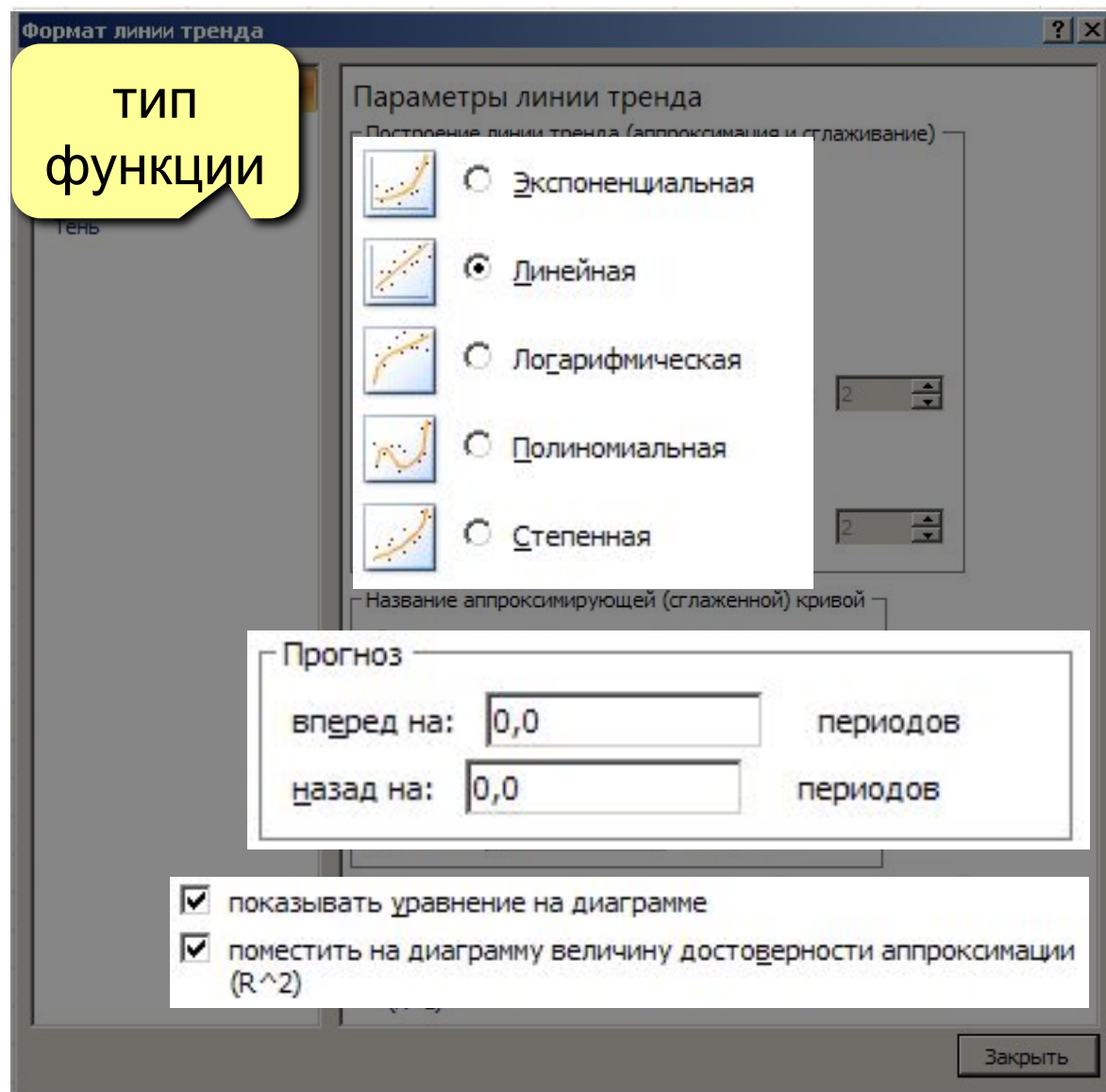


Фактически – метод наименьших квадратов!

