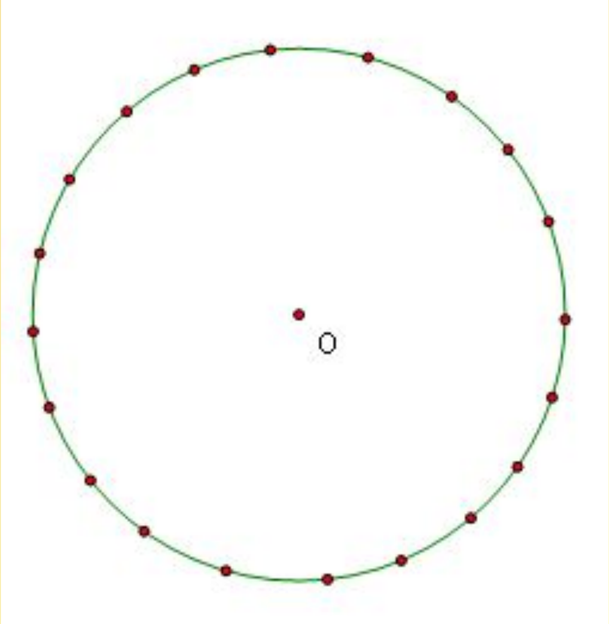
ОКРУЖНОСТЬ

Оглавление

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Окружность

Окружностью называется геометрическая фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки на заданное расстояние.
Эта точка называется центром окружности.

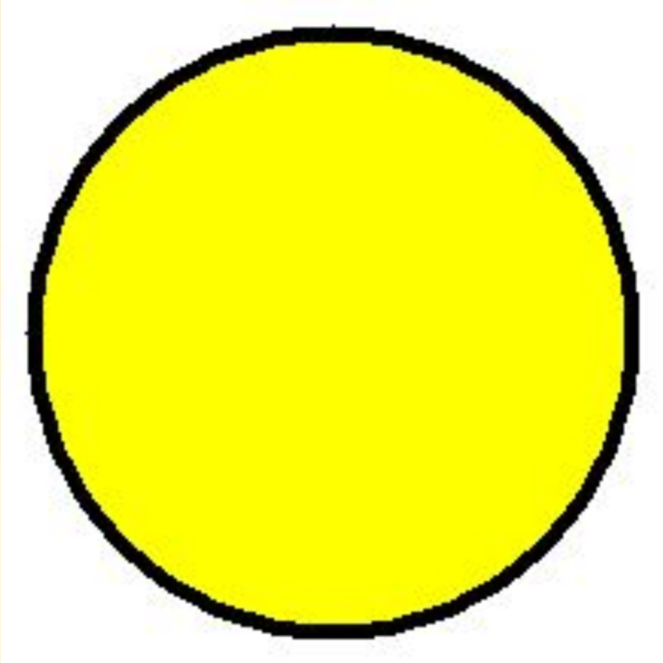


O - центр окружности

Круг

Фигуру, ограниченную окружностью, называют кругом .

КРУГ = Окружность + часть плоскости, ограниченная ею



Части окружности

дуги

Характеристики окружности

ЦЕНТР

РАДИУС

ДИАМЕТР

Отрезки в окружности

<u>ХОРДА</u>

<u>ДИАМЕТР</u>

Части круга

[СЕКТОР]()

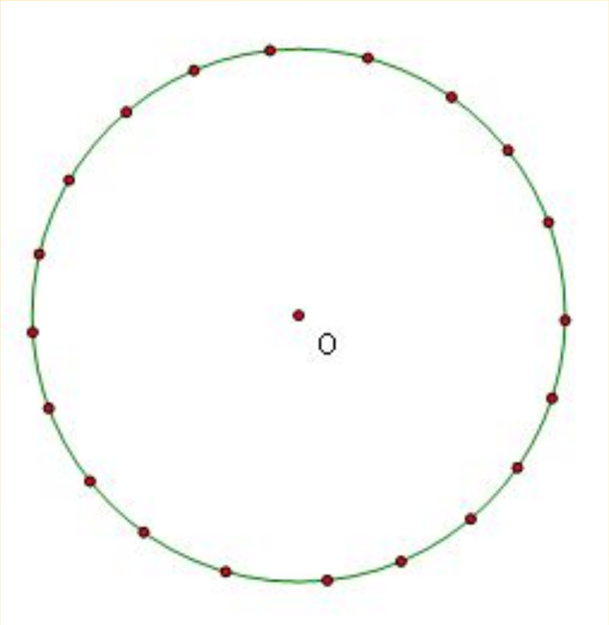
[СЕГМЕНТ]()

[ПОЛУКРУГ]()

Центр окружности

Точка, от которой равноудалены на заданное расстояние все точки окружности.

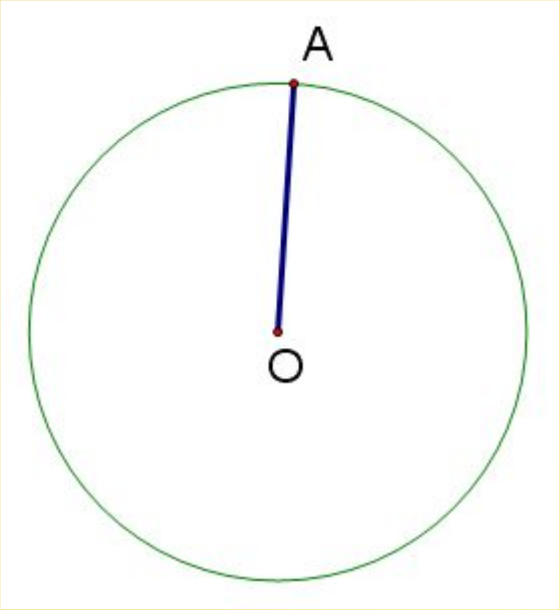
О - центр окружности



Радиус окружности

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, а также его длина, называется радиусом окружности.

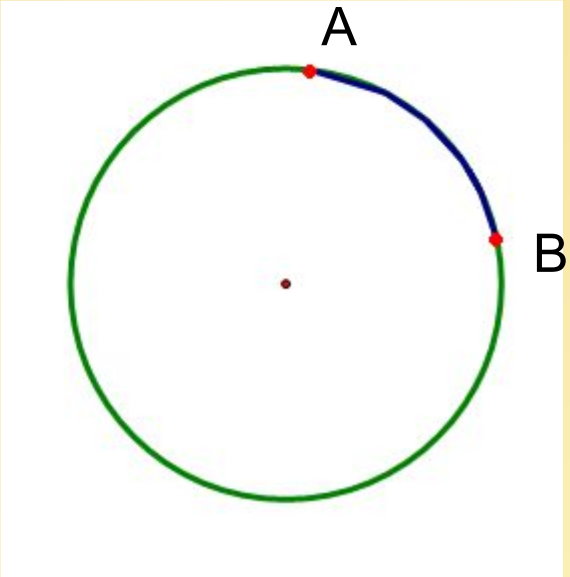
ОА- радиус окружности



Дуга окружности

Если на окружности взять две точки, то они разобьют окружность на две части. Каждая из них называется дугой окружности, а данные точки - концами этих дуг.

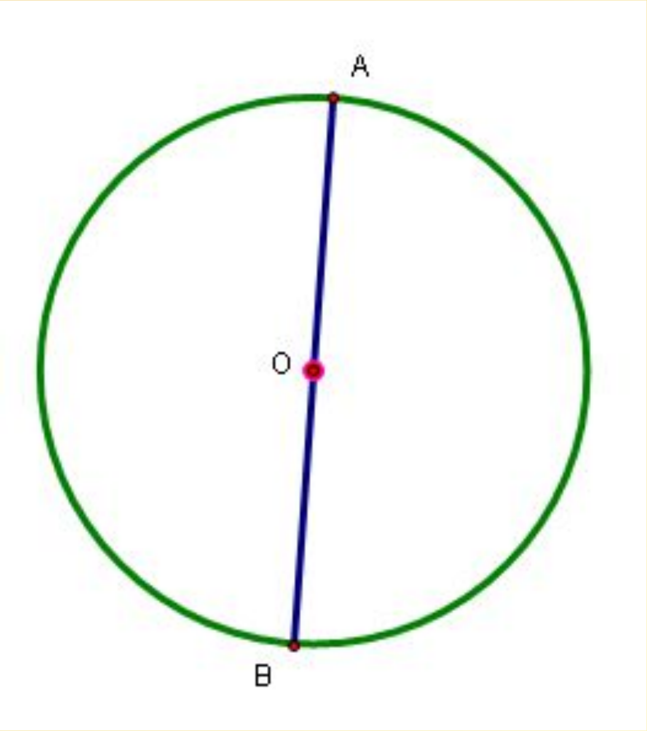
$\cup$ AB- дуга окружности



Диаметр окружности

Диаметром окружности называется хорда данной окружности, проходящая через ее центр.

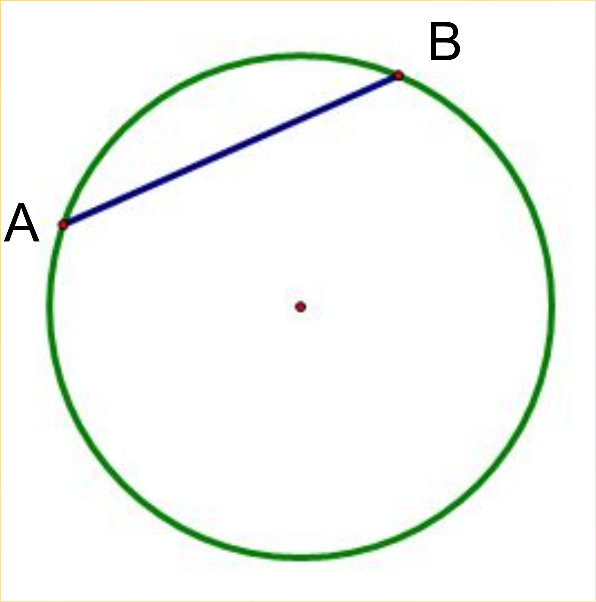
АВ- хорда, проходящая через ее центр О



Хорда окружности

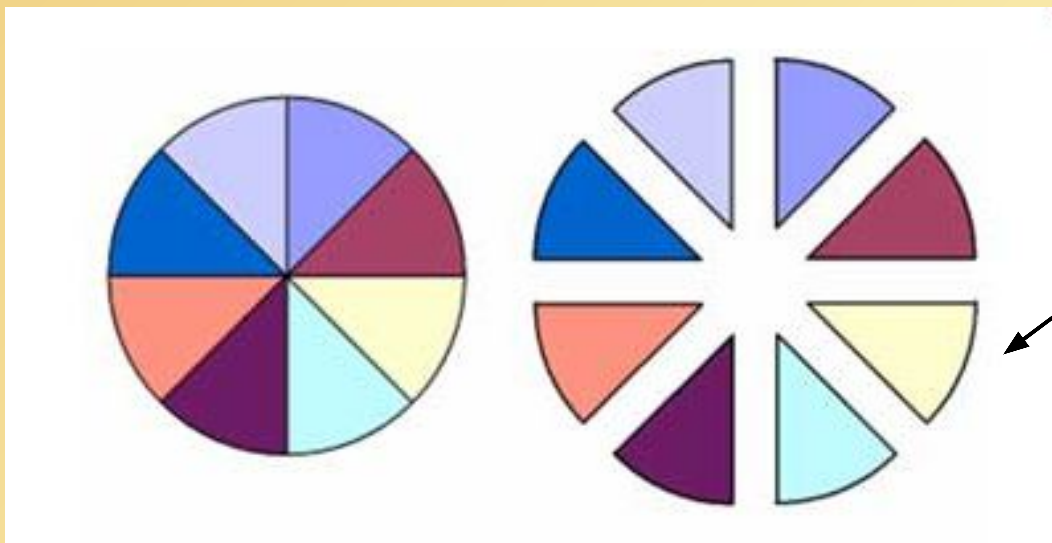
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой окружности, а также хордой ограниченного ею круга.

AB- хорда окружности



Сектор круга

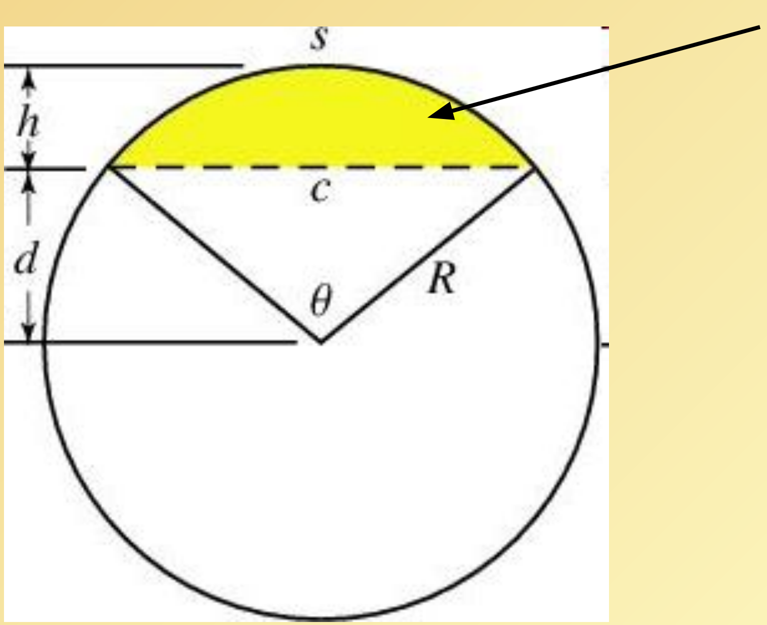
Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется сектором круга.



