Сегодня: *

Лекция № Z

Тема: Гравитационное поле. Законы Кеплера

Закон всемирного тяготения. Гравитационное поле

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$

F - сила взаимодействия между двумя телами массой m и M, находящихся на расстоянии друг от друга

Современные торсионные весы на которых ученые из Вашингтонского университета уточняют значение G

Напряженность гравитационного поля

Напряженностью гравитационного поля *E* в некоторой точке пространства называется векторная физическая величина, равная отношению силы, действующую на пробную точечную массу в данной точке поля, к величине этой пробной массы

Единица измерения м/с2

$$E=\frac{F}{m_{\text{пр}}}$$

Работа сил тяготения:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}A = -\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{G}\,\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r = m\left(\mathrm{G}\,\frac{M}{r_2} - \mathrm{G}\,\frac{M}{r_1}\right).$$

Из этой формулы вытекает, что *работа не зависит от траектории, а зависит лишь от координат точки, т. е. - силы тяготения являются консервативными, а поле потенциально.*

Потенциальная энергия тела в поле Земли

$$\boxed{U = -G\frac{mM}{r}}$$

Нарисовать график

Величину *U* называют *взаимной* потенциальной энергией обеих масс.

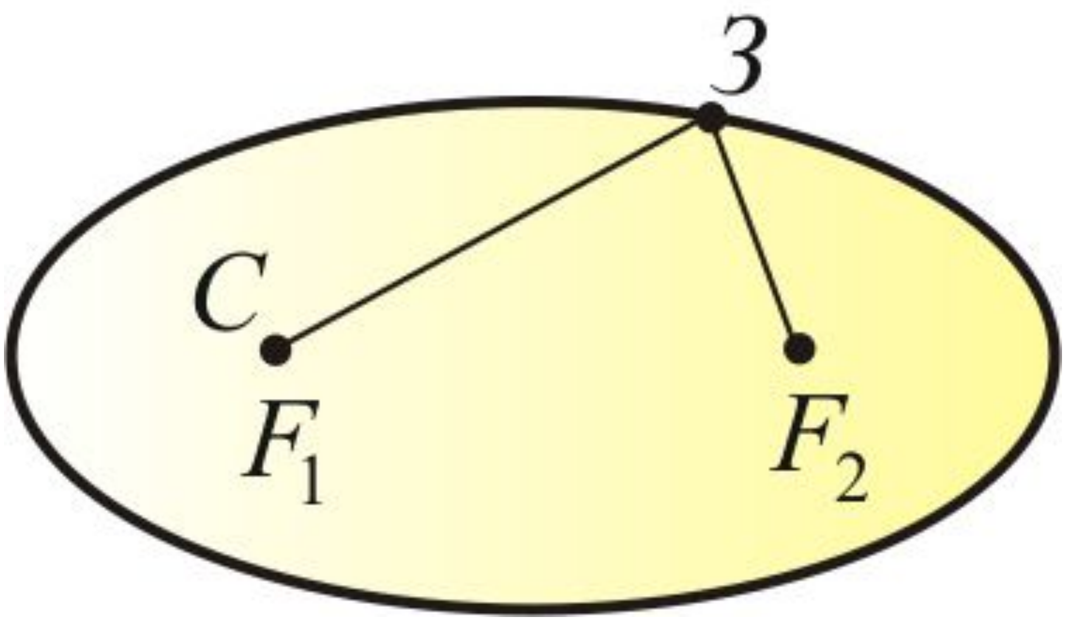
Величина φ, равная отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе m:

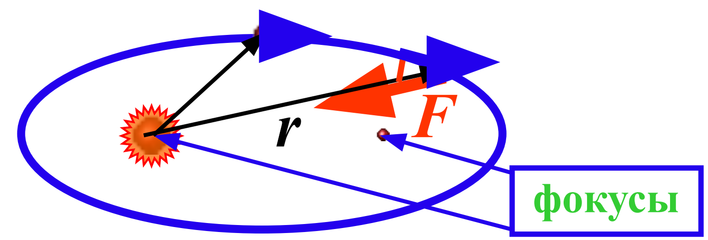
$$\varphi = \frac{U}{m} \qquad \boxed{\phi = -G\frac{M}{r},}$$

является энергетической характеристикой поля тяготения и называется ***потенциалом поля тяготения.***

Первый закон Кеплера.

Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце

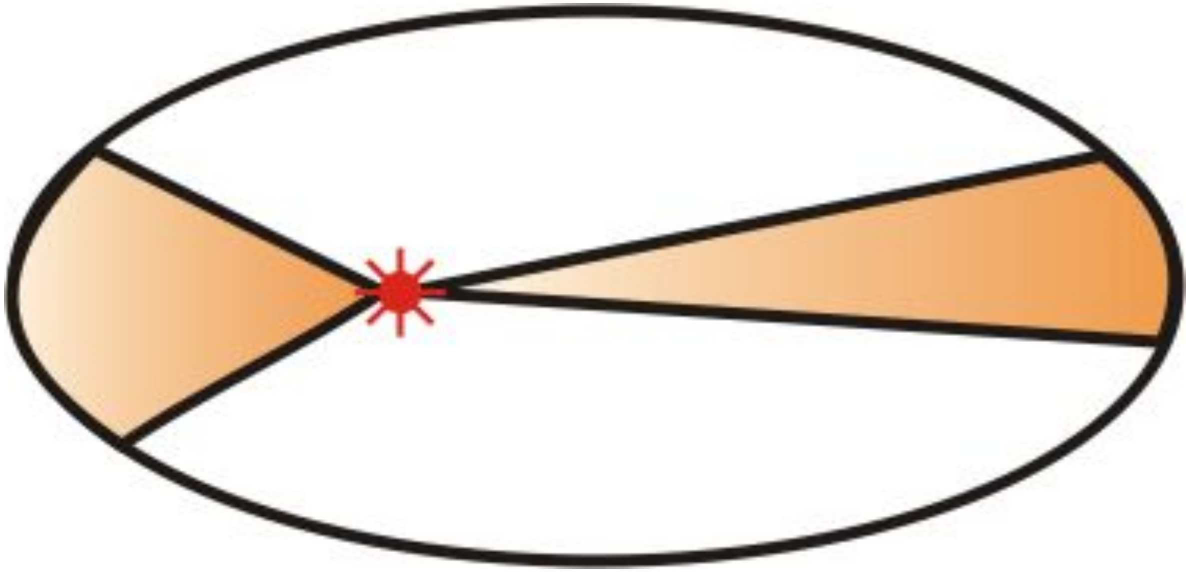


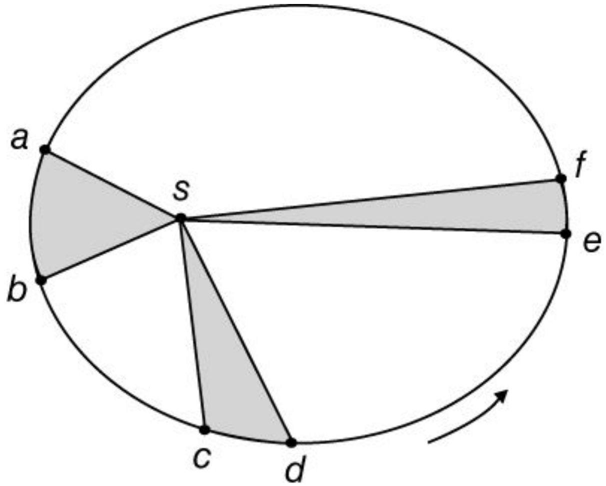


Второй закон Кеплера.

Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади

$$\frac{dS}{dt} = const$$

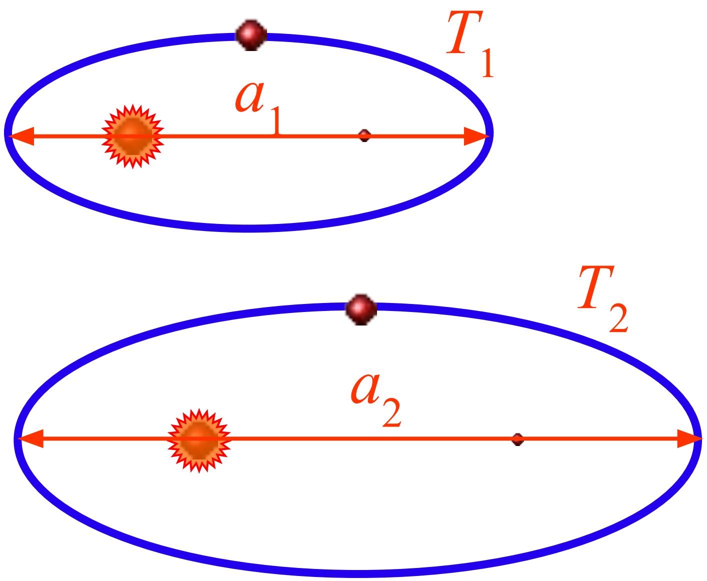




Третий закон Кеплера

квадраты периодов обращения планет в гравитационном поле относятся как кубы больших полуосей их орбит

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Следствия из принципа эквивалентности, подтверждающие ОТО

1. *Замедление времени в гравитационных полях*

Общая теория относительности предсказывает замедление хода часов в гравитационных полях.