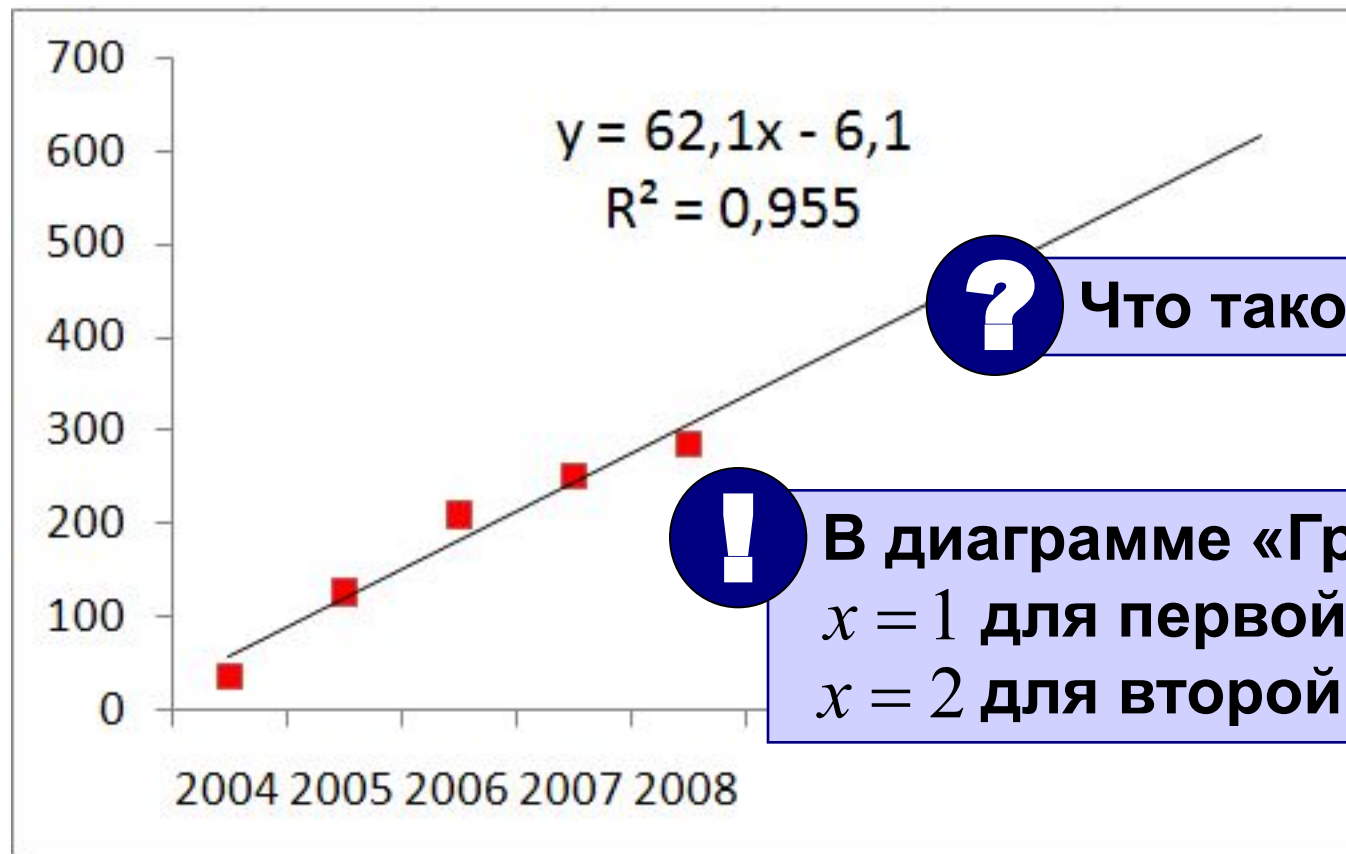
Восстановление зависимостей

Диаграмма «График»:





Восстановление зависимостей



Что такое x ?

В диаграмме «График»
 $x = 1$ для первой точки,
 $x = 2$ для второй и т.д.

Насколько хорошо выбрана функция?

Восстановление зависимостей

Сложные случаи (нестандартная функция):

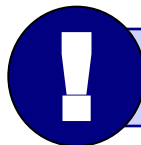
$$f(x) = a \cdot \sin kx + b$$



Что делать?

Алгоритм:

- 1) выделить ячейки для хранения a, k, b
- 2) построить ряд $Y_i = f(x_i)$ для тех же x_i
- 3) построить на одной диаграмме ряды y_i и Y_i
- 4) попытаться подобрать a, k, b так, чтобы два графика были близки
- 5) вычислить R^2 в отдельной ячейке
функции: СУММКВРАЗН – сумма квадратов разностей рядов
ДИСПР – дисперсия
- 6) Поиск решения: $R^2 \rightarrow \min$



Это задача оптимизации!

Методы вычислений

Тема 5. Статистика

Ряд данных и его свойства

Ряд данных – это упорядоченный набор значений

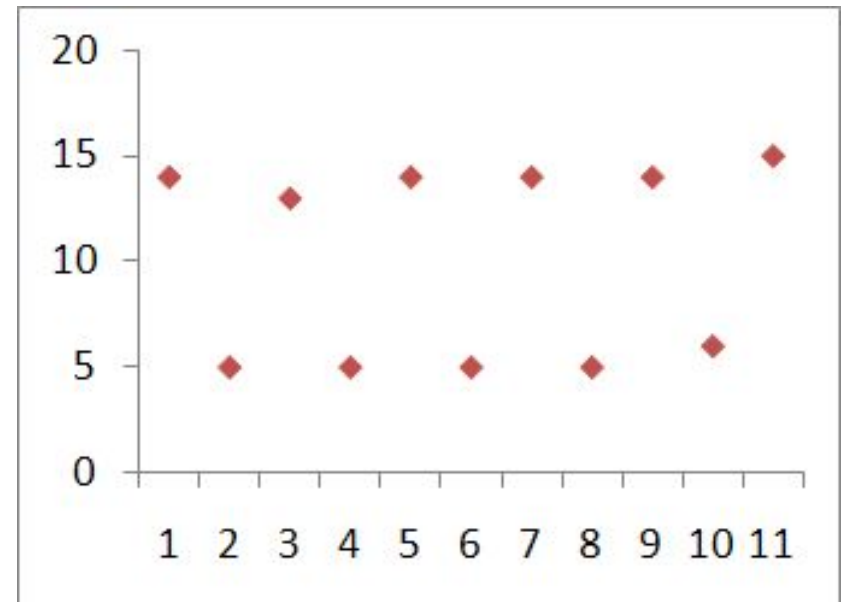
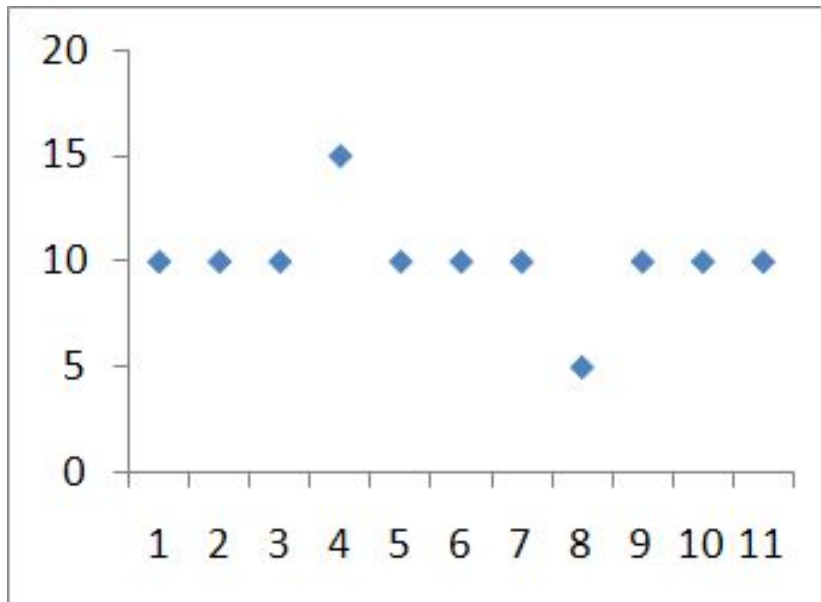
$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Основные свойства (ряд A1 : A20):