Сектор круга

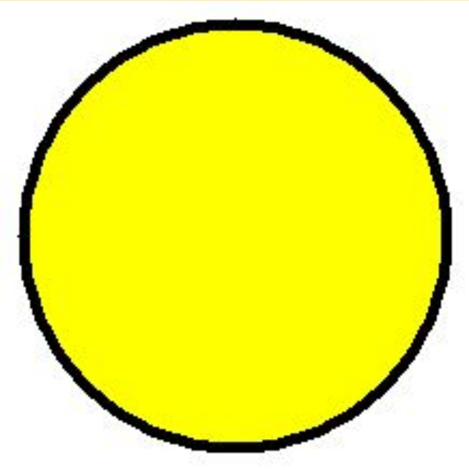
Сегмент круга

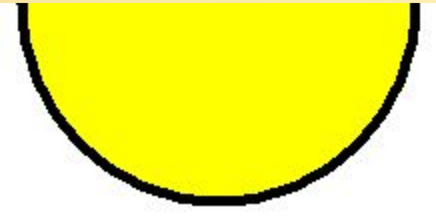
Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется сегментом круга.



Полукруг

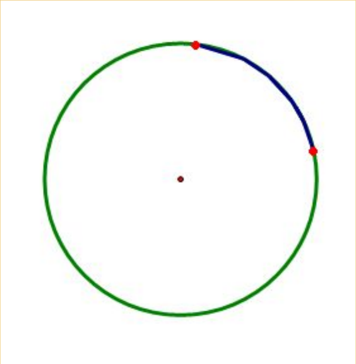
Диаметр разбивает круг на два полукруга. Полукруг ограничен диаметром и полуокружностью.



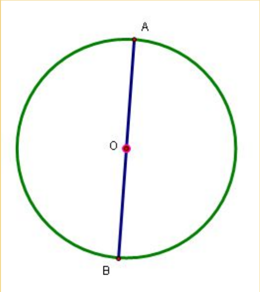


ТЕСТ

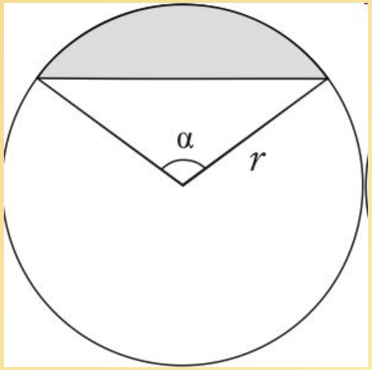
1



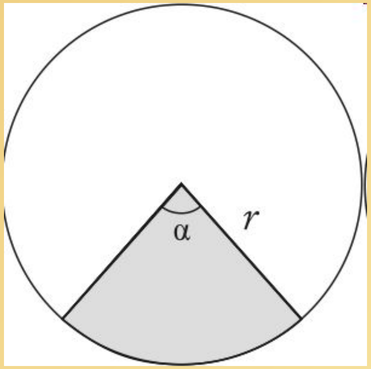
2



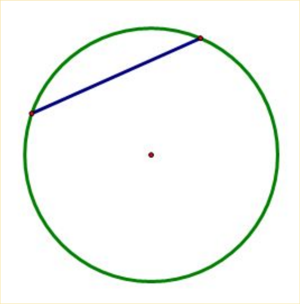
3



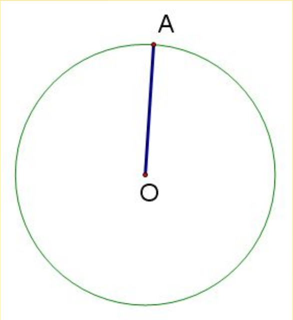
4



5



6



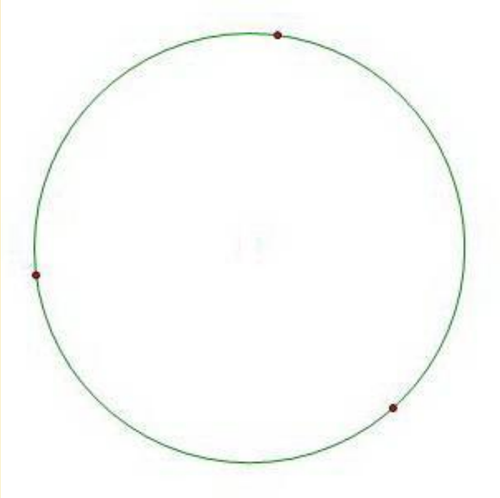
Найдите: сектор, дугу, радиус, диаметр, хорду, сегмент

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И СВОЙСТВА

- Теорема о существовании окружности
- Теорема о диаметре, перпендикулярному к хорде
- Свойства диаметра окружности

Сколько окружностей можно провести через 3 точки, не лежащие на одной прямой?

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.



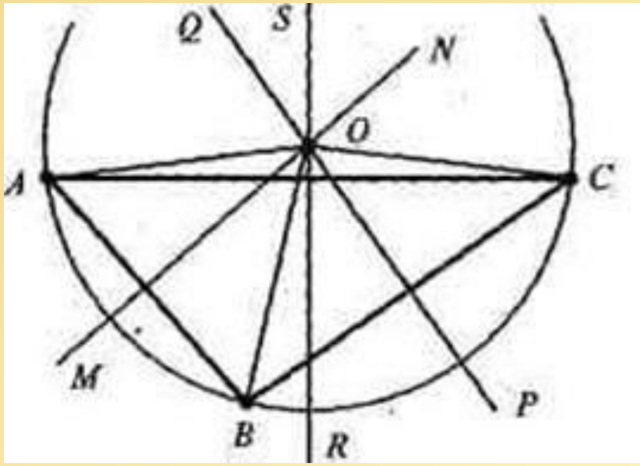
Доказательство

Через три точки A, B и C , не лежащие на одной прямой (через вершины ΔABC), можно провести окружность, если существует такая четвертая точка. O, которая одинаково удалена от точек A, B и C.

Докажем, что такая точка существует и притом только одна.

Всякая точка, одинаково удаленная от точек A и B, должна лежать на серединном перпендикуляре MN к отрезку AB, точно так же всякая точка, одинаково удаленная от точек B и C, должна лежать на серединном перпендикуляре PQ, проведенном к стороне BC. Значит, если существует точка, одинаково удаленная от трех точек A, B и C, то она должна лежать и на MN, и на PQ, что возможно только тогда, когда она совпадает с точкой пересечения этих двух прямых.

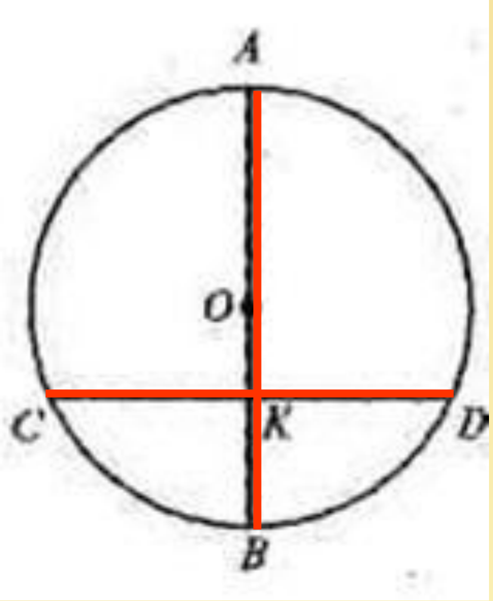
Прямые MN и PQ всегда пересекаются, так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC. Точка O их пересечения и будет точкой, одинаково удаленной от A, от B и от C, значит, если примем эту точку за центр, а за радиус возьмем расстояние OA (или OB, или OC), то окружность пройдет через точки A, B и C. Так как прямые MN и PQ могут пересечься только в одной точке, то центр окружности может быть только один и длина его радиуса может быть только одна; значит, искомая окружность единственная.



Теорема

о диаметре, перпендикулярному к хорде

Диаметр *AB*, перпендикулярный к хорде *CD*, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.



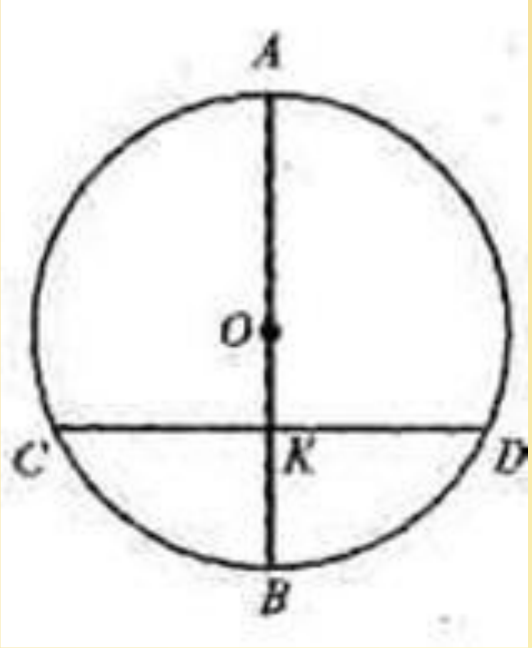
Доказательство

Перегнем чертеж по диаметру *AB* так, чтобы его левая часть упала на правую. Тогда левая полуокружность совместится с правой полуокружностью и перпендикуляр *KC* пойдет по *KD*. Из этого следует, что точка *C*, представляющая собой пересечение полуокружности с *KC*, упадет на *D*; поэтому

CK= *KD*; ∪*BC*= ∪*BD*, ∪*AC*= ∪*AD*.

∪*BC*= ∪*BD*

∪*AC*= ∪*AD*



Свойства диаметра окружности

1. Диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам.

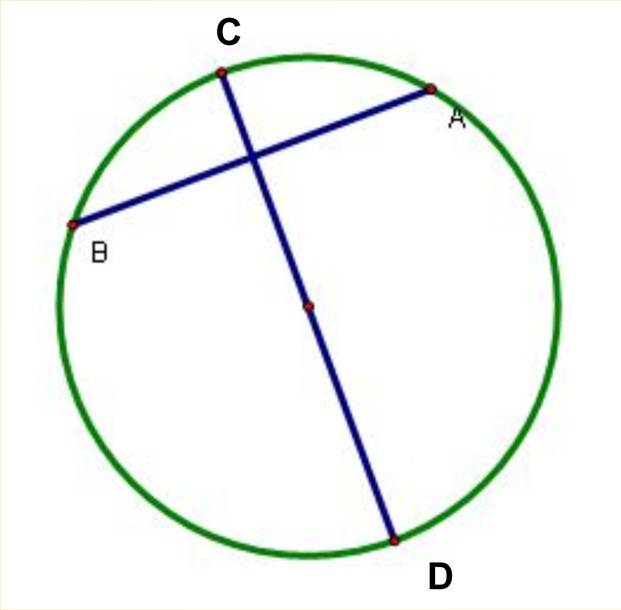
2. Диаметр проведенный через середину дуги, перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.

СВОЙСТВА ХОРД

- Хорда, перпендикулярная к диаметру
- Диаметр, перпендикулярный к хорде
- Расстояние от центра до хорды
- Расстояние от центра до равных хорд
- Хорды, равноудаленные от центра
- Хорды, стягивающие равные дуги
- Равные хорды, стягивающие углы

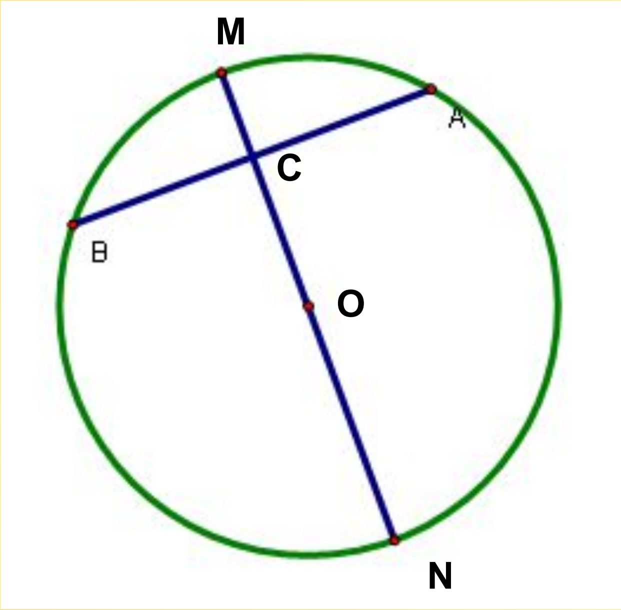
Свойство 1

Если диаметр проходит через середину хорды, не являющейся диаметром, то он перпендикулярен этой хорде.