- количество элементов =СЧЕТ (A1 : A20)
- количество элементов, удовлетворяющих некоторому условию:
= СЧЕТЕСЛИ (A1 : A20 ; "<5")
- минимальное значение =МИН (A1 : A20)
- максимальное значение =МАКС (A1 : A20)
- сумма элементов =СУММ (A1 : A20)
- среднее значение =СРЗНАЧ (A1 : A20)

Дисперсия

Для этих рядов одинаковы МИН, МАКС, СРЗНАЧ



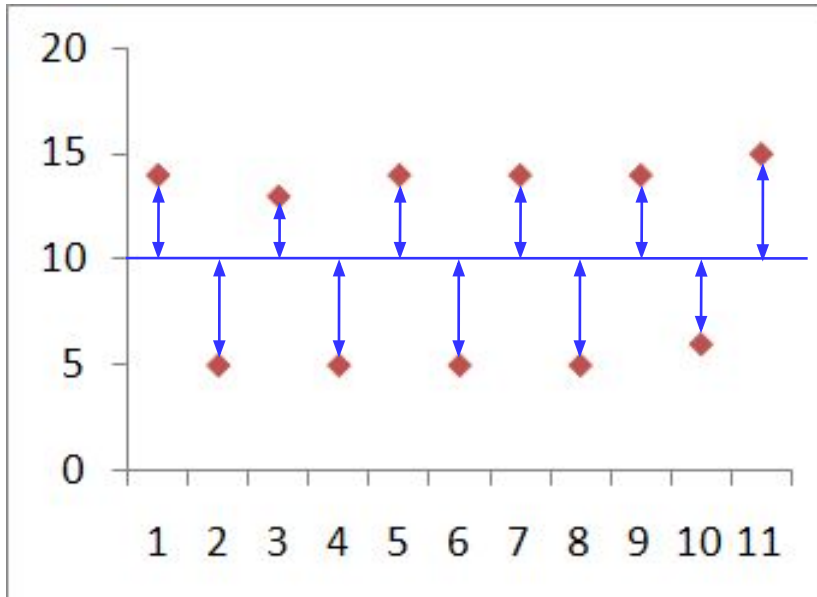
В чем различие?

Дисперсия («разброс») – это величина, которая характеризует разброс данных относительно среднего значения.

Дисперсия

$$D_x = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{среднее арифметическое}$$



$(x_1 - \bar{x})^2$ квадрат
отклонения x_1
от среднего

D_x *средний* квадрат
отклонения от
среднего значения

Дисперсия и СКВО

Стандартная функция

=ДИСПР (A1 : A20)

Функции – Другие – Статистические

Что неудобно:

если x измеряется в метрах,
то D_x – в m^2



В каких
единицах
измеряется?

СКВО = среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

=СТАНДОТКЛОНП (A1 : A20)

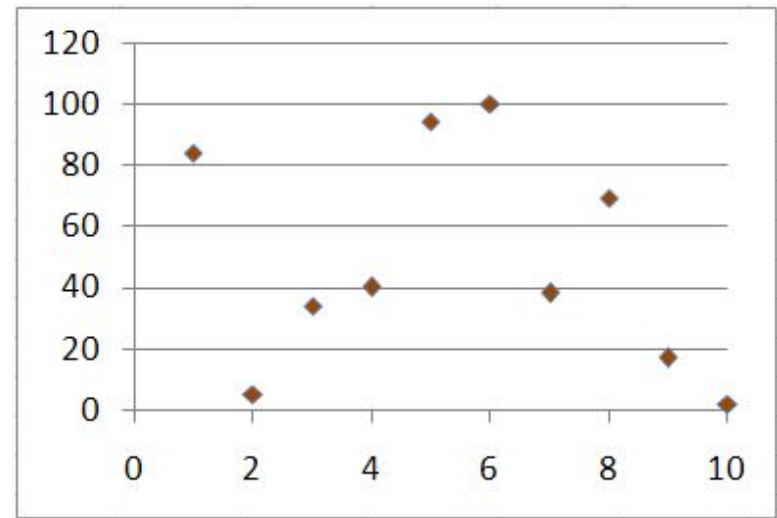
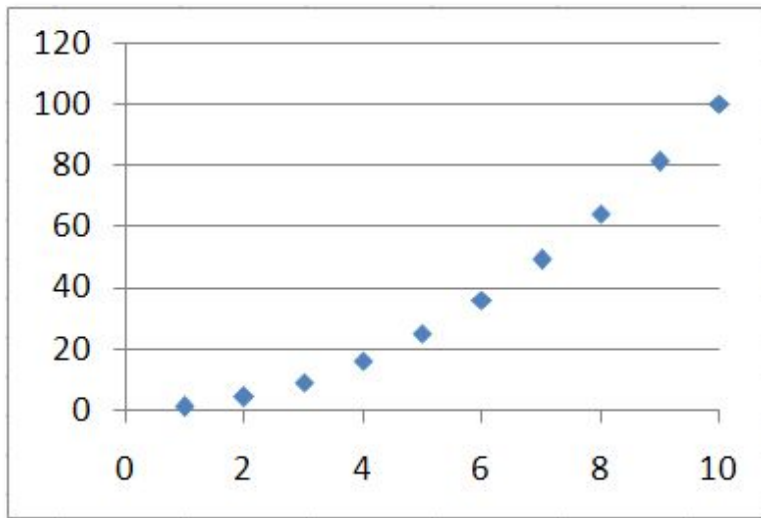
Взаимосвязь рядов данных

Два ряда одинаковой длины:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

Вопросы:

- есть ли связь между этими рядами (соответствуют ли пары (x_i, y_i) какой-нибудь зависимости $y = f(x)$)
- насколько сильна эта связь?



Взаимосвязь рядов данных

Ковариация:

$$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$



Если x и y – один и тот же ряд?

$$K_{xx} = D_x$$

в среднем!

Как понимать это число?

- если $K_{xy} > 0$ увеличение x приводит к увеличению y
- если $K_{xy} < 0$ увеличение x приводит к уменьшению y
- если $K_{xy} \approx 0$ связь обнаружить не удалось

Что плохо?

- единицы измерения: если x в метрах, y в литрах, то K_{xy} – в м·л
- K_{xy} зависит от абсолютных значений x и y , поэтому ничего не говорит о том, насколько сильна связь

Взаимосвязь рядов данных

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad \sigma_x, \sigma_y \text{ – СКВО рядов } x \text{ и } y$$



Какова размерность? безразмерный!

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Как понимать это число?

- если $\rho_{xy} > 0$: увеличение X приводит к увеличению Y
- если $\rho_{xy} < 0$: увеличение X приводит к уменьшению Y
- если $\rho_{xy} \approx 0$: связь обнаружить не удалось

=КОРРЕЛ (А1 : А20 ; В1 : В20)

Взаимосвязь рядов данных

Как понимать коэффициент корреляции?

$0 < |\rho_{xy}| \leq 0,2$: очень слабая корреляция

$0,2 < |\rho_{xy}| \leq 0,5$: слабая

$0,5 < |\rho_{xy}| \leq 0,7$: средняя

$0,7 < |\rho_{xy}| \leq 0,9$: сильная

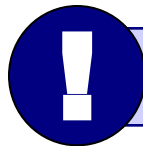
$0,9 < |\rho_{xy}| \leq 1$: очень сильная

$\rho_{xy} = 1$: линейная зависимость $y = ax + b$, $a > 0$

$\rho_{xy} = -1$: линейная зависимость $y = ax + b$, $a < 0$



Если $\rho_{xy} \approx 0$, то связи нет?



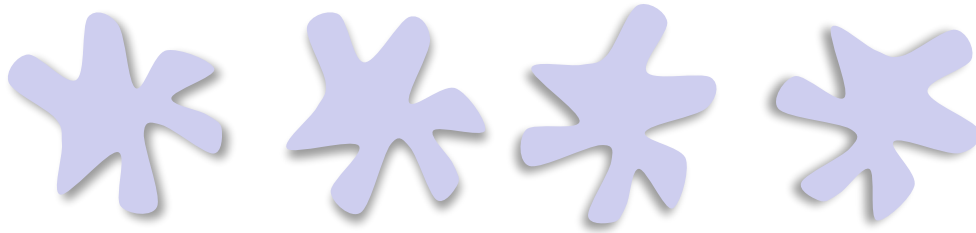
Метод для определения линейной зависимости!

Методы вычислений

Тема 6. Моделирование

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ,
10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Модель деления

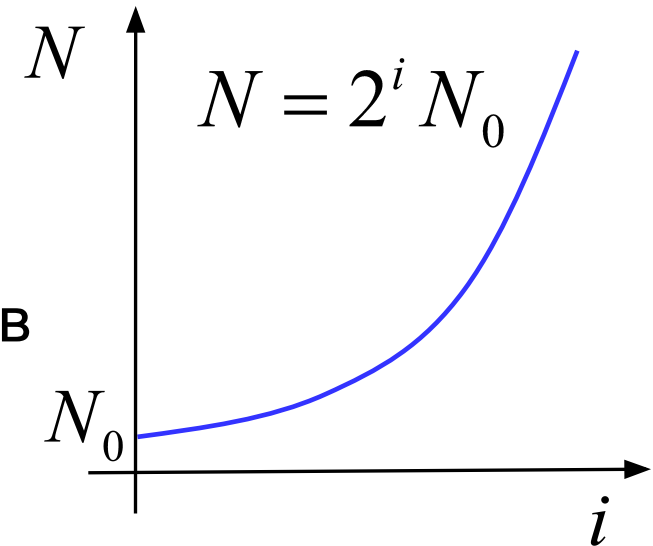


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Особенности модели:

- 1) не учитывается смертность
- 2) не учитывается влияние внешней среды
- 3) не учитывается влияние других видов

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – коэффициент рождаемости

K_c – коэффициент смертности

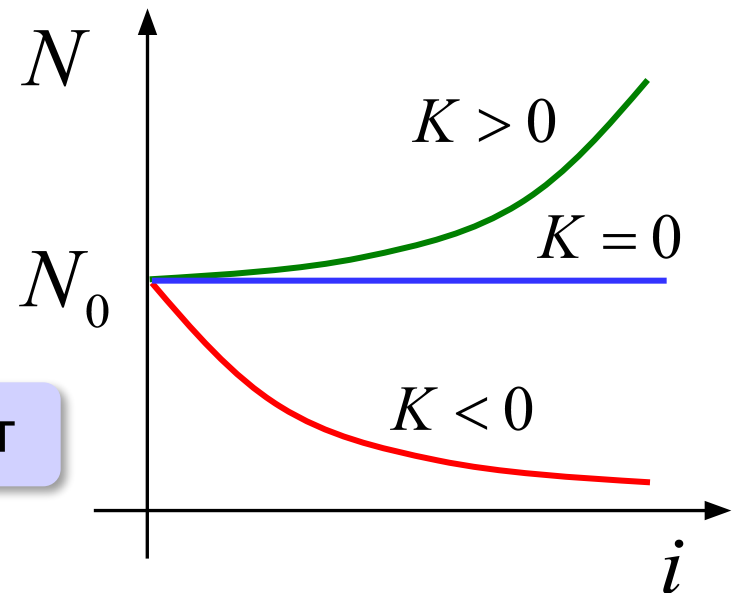
**Коэффициент
прироста**

$$K = K_p - K_c$$

$$N_i = (1 + K) \cdot N_{i-1}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