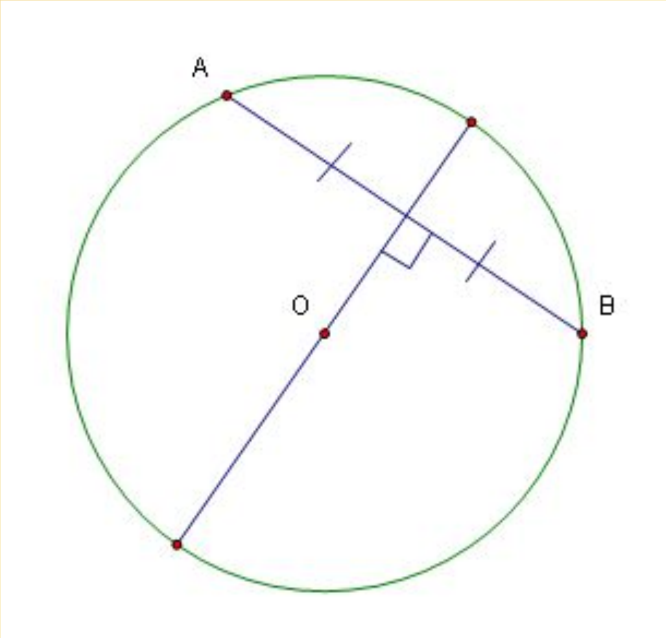
Доказательство

1. Рассмотрим окружность с центром *O*, диаметром *MN*, хордой *AB*
$MN \cap AB = C$, AC = CB
2. Рассмотрим ΔABO. OB = AO – радиусы, Δ*OAB* – равнобедренный.
3. *OC* - медиана Δ*OAB,* которая является его биссектрисой и высотой.
Отсюда $OC \perp AB$, т. е. $MN \perp AB$.



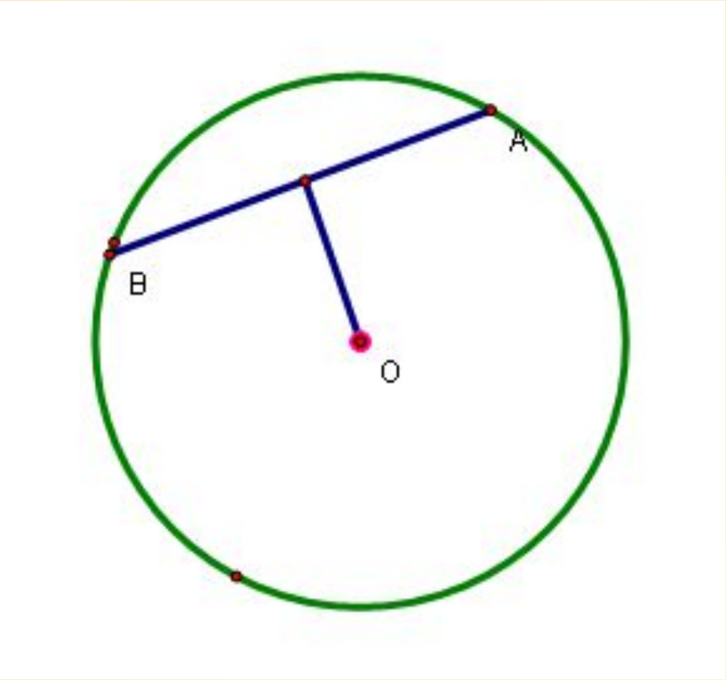
Свойство 2

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.



Свойство 3

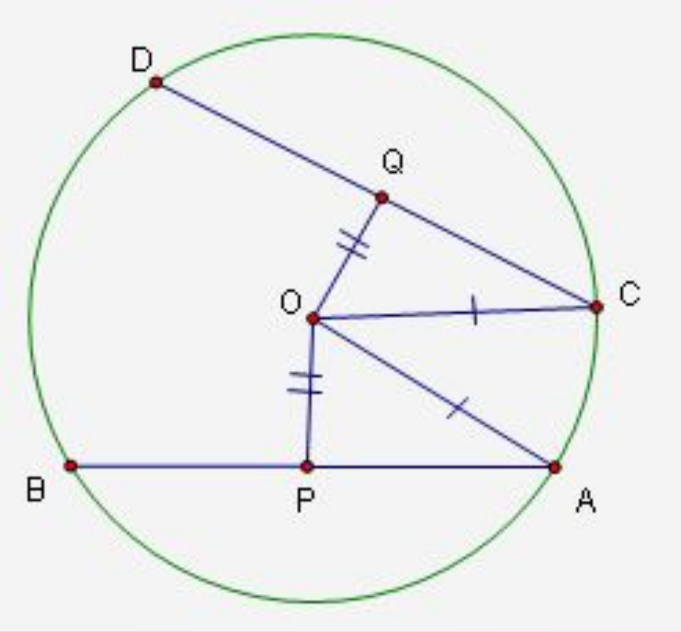
Расстояние от центра окружности до ее хорды - это расстояние от центра до середины хорды.



Свойство 4

В окружности равные хорды равноудалены от центра.

$$AB = CD$$



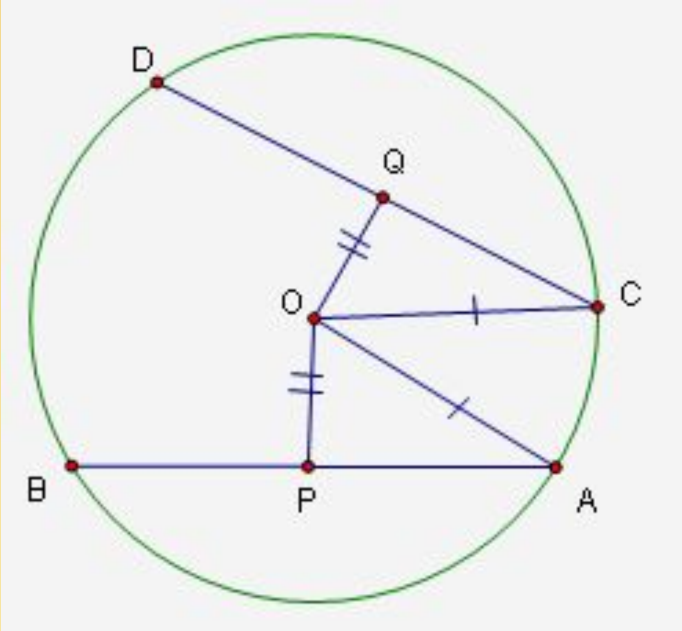
Доказательство

1.Рассмотрим окружность с центром *O*. *AB* = *CD*, *P* – середина хорды AB, *Q* - середина CD.

2.Рассмотрим ΔOAP и ΔOCQ (прямоугольные) : *OA* = *OC* – радиусы, *PA* = *CQ* – половины равных хорд

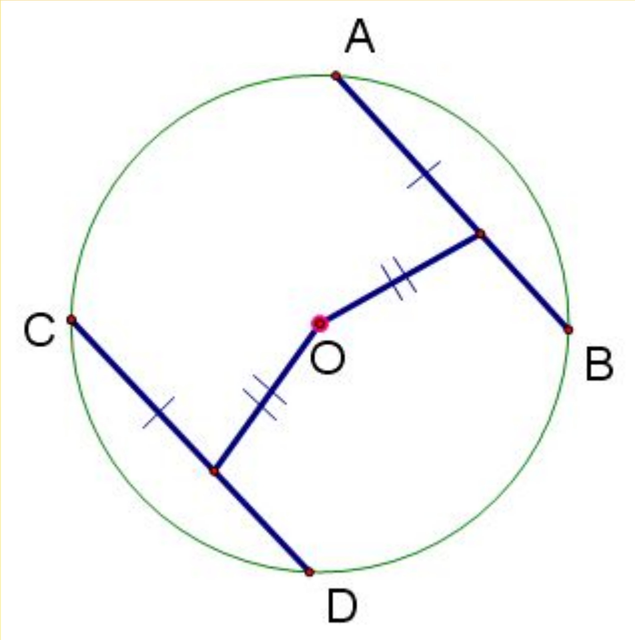
3.$\Delta OAP = \Delta OCQ$ (по гипотенузе и катету).

Из равенства треугольников *OP* = *OQ* (равные катеты),т.е. хорды равно удалены от центра



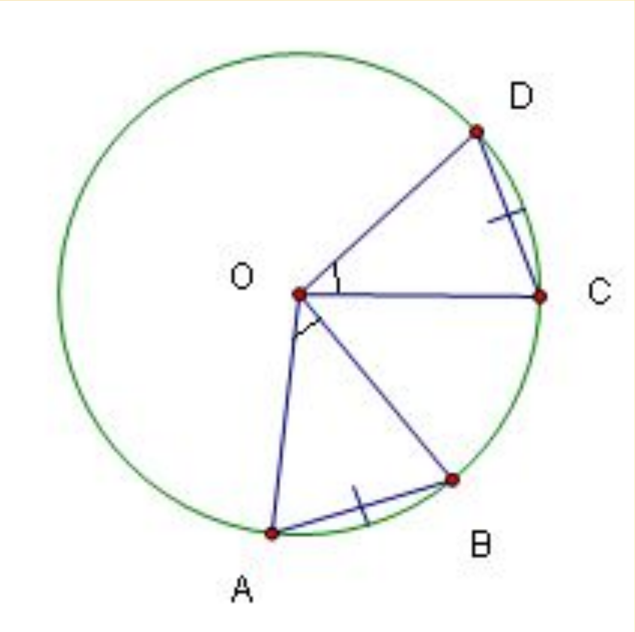
Свойство 5

Хорды, равноудаленные от центра, равны.



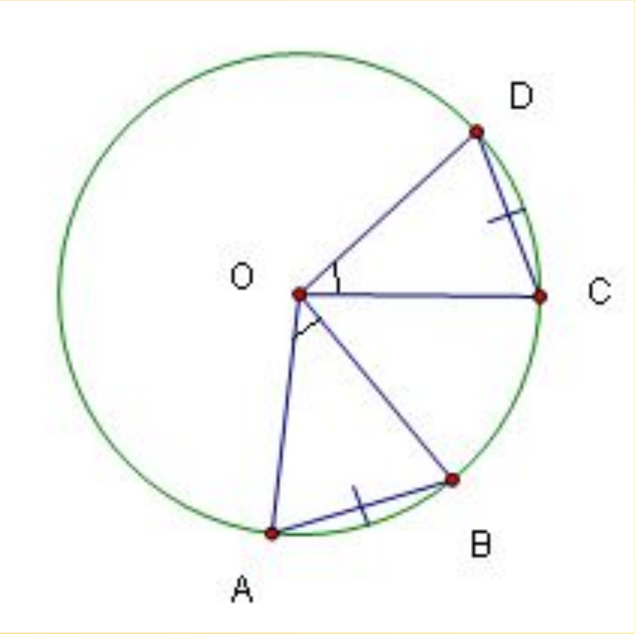
Свойство 6

Хорды, стягивающие равные центральные углы данной окружности, равны.



Свойство 7

Равные хорды данной окружности стягивают равные центральные углы.



КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

- Случаи взаимного расположения прямой и окружности
- Тест

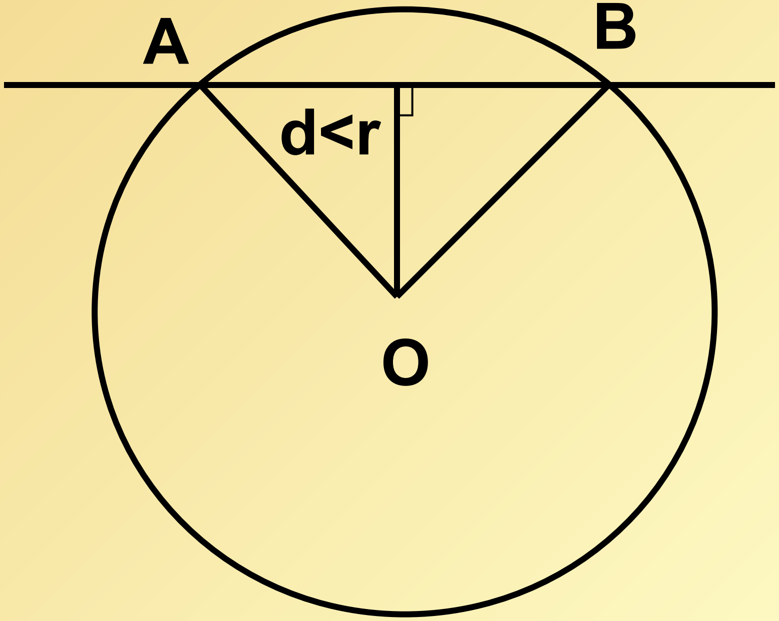
Случаи взаимного расположения прямой и окружности

- $d < r$
- $d = r$
- $d > r$

d<r

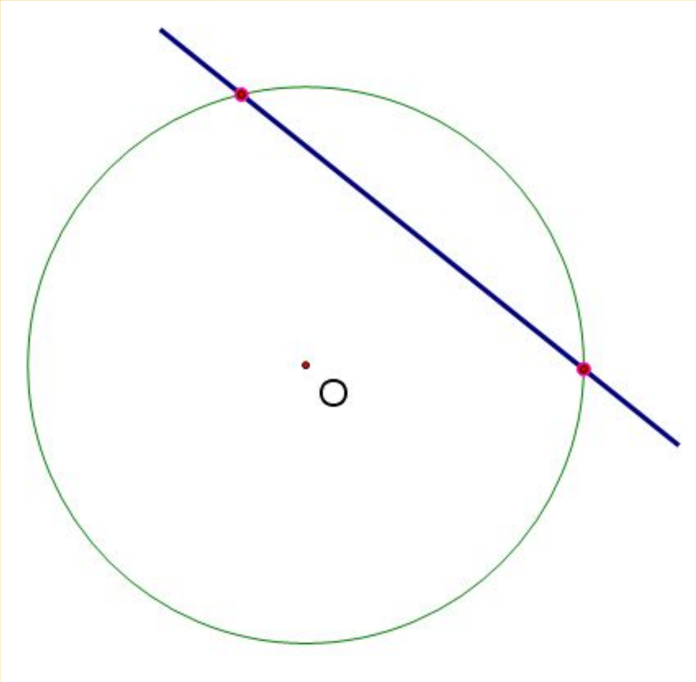
Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки.

Прямая АВ называется секущей по отношению к окружности.



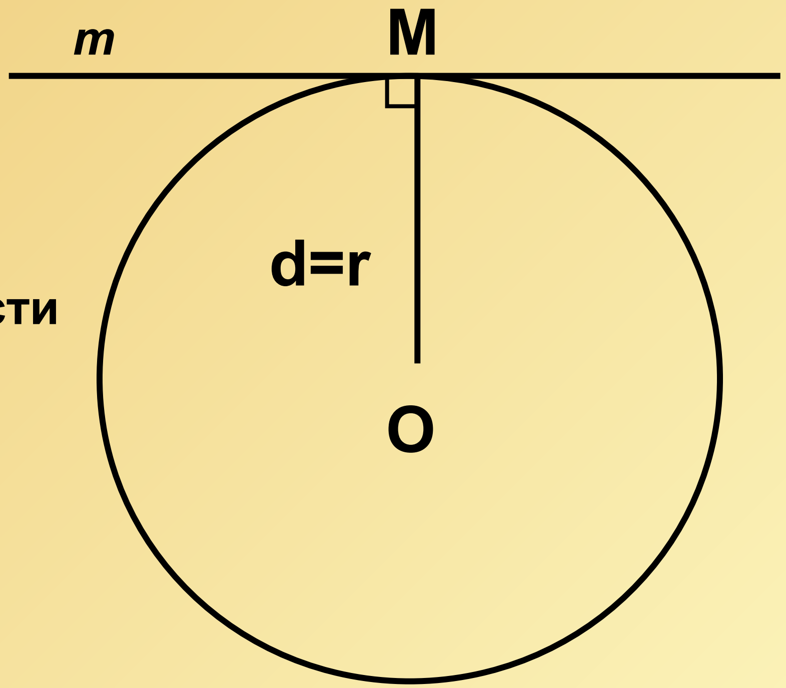
Секущая

Определение: Секущая – прямая, пересекающая окружность в двух точках.



d=r

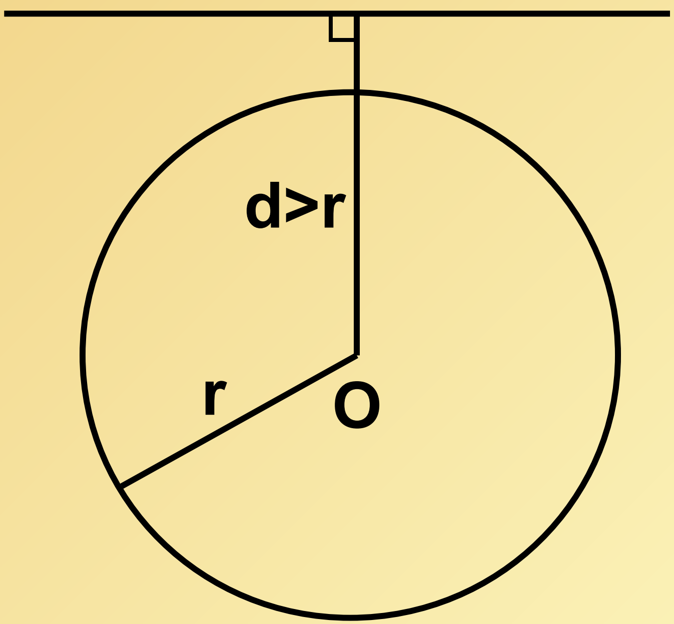
Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.



m – касательная по отношению к окружности

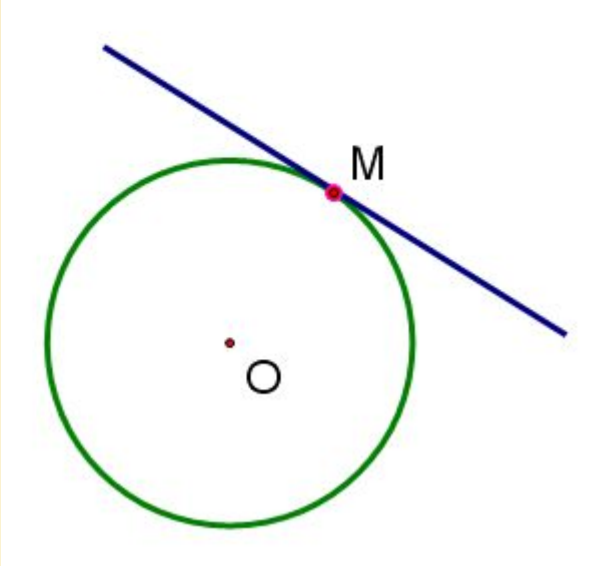
d>r

Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.



Касательная

Определение:
Прямая, имеющая с только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.



[Свойство касательной](#) [Признак касательной](#)

Свойство касательной

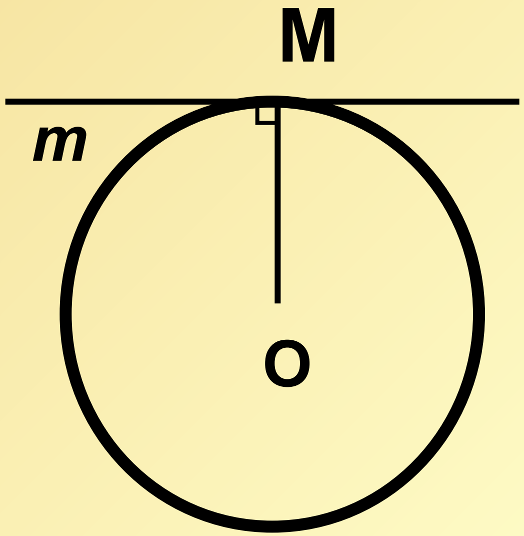
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания

***m* – касательная к окружности с центром О**

М – точка касания

ОМ - радиус

$$m \perp OM$$



Доказательство

Свойство касательной.

Пусть прямая *p* касается окружности в точке *A*, т. е. *A* — их единственная общая точка.

Доказательство «от противного»:

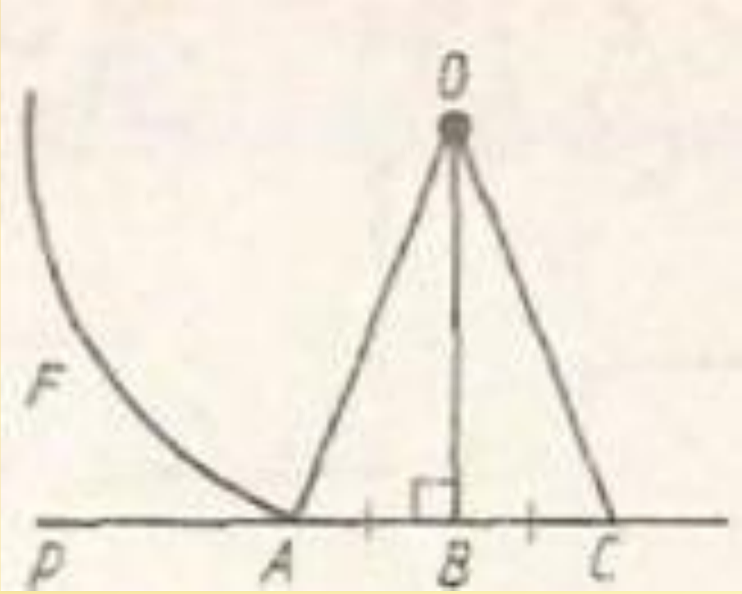
1.Допустим, что *p* не перпендикулярна радиусу *OA*. Проведем перпендикуляр *OB* на *p*.

2. Отложим на *p* отрезок *BC* = *BA*.

3. $\Delta OBA = \Delta OBC$ (по двум катетам). Поэтому *OC* = *OA*.

4. *C* лежит на окружности. Следовательно, *p* и окружность имеют две общие точки, что невозможно.

Итак, $p \perp OA$, что и требовалось

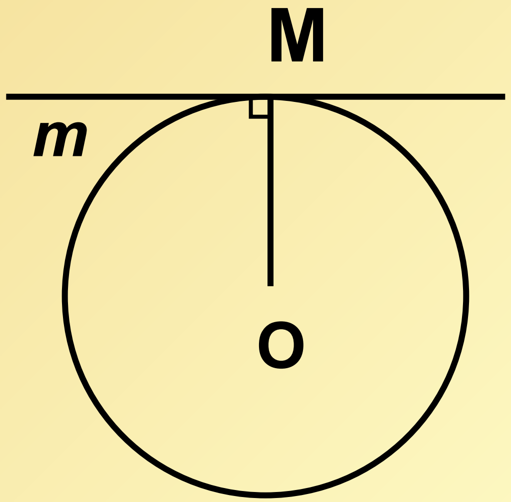


Признак касательной

Если прямая проходит через конец радиуса, и перпендикулярна ему, то она является касательной.

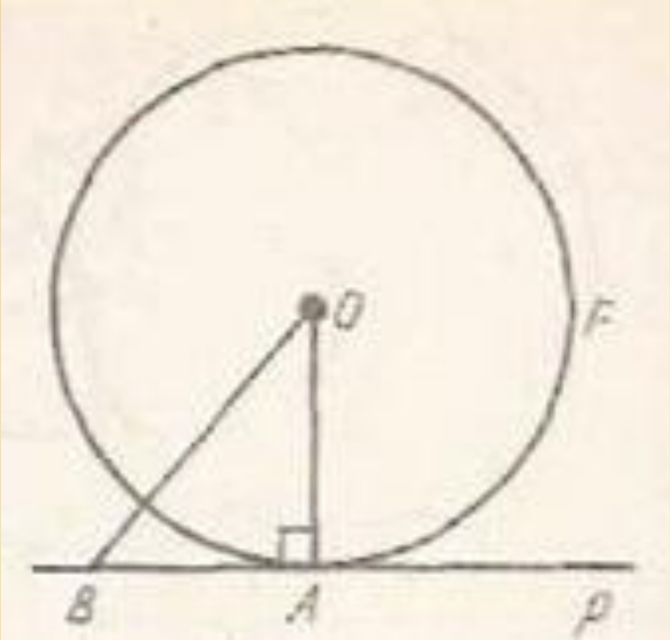
***m* – прямая, которая проходит через точку М**
и
***m* – касательная**

$$m \perp OM$$



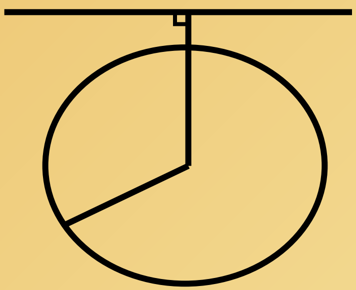
Доказательство

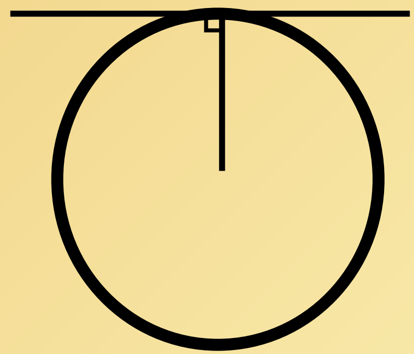
Возьмем любую точку *A* окружности *F* и проведем радиус *OA*. Затем проведем прямую *p*, перпендикулярную радиусу *OA*. Любая точка В прямой *p*, отличная от точки *A*, удалена от *O* больше чем на радиус, поскольку наклонная ОВ длиннее перпендикуляра *OA*. Поэтому точка В не лежит на *F*. Значит, точка *A* — единственная общая точка *p* и *F*, т. е. *p* касается *F* в точке *A*.