прирост



Особенности модели:

- 1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
- 2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст) 66

L – предельная численность животных

Идеи:

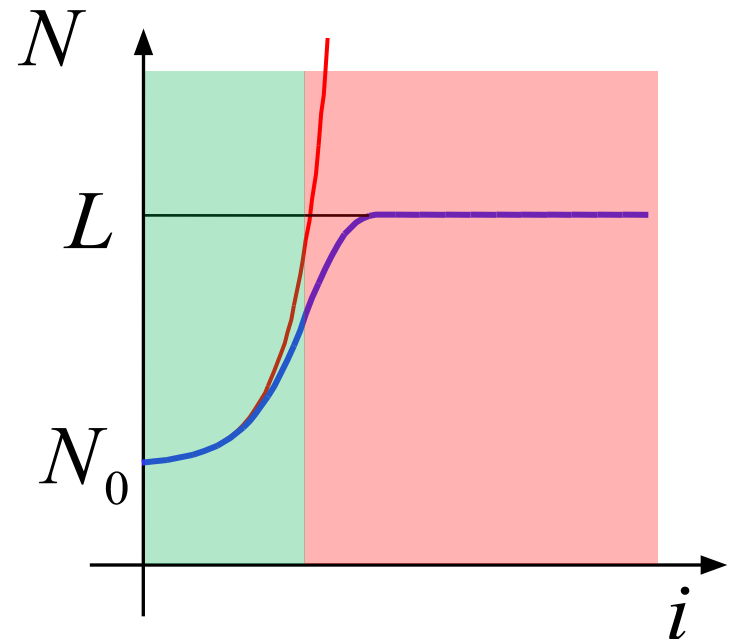
$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

- 1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
- 2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
- 3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$



**Модель адекватна,
если ошибка < 10%!**



Модель с отловом

Примеры: рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - R$$

ОТЛОВ



Какая будет численность?

$$N_i = N_{i-1}, \text{ прирост} = \text{отлову}$$

$$N = N + K \frac{L - N}{L} N - R \Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$



Сколько можно отловить?

Модель эпидемии гриппа

L – всего жителей N_i – больных в i -ый день
 Z_i – заболевших в i -ый день V_i – выздоровевших
 W_i – всего выздоровевших за i дней

Основное уравнение:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

Ограниченный рост:

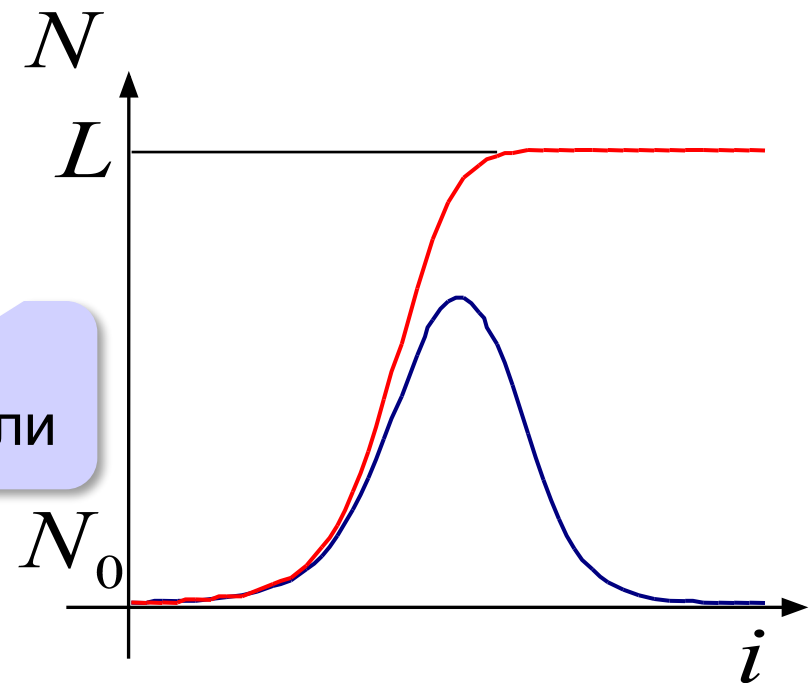
$$Z_i = K \frac{L - N_{i-1} - W_{i-1}}{L} \cdot N_{i-1}$$

Выздоровление (через 7 дней):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$

болели и
выздоровели



Влияние других видов

N_i – численность белок, M_i – численность бурундуков

$$N_i = N_{i-1} (2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$

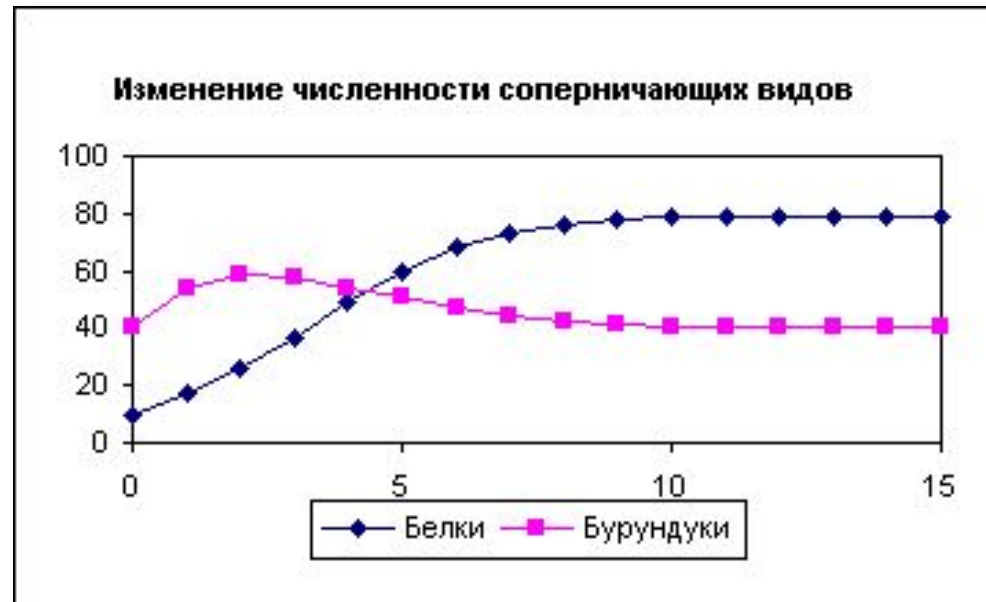
$$M_i = M_{i-1} (2 - K_3 \cdot M_{i-1} - K_4 \cdot N_{i-1})$$



Откуда видно влияние?

K_2, K_4 – взаимное влияние

если $K_2 > K_1$ или $K_4 > K_3$ – враждующие виды



Моделирование двух популяций

 N_0
 M_0

	A	B	C	D	E	F
1	i	N	M		$K1$	0,05
2	0	20	20		$K2$	0,01
3	1	$=B2*(2-F1*B2-F2*C2)$			$K3$	0,05
4	2				$K4$	0,01
5	3					

$$N_i = N_{i-1} (2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$



Как скопировать формулы «вниз»?

Модель системы «хищник-жертва»

Модель – не-система:



караси



щуки

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - d) \cdot Z_{i-1}$$

Модель – система:

- 1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
- 2) «эффект» пропорционален числу встреч

вымирают
без еды

численность
уменьшается

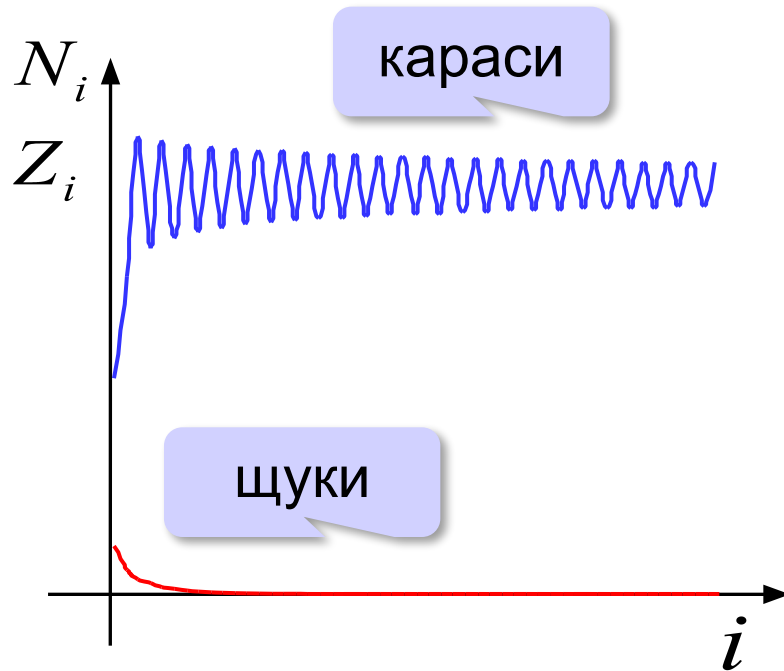
$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - d) \cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность
увеличивается

Модель системы «хищник-жертва»

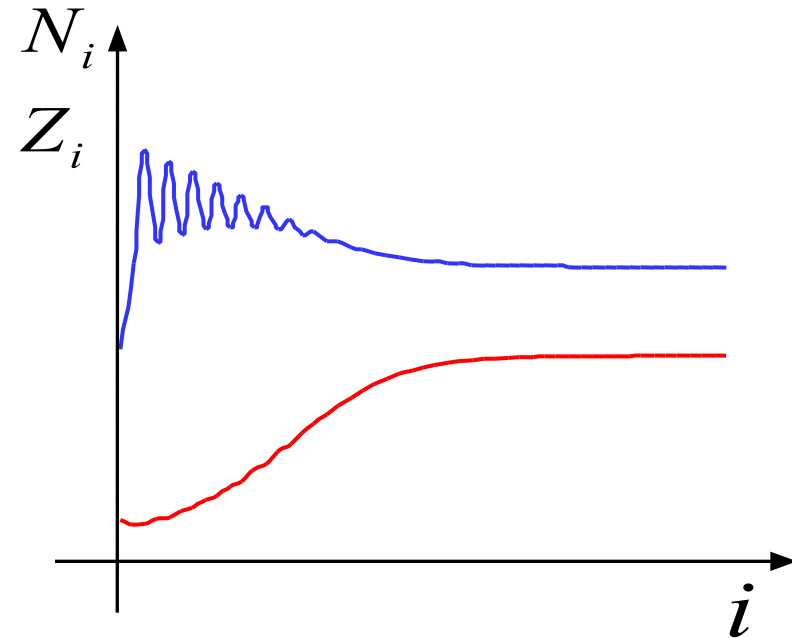
Хищники вымирают:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = b_2 = 0,5$$

Равновесие:

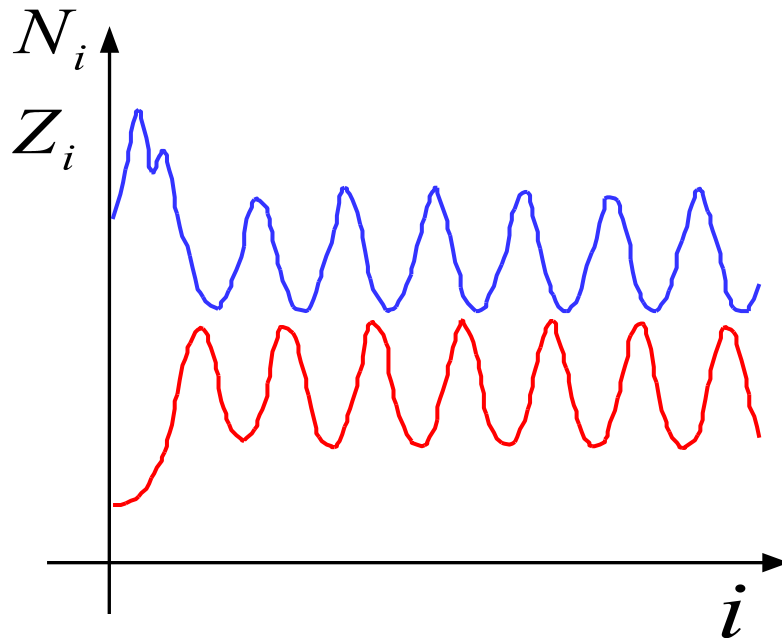


$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,5; \quad b_2 = 1$$

Модель системы «хищник-жертва»

Колебания:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,5; b_2 = 2$$

Случайные процессы

Случайно...