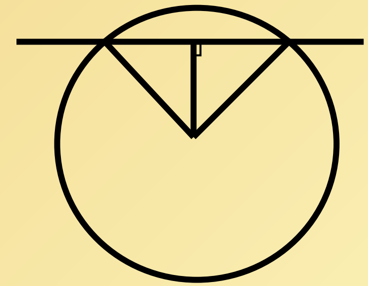


ТЕСТ

Соотнесите:



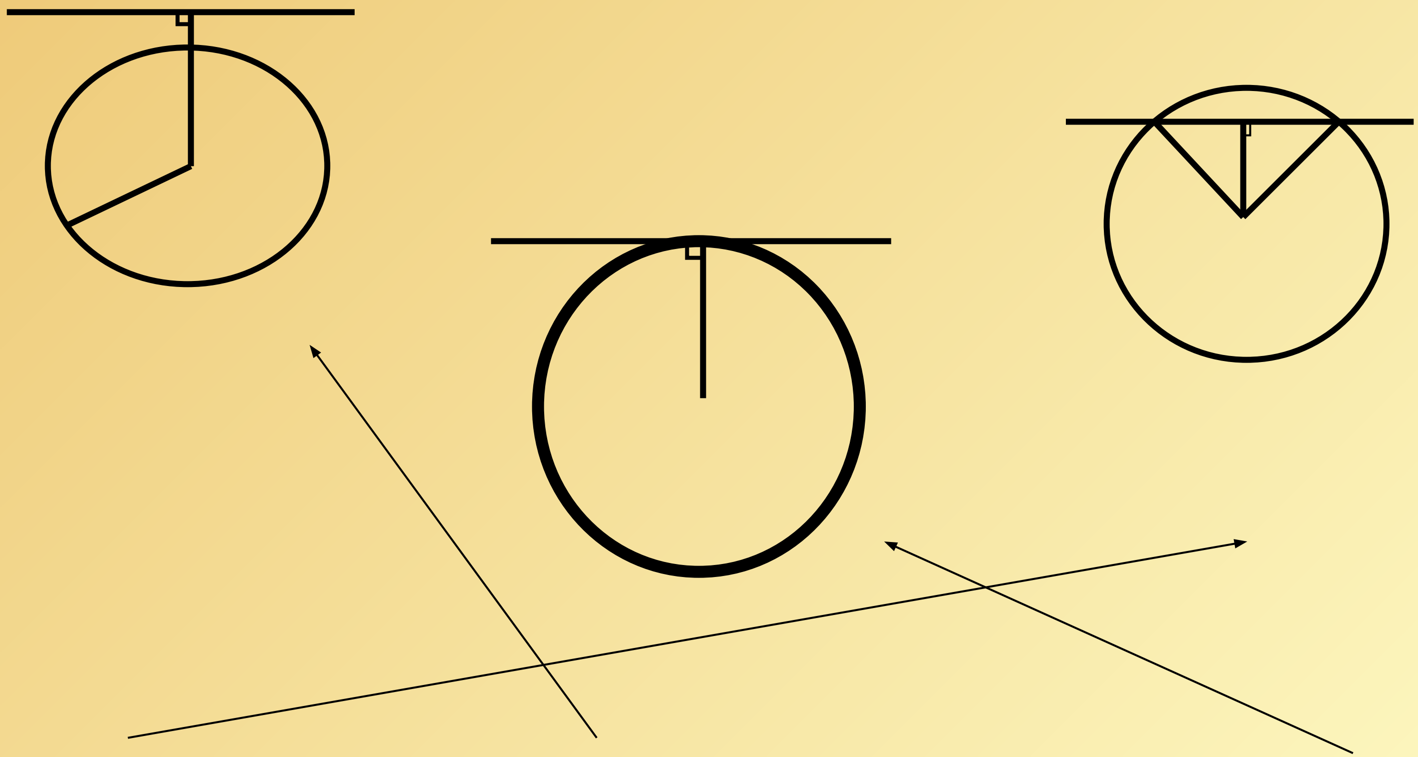




$d < r$ $d > r$ $d = r$

ТЕСТ

Соотнесите:



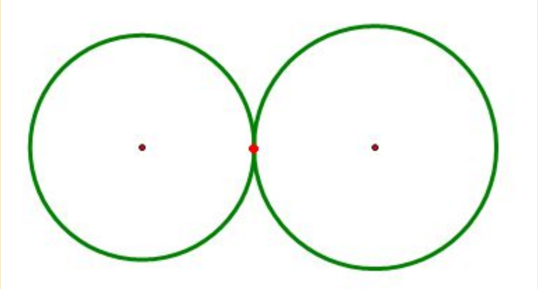
$d < r$ $d > r$ $d = r$

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

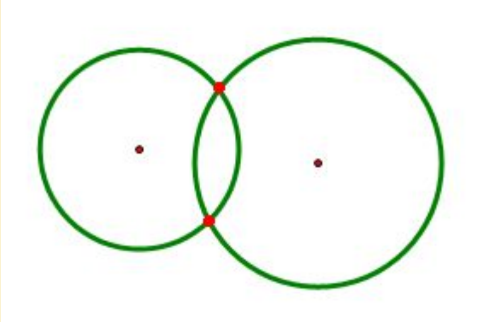
- Положение двух окружностей
- ТЕОРЕМЫ (о точке касания)
- Свойство общей хорды двух окружностей
- Различные случаи относительного положения двух окружностей

Положение двух окружностей

Если две окружности имеют только одну общую точку, то говорят, что они касаются.

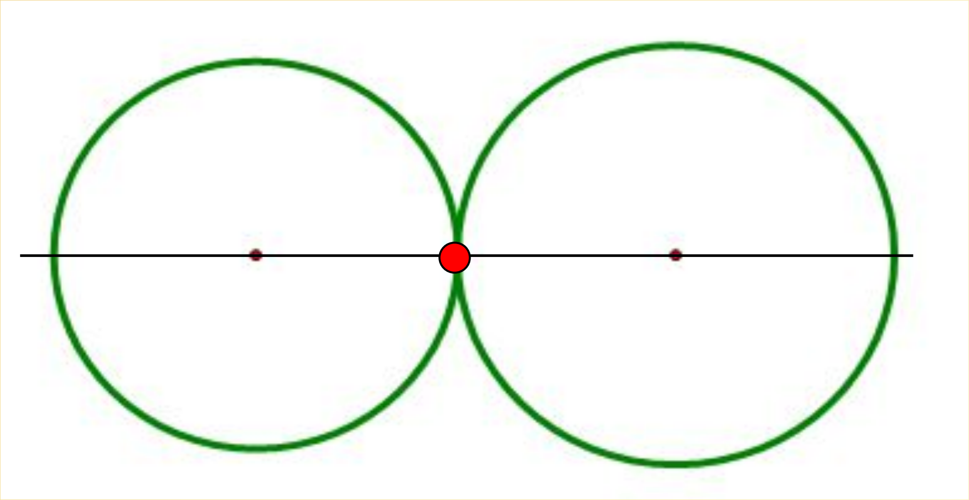


Если же две окружности имеют две общие точки, то говорят, что они пересекаются.



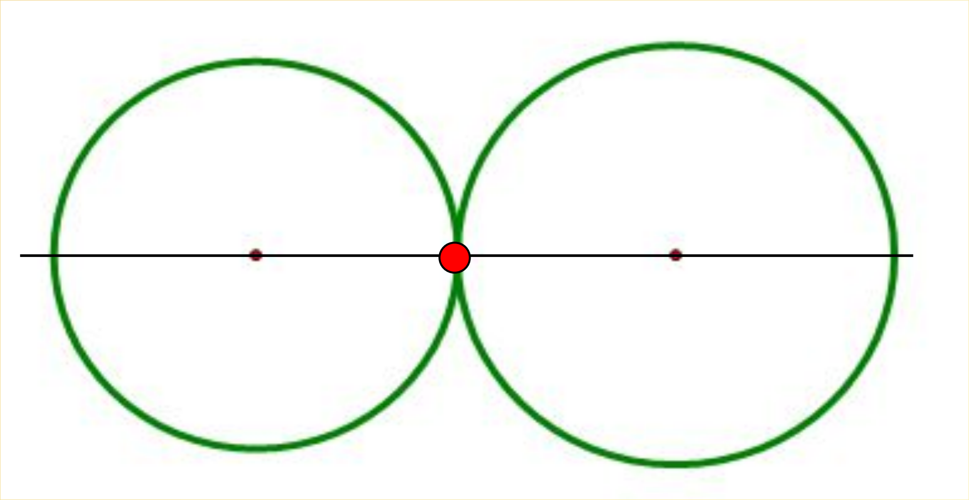
ТЕОРЕМА (о точке касания)

Если две окружности имеют общую точку на линии их центров, то они касаются.



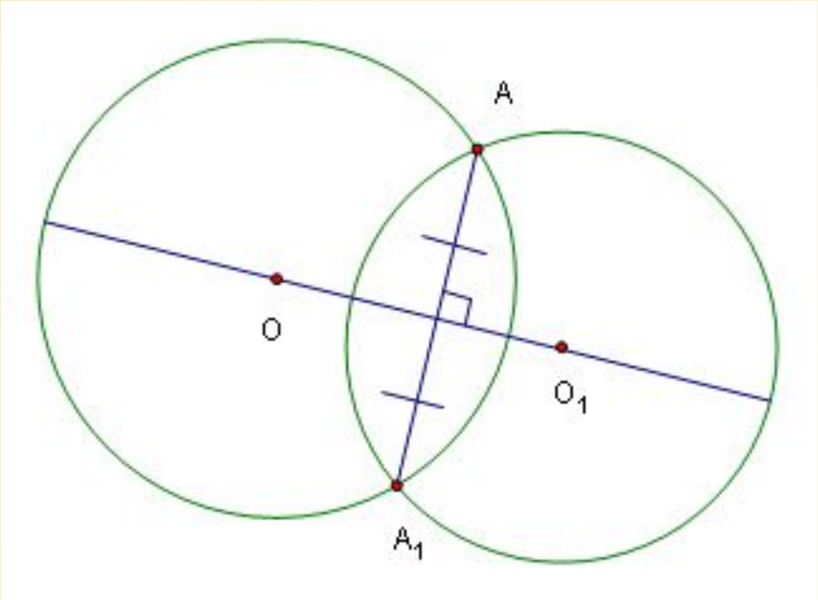
ТЕОРЕМА (обратная предыдущей)

Если две окружности касаются в точке, то эта точка касания лежит на линии центров.



Свойство общей хорды двух окружностей

Общая хорда AA_1 двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится ею пополам.



Различные случаи относительного положения двух окружностей.

- $d>R+R_1$
- $d=R+R_1$
- $d<R+R_1$
- $d=R-R_1$
- $d<R-R_1$

d – расстояние между центрами окружностей

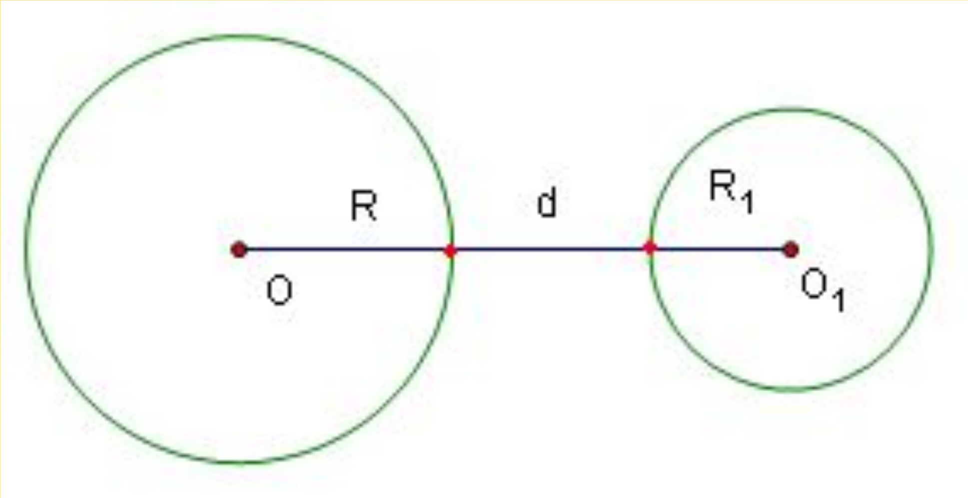
R и R_1 –радиусы окружностей

Обратные предложения

1.Окружности лежат одна вне другой, не касаясь в этом случае, очевидно, $\underline{d > R + R_1}$

R и R_1- радиусы окружностей

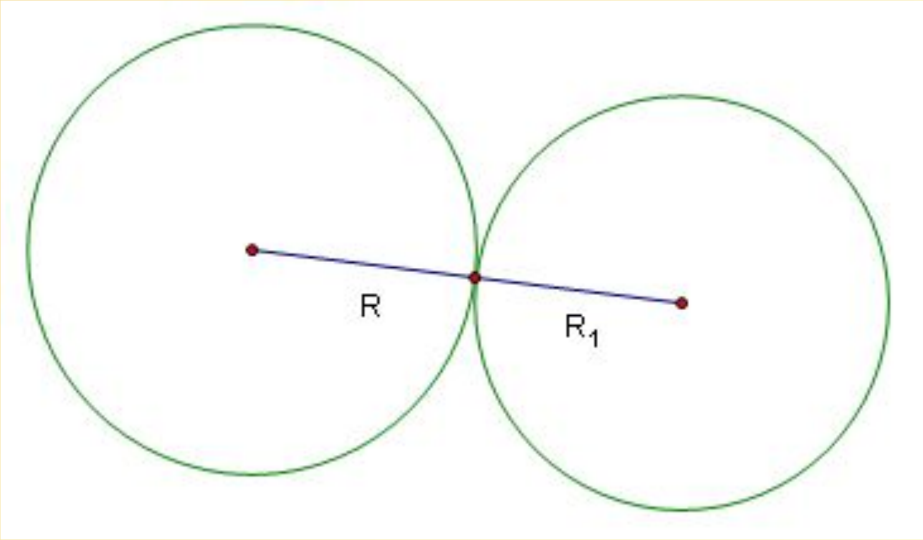
d - расстояние между центрами окружностей



2.Окружности имеют внешнее касание, тогда $\underline{d = R + R_1}$, так как точка касания лежит на линии центров.

R и R_1- радиусы окружностей

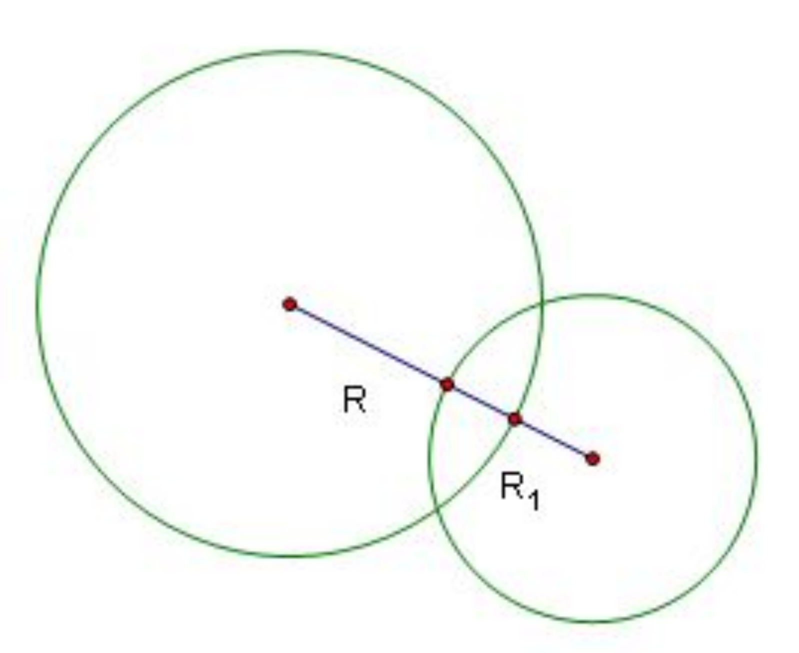
d - расстояние между центрами окружностей



3. Окружности пересекаются тогда $\underline{d < R + R_1}$

R и R_1- радиусы окружностей

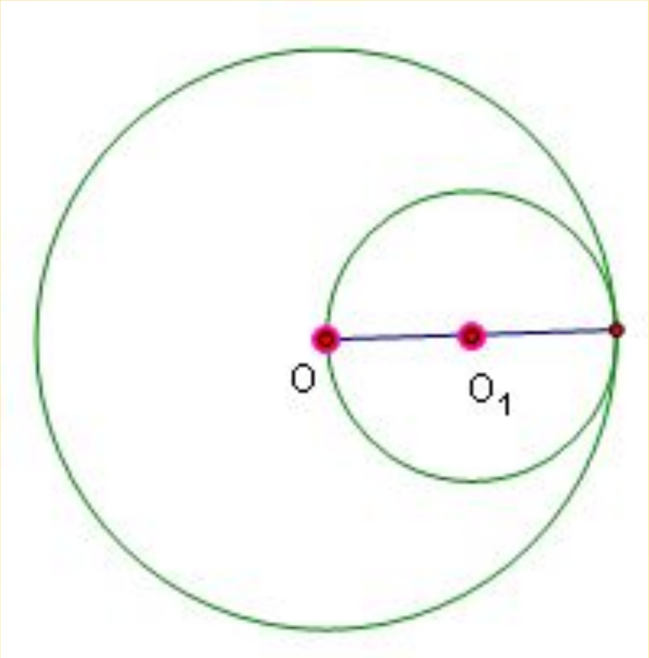
d - расстояние между центрами окружностей



4. Окружности имеют внутреннее касание в этом случае $d = R - R_1$, потому что точка касания лежит на линии центров.

R и R_1- радиусы окружностей

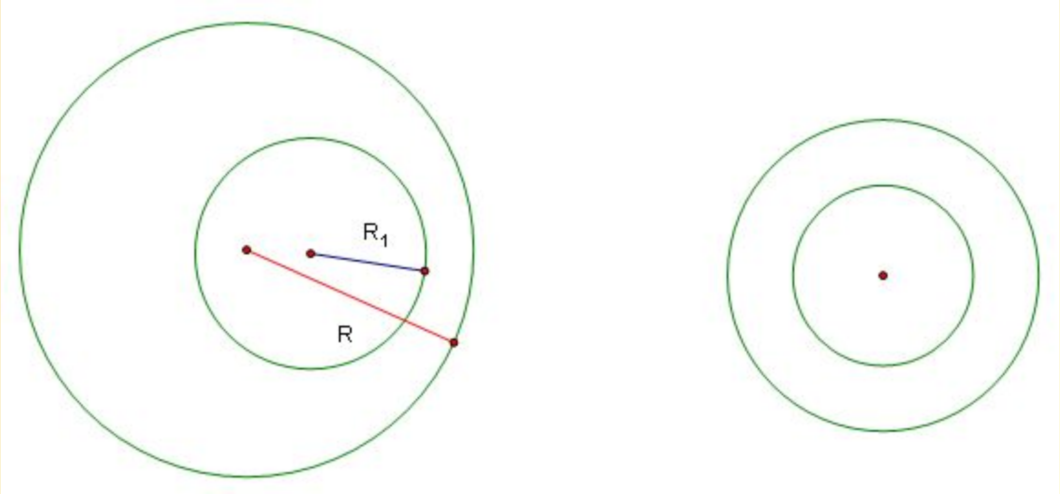
d - расстояние между центрами окружностей



5. Одна окружность лежит внутри другой, не касаясь, тогда, очевидно, <u>$d < R - R_1$</u> и в частном случае $d = 0$, когда центры обеих окружностей сливаются (такие окружности называются концентрическими).

R и R_1- радиусы окружностей

d - расстояние между центрами окружностей



Обратные предложения

1. Если $d > R + R_1$, то окружности расположены одна вне другой, не касаясь.

2. Если $d = R + R_1$,то окружности касаются извне.

3. Если $d < R + R_1$ и в то же время $d > R - R_1$, то окружности пересекаются.

4. Если $d = R - R_1$, то окружности касаются изнутри.

5. Если $d < R - R_1$, то одна окружность лежит внутри другой, не касаясь.

УГЛЫ И ОКРУЖНОСТЬ

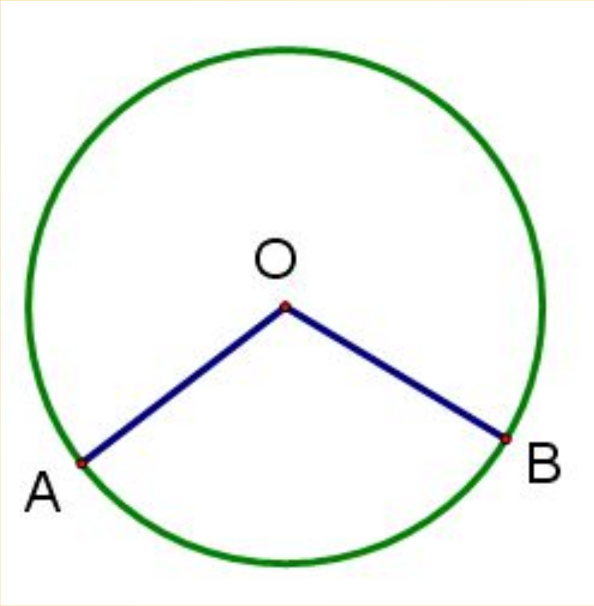
- Центральный угол
- Вписанный угол
- ТЕСТ

ВПИСАННЫЙ УГОЛ

- Определение
- ТЕОРЕМА о вписанном угле
- Свойства вписанных углов
- Угол между хордами
- Угол между двумя секущими
- Описанный угол
- Угол между хордой и касательной
- Угол между касательной и секущей

Центральный угол

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.

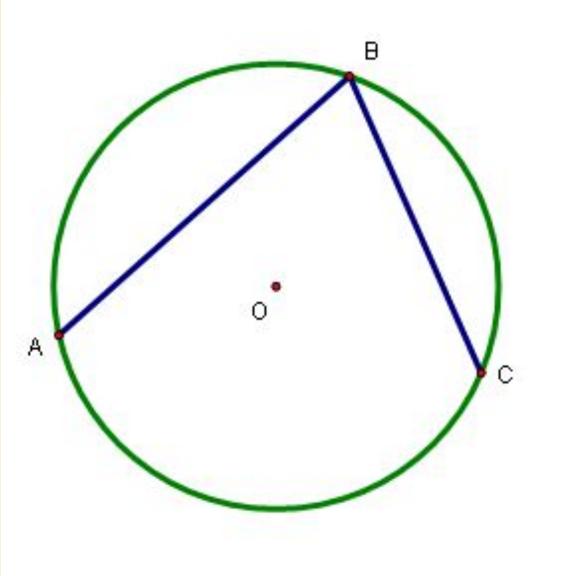


$\angle AOB$ - центральный угол

Вписанный угол

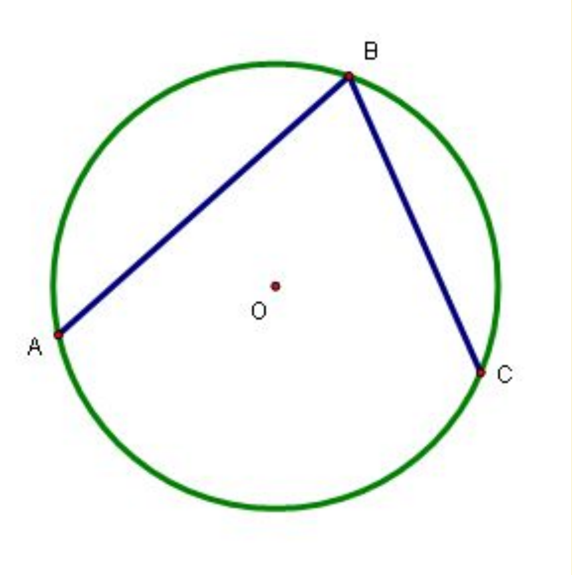
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

$\angle ABC$ -
вписанный угол



Теорема о вписанном угле

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.



$\angle ABC$- вписанный угол

AC- дуга окружности

Доказательство

1 случай 1 случай **2 случай 1 случай**
2 случай **3 случай**

Дано: окружность с центром О, $\angle ABC$ - вписанный

Доказать: $\angle ABC = ½ \cup AC$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда сторона BC проходит через центр O

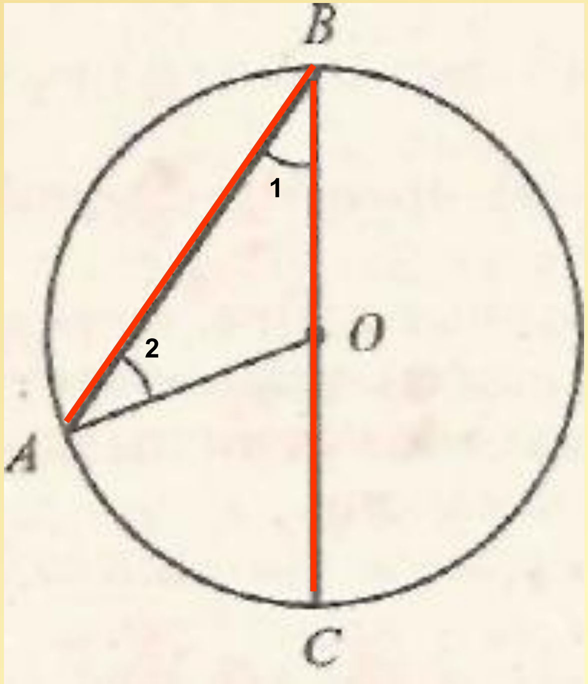
1. Дуга AC меньше полуокружности, $\angle AOC = \cup AC$ (центральный)

2. Рассмотрим ΔABO, $AO = OB$ (радиусы). ΔABO равнобедренный

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle AOC$ – внешний угол ΔABO,

$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1$,

следовательно $\angle ABC = ½ \cup AC$



Дано: окружность с центром *O*, $\angle ABC$ - вписанный

Доказать: $\angle ABC = ½\cup AC$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда центр О лежит внутри вписанного угла.

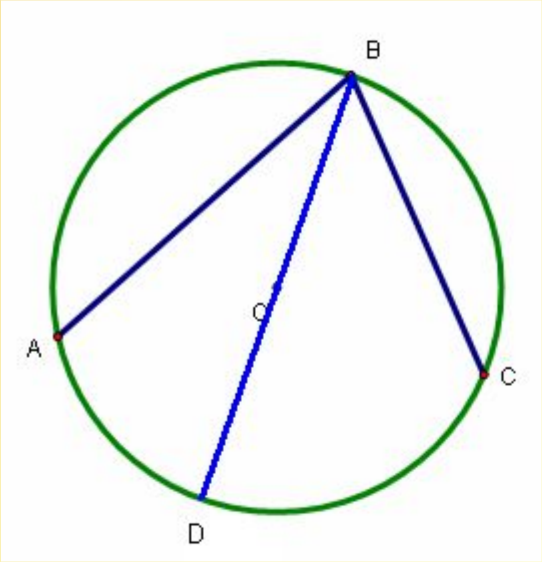
1. Дополнительное построение: диаметр *BD*

2. Луч ВО делит $\angle ABC$ на два угла

3.Луч ВО пересекает дугу АС в точке D

4. $\cup AC = \cup AD + \cup DC$, следовательно $\angle ABD = ½\cup AD$ *и* $\angle DBC = ½\cup DC$ или

$\angle ABD + \angle DBC = ½\cup AD + ½\cup DC$ или $\angle ABC = ½\cup AC$



Дано: окружность с центром *O*, $\angle ABC$ - вписанный

Доказать: $\angle ABC = ½ \cup AC$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда центр O лежит вне вписанного угла.