- 1) встретить друга на улице
- 2) разбить тарелку
- 3) найти 10 рублей
- 4) выиграть в лотерею

Случайный выбор:

- 1) жеребьевка на соревнованиях
- 2) выигравшие номера в лотерее

Как получить случайность?



Случайные числа на компьютере

Электронный генератор



- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

Псевдослучайные числа – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)

564321

318458191041

209938992481

в квадрате малый период
(последовательность
повторяется через 10^6 чисел)

Случайные числа на компьютере

Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \bmod m$$

а, с, m - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \bmod 1073741823$$

простое число

$$2^{30} - 1$$



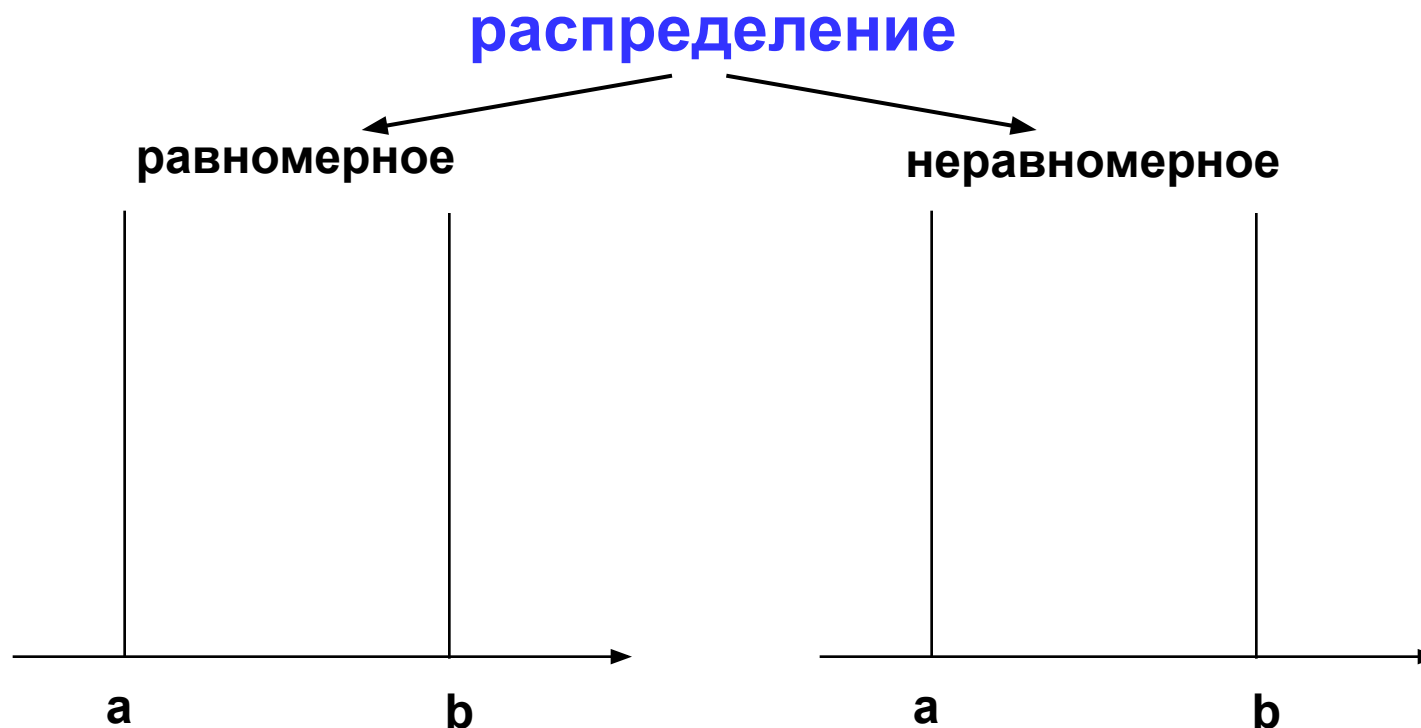
Какой период?

период m

«Вихрь Мерсенна»: период $2^{19937} - 1$

Распределение случайных чисел

Модель: снежинки падают на отрезок $[a, b]$



Сколько может быть разных распределений?

Распределение случайных чисел

Особенности:

- распределение – это характеристика **всей последовательности**, а не одного числа
- **равномерное** распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- неравномерных – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного

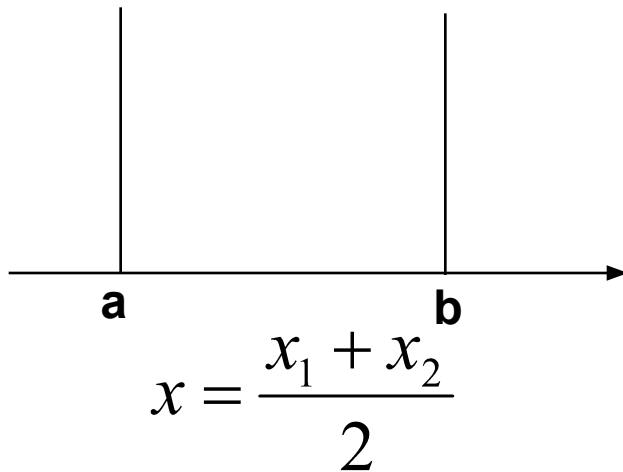


Diagram showing a horizontal axis with two vertical lines at points labeled **a** and **b**.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$