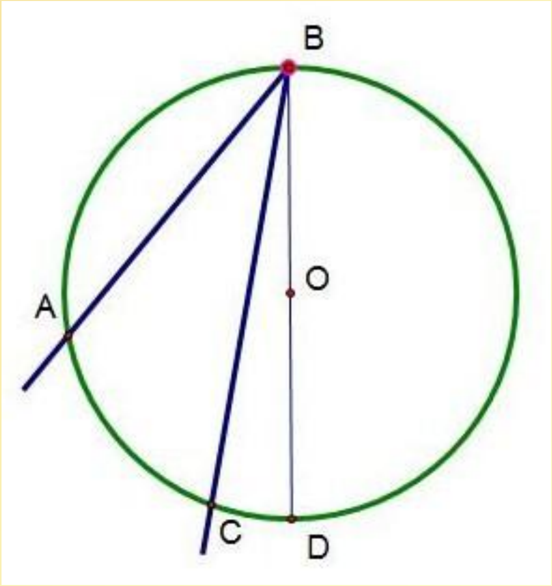
1. Дополнительное построение: диаметр *BD*

2. Луч BO не делит $\angle ABC$ на два угла

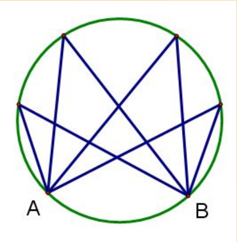
3. Луч BO не пересекает дугу AC в точке D

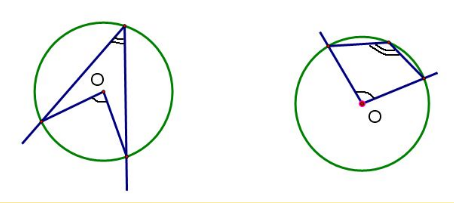
4. $\cup AC = \cup AD - \cup CD$, следовательно $\angle ABD = ½ \cup AD$ *и* $\angle DBC = ½ \cup DC$ *или*

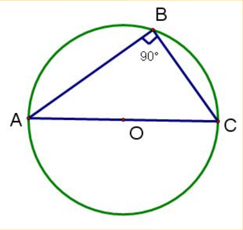
$\angle ABD - \angle DBC = ½ \cup AD - ½ \cup DC$ *или* $\angle ABC = ½ \cup AC$



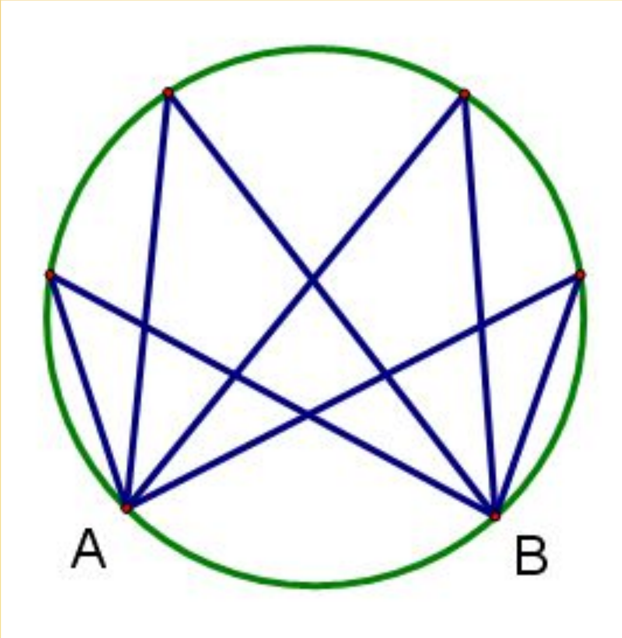
Свойства вписанных углов

- 1 

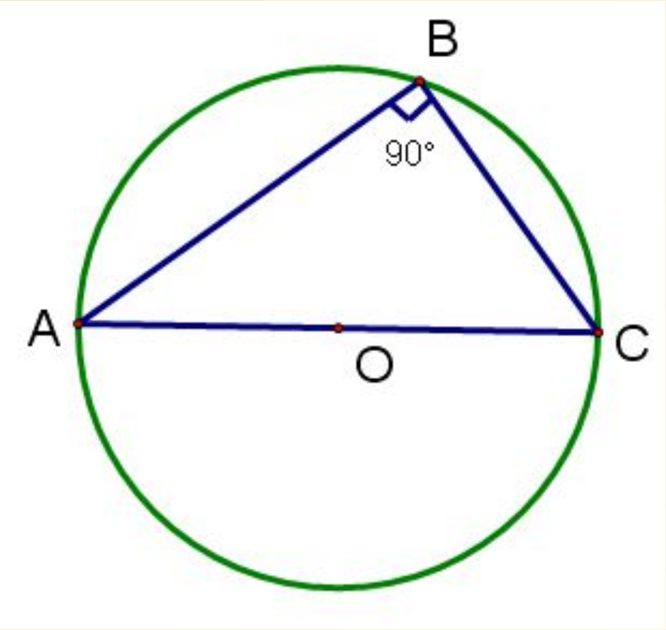
- 3 

- 2 

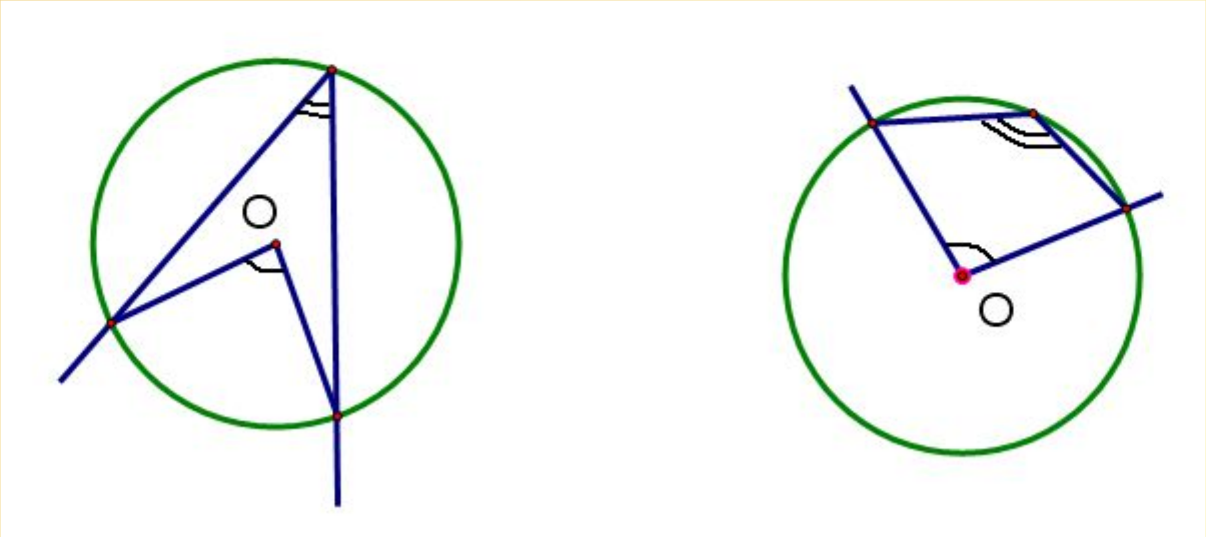
1.Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой, потому что каждый из них измеряется половиной одной и той же дуги.



2. Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой, потому что каждый такой угол измеряется половиной полуокружности и, следовательно, содержит 90°.

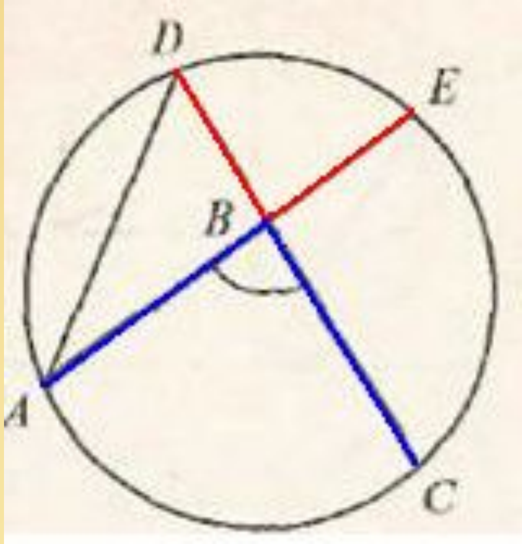


3. Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до 180°.



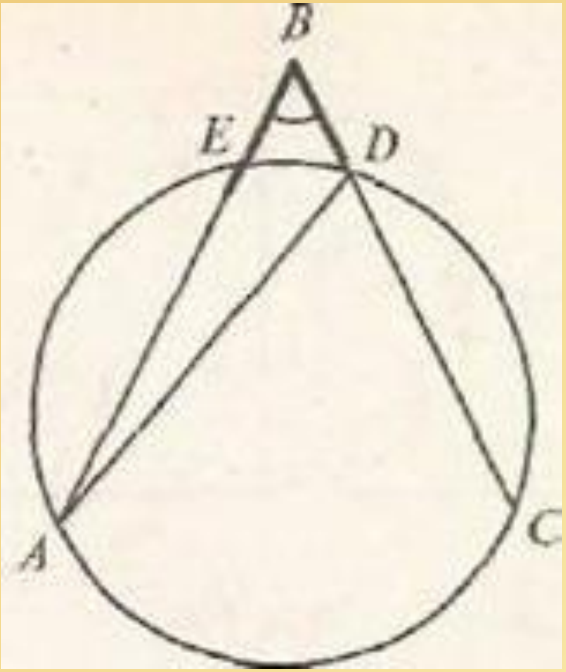
Теорема об угле, вершина которого лежит внутри круга

Угол (ABC), вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг (AC и DE), из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.



Теорема об угле, вершина которого лежит вне круга (угол между секущими)

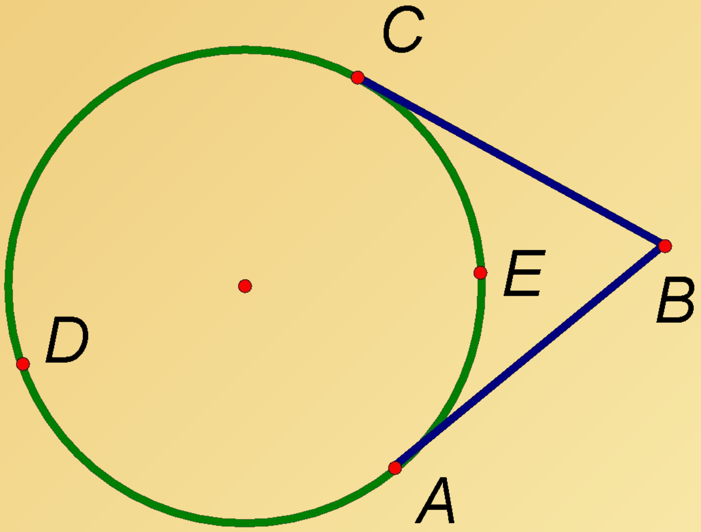
Угол *ABC*, вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг *AC* и *ED*, заключенных между его сторонами.



$$\angle ABC = \tfrac{1}{2}\,(\cup AC - \cup ED)$$

Описанный угол
(угол между двумя касательными)

равен полуразности образованных им дуг.

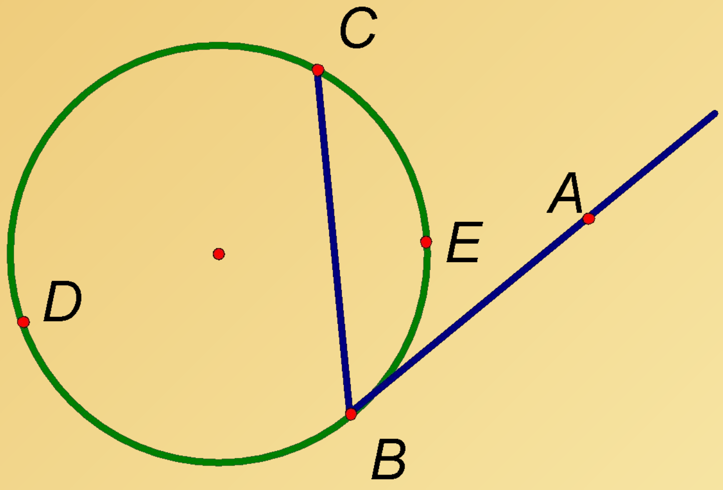


$\angle ABC = ½ (\cup ADC – \cup AEC)$

Угол между хордой и касательной

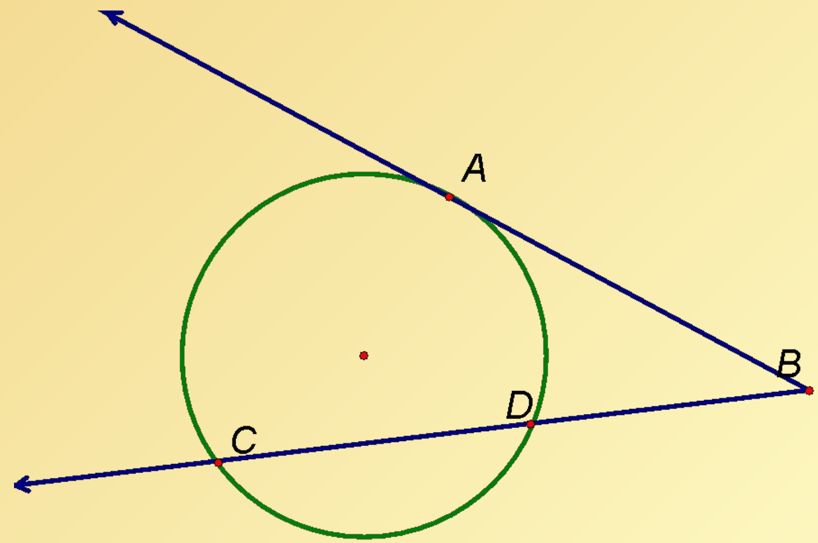
равен половине дуги, заключенной внутри него.