Diagram showing a horizontal axis with two vertical lines at points labeled **a** and **b**.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \boxtimes + x_{12}}{12}$$

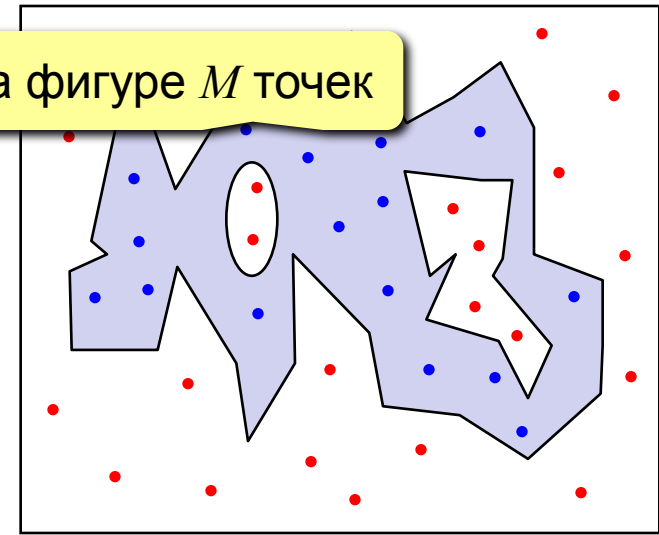
x_1, x_2, \boxtimes равномерное распределение

Вычисление площади (метод Монте-Карло)

1. Вписываем сложную фигуру в другую фигуру, для которой легко вычислить площадь (прямоугольник, круг, ...).
2. **Равномерно** N точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, **попавших на фигуру**: M .
4. Вычисляем **площадь**:

$$\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}$$

На фигуре M точек

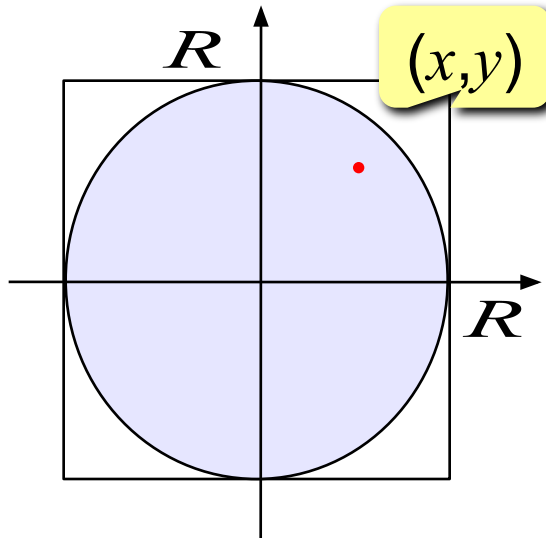


Всего N точек



1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;
```

```
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайные координаты }
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;
end;
S := 4*R*R*M / N;
```



Как найти число π ?

Задания

«4»: Вычислите площади кругов с радиусами

$$R = 1, 2, 3, 4, 5.$$

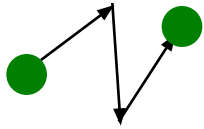
Используя электронные таблицы, найдите приближенную формулу для вычисления площади круга.

«5»: Вычислите объем шаров с радиусами

$$R = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Используя электронные таблицы, найдите приближенную формулу для вычисления объема шара.

Броуновское движение



Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:

```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha);
  y := y + h*sin(alpha);
end;
```

Графика (АЛГО)

Начальное положение частицы:

```
x := 200; y := 250;  
MoveTo(round(x), round(y));
```

Задать цвет линии:

```
Pen(1, 0, 255, 0);
```

толщина
линии

R(red)
0..255

G(green)
0..255

B(blue)
0..255

Движение частицы:

```
for i:=1 to N do begin  
  { определить новые координаты }  
  LineTo(round(x), round(y));  
end;
```

Задания

- «4»:** Постройте траектории движения двух частиц в течение 200 шагов. Частицы должны двигаться одновременно.
- «5»:** Постройте траектории движения 10 частиц в течение 200 шагов. Частицы должны двигаться одновременно. Используйте массивы для хранения координат частиц.

Системы массового обслуживания

Примеры:

- 1) звонки на телефонной станции
- 2) вызовы «скорой помощи»
- 3) обслуживание клиентов в банке

сколько линий?

сколько бригад?

сколько операторов?

Особенности:

- 1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
- 2) время обслуживания каждого клиента – случайная величина



Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!

Клиенты в банке



Вход клиентов:

- 1) за 1 минуту – до I_{max} человек
- 2) равномерное распределение



Обслуживание:

- 1) от T_{min} до T_{max} минут
- 2) равномерное распределение



Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более M минут?

Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было

пришли

ушли

$N := N + in - out;$



Допущение: клиенты распределены по кассам равномерно!

Количество касс: K

Средняя длина очереди: $\frac{N}{K}$ Q – длина очереди

Время ожидания: $M \leq Q \cdot T_{\max}$

Допустимая длина очереди: $\frac{N}{K} \leq Q_{\max} = \frac{M}{T_{\max}}$

Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(inMax*random) ;
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```



Каждый оператор за эту минуту обслужит $\frac{1}{T}$ клиентов!

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := round(K / T) ;
```


Клиенты в банке (программа)

период моделирования L минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }
for i:=1 to L do begin
  in := { случайное число входящих }
  out := { случайное число обслуженных }
  N := N + in - out;
  if N/K > Qmax then
    count := count + 1;
end;
writeln(count/L:10:2);
```



Что выводится?

Клиенты в банке (исходные данные)

```
inMax := 10; { max число входящих за 1 мин }  
Tmin := 1; { min время обслуживания }  
Tmax := 5; { max время обслуживания }  
L := 1000; { период моделирования в минутах }  
M := 10; { допустимое время ожидания }
```

Задача: найти минимальное K , при котором время ожидания в 90% случаев не больше M минут.