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BEC$$



Угол между касательной и секущей

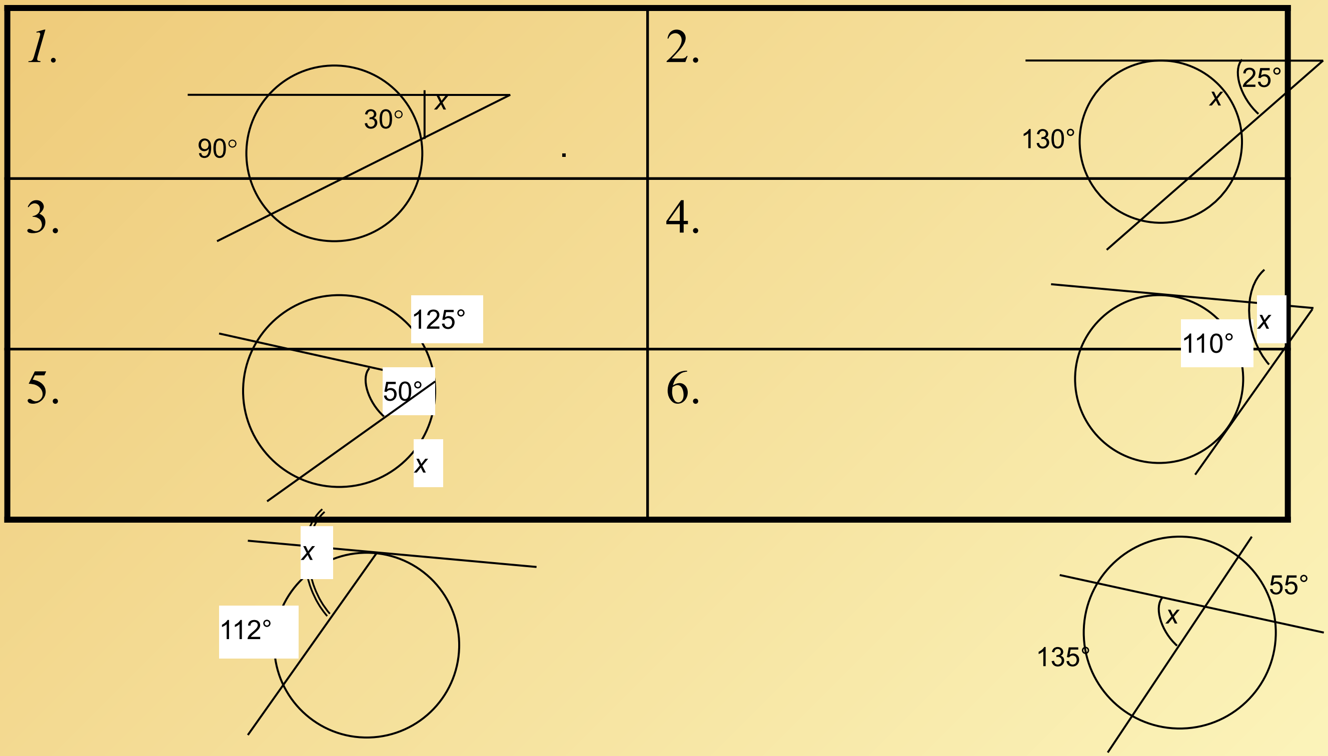
равен полуразности образованных отсекаемых дуг, прилежащих к касательной.



$\angle ABC = ½ (\cup AC - \cup AD)$

ТЕСТ

Найти *x* по данным чертежам и выбрать нужную величину



а)80° б)70° в)135° г)95° д)30° е)56°

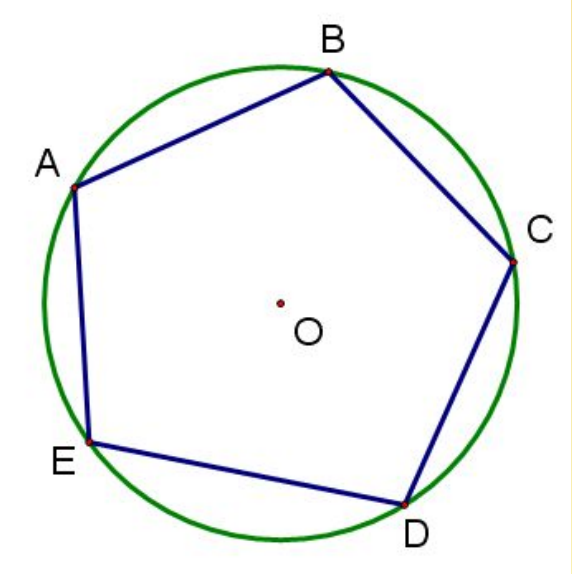
1	д
2	а
3	в
4	б
5	е
6	г

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

- Окружность, описанная около многоугольника
- Окружность, описанная около треугольника
- Окружность, вписанная в треугольник

Окружность, описанная около многоугольника

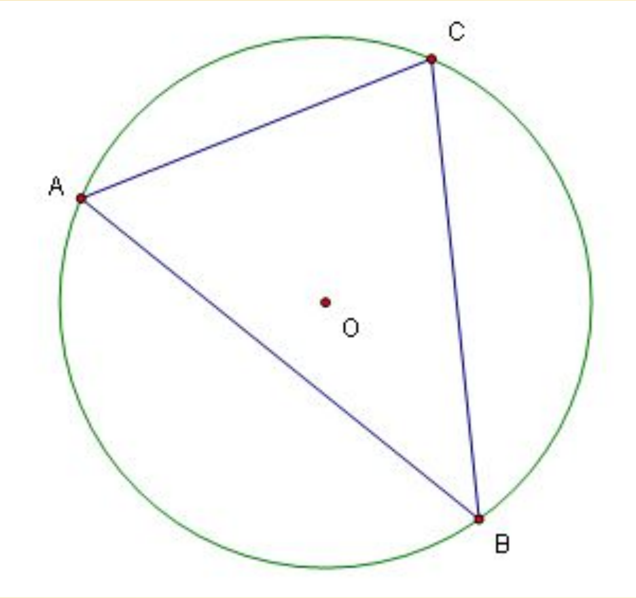
Окружность описана около многоугольника, если она проходит через все его вершины.



Окружность, описанная около треугольника

ТЕОРЕМА

Около каждого треугольника можно описать окружность.

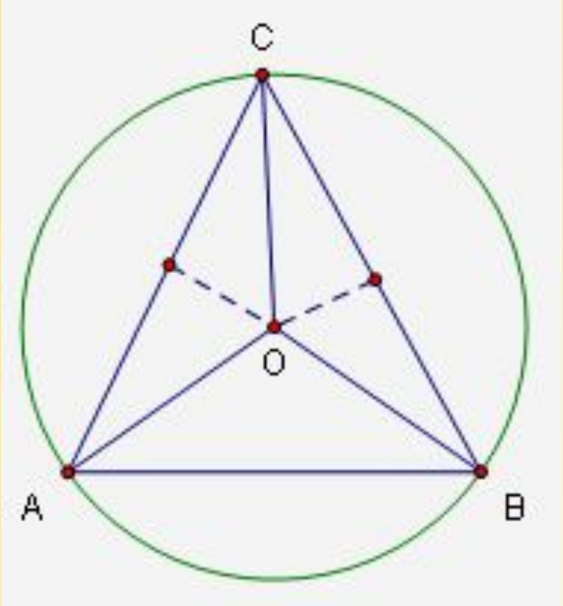


Доказательство

Доказательство.

1.Рассмотрим произвольный треугольник *ABC*. Обозначим буквой *O* точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведем отрезки *O A*, *O B* и *OC*.

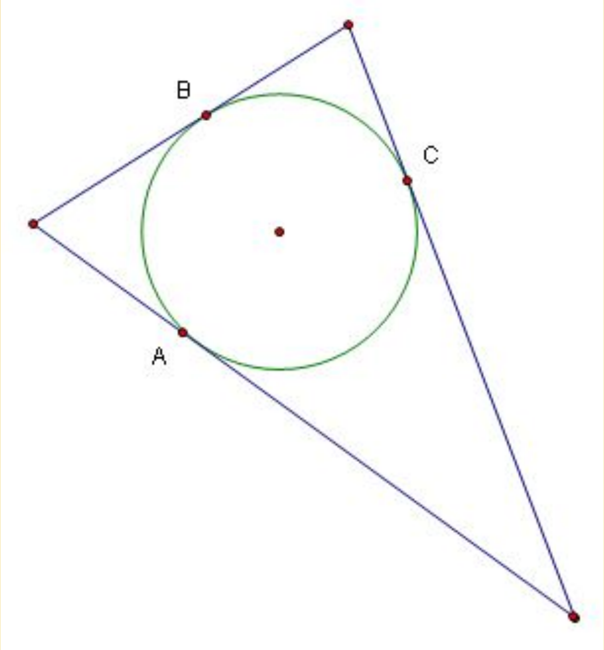
2. Так как точка *O* равноудалена от вершин треугольника *ABC* , то *OA* = *OB* = *OC*, Поэтому окружность с центром О радиуса *O A* проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника *ABC*.



Окружность, вписанная в треугольник

ТЕОРЕМА

В каждый треугольник можно вписать окружность.



[Доказательство]

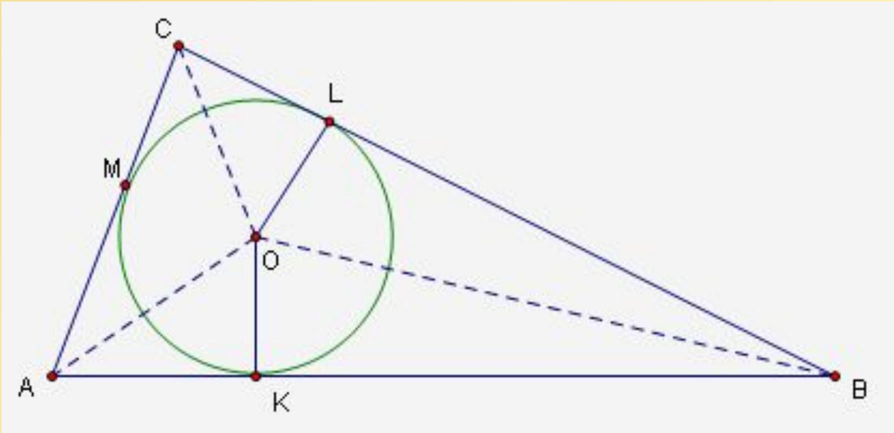
Доказательство.

1. Рассмотрим произвольный треугольник *ABC* и обозначим буквой О точку пересечения его биссектрис.

2. Проведем из точки О перпендикуляры *ОК*. *OL* и *ОМ* соответственно к сторонам *АВ, ВС* и *СА*.

3. Так как точка *О* равноудалена от сторон треугольника *ABC,* то *ОК= OL = ОМ*. Поэтому окружность с центром *О* радиуса *ОК* проходит через точки *К, L* и *М*.

4. Стороны треугольника *ABC* касаются этой окружности в точках *К, L, М,* так как они перпендикулярны к радиусам *ОК, OL* и *ОМ*. Значит, окружность с центром О радиуса *ОК* является вписанной в треугольник *ABC*.



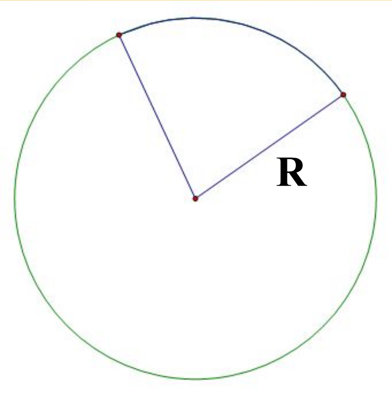
ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ

- Длины
- Площади

Длины

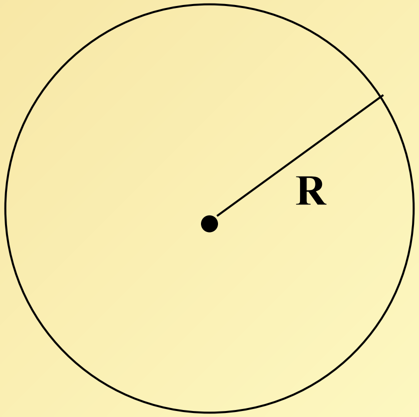
Длина дуги окружности ℓ
радиуса *R* с центральным углом α

$$\ell = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$



Длина окружности *C* радиуса *R*

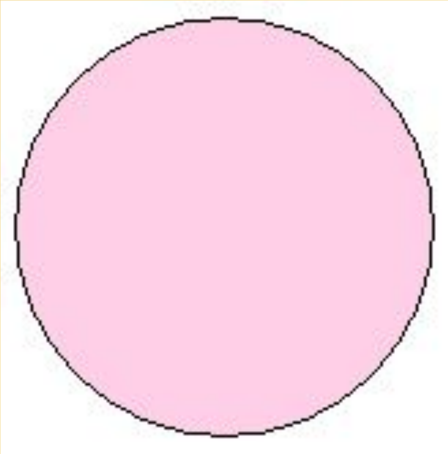
$$C = 2\pi R$$



Площади

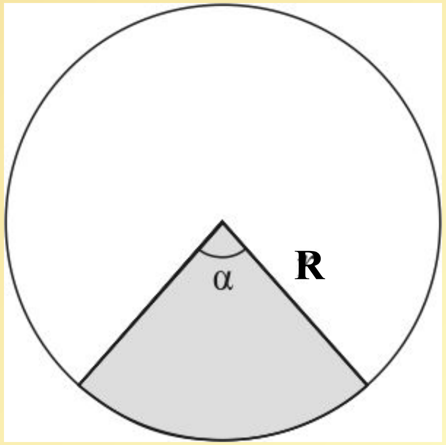
Площадь *S* круга радиуса *R*

$$S = \pi R^2$$



Площадь *S* сектора радиуса *R* с центральным углом в α

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$



Об авторе

Презентацию подготовила
Ученица 9 «А» класса
Школы № 316
Борисова Валерия

Руководитель
Подольская А.В.