Пусть часы движутся с ускорением g, тогда их скорость, после того, как они прошли расстояние x, равна

$$\upsilon = \sqrt{2gx}.$$

Согласно ОТО

Промежутки времени dt в неподвижной и dt_0 в подвижной системах отсчета связаны соотношением:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1-\frac{2gx}{c^2}}},$$

где dt – промежуток времени в пространстве без поля.

Поскольку $\varphi = gx$ – гравитационный потенциал, то имеем в слабых гравитационных полях $(\varphi << c^2)$

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - 2\varphi / c^2}} \cong dt_0\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

– время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного потенциала.

$$\boxed{dt \cong dt_0\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)}$$

Этот эффект был подтвержден прямым экспериментом:

В 1976 г. на высоту 10^4 км на ракете были подняты водородные часы, точность хода которых составляет 10^{-15} с. На Земле оставили точно такие же часы, предварительно синхронизировав с улетевшими часами.

Через два года часы вернули и сравнили показания, разность $4{,}5 \cdot 10^{-10}$ с совпала с расчетной по ОТО, с точностью 0,02%.

2. *Красное гравитационное смещение частоты фотонов*

При приближении света к телам, создающим гравитационное поле, частота света убывает с увеличением абсолютной величины потенциала поля.

Для частоты света в гравитационном поле можно записать:

$$\boxed{\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)}$$

где ν – частота света с точки зрения неподвижного наблюдателя, ν_0 – частота света в подвижной системе отсчета.

Так, если свет испускается в точке с потенциалом φ_1, и приходит в точку с потенциалом φ_2, то линии спектра смещаются в сторону красного цвета на величину

$$\Delta\nu = \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) = (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\nu_0}{c^2}.$$

Если на Земле наблюдать спектр, испускаемый на Солнце и звездах, то $|\varphi_2| < |\varphi_1|$ и $\Delta\nu < 0$, т.е. смещение происходит в сторону меньших частот (красный спектр). Этот факт был доказан в 1960 г. с помощью эффекта Мессбауэра и подтверждает следствие ОТО с точностью до 1%.

1916 г. Эйнштейн, обобщая идеи СТО, создал теорию гравитации (ОТО): любой объект, обладающий энергией E, будет подвержен действию гравитационного поля как если бы он имел гравитационную массу m_g.

Связь m_g с энергией определяется: $E = m_g c^2$.

Масса фотона равна нулю, но в любом гравитационном поле он должен вести себя как частица с гравитационной массой

$$m_g = \frac{\hbar\omega}{c^2}.$$

При движении фотона вблизи поверхности Земли вверх по вертикали на расстояние l фотон должен затратить часть своей энергии на совершение работы против сил тяжести:

$$A = m_g gh = \frac{\hbar \omega g l}{c^2}.$$

Соответственно первоначальная энергия фотона

$$\hbar \omega$$

должна уменьшится на величину

Значит, частота фотона в конце пути будет меньше на величину

$$\Delta E = A$$

$$\Delta \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\hbar \omega l}{c^2}$$

Относительное уменьшение частоты фотона

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gl}{c^2}$$

при распространении по вертикали было измерено в 1960 г. американскими учеными Паундом и Ребкой. В условиях опыта оно составило малую величину $2 \cdot 10^{-15}$. Следовательно, перепад высот в опыте Паунда-Ребки составлял

$$l = \frac{\delta c^2}{g} \approx 18 \text{ м.}$$

Эффект изменения частоты света при удалении от большой тяготеющей массы называется гравитационным красным смещением.

3. *Отклонение светового луча массивными телами*

ОТО объясняет вдвое большее отклонение светового луча вблизи массивных тел, чем это предсказывала теория Ньютона. Эксперимент был проведен в 1919 г. Световой луч, вблизи одной из планет, отклонился на 1,75'', тогда как по теории Ньютона искривление должно было произойти на 0,87'', т.е. вдвое меньше.

4. *Объяснение смещения орбиты Меркурия*

Известно, что за 100 лет орбита Меркурия сместилась на 1° 33' 20''. Из теории Ньютона следует смещение, за счет влияния планет, на 1° 32' 37'', а где же еще 43''. Подставив в формулы ОТО параметры Солнца и Меркурия, Эйнштейн получил скорость прецессии орбиты на 43'' за 100 лет!

5. Черные дыры

ОТО предполагает наличие во Вселенной черных дыр – космических объектов, поглощающих все частицы, в том числе фотоны, подходящие к их поверхности.

Допуская, что фотон обладает гравитационной массой, можно оценить размеры r_g и массу M космического объекта, способность стать черной дырой. Для этого **необходимо, чтобы *кинетическая энергия фотона была меньше или равна его потенциальной энергии*** на бесконечности:

$$\frac{m_\gamma c^2}{2} \le G\frac{m_\gamma M}{r_g},$$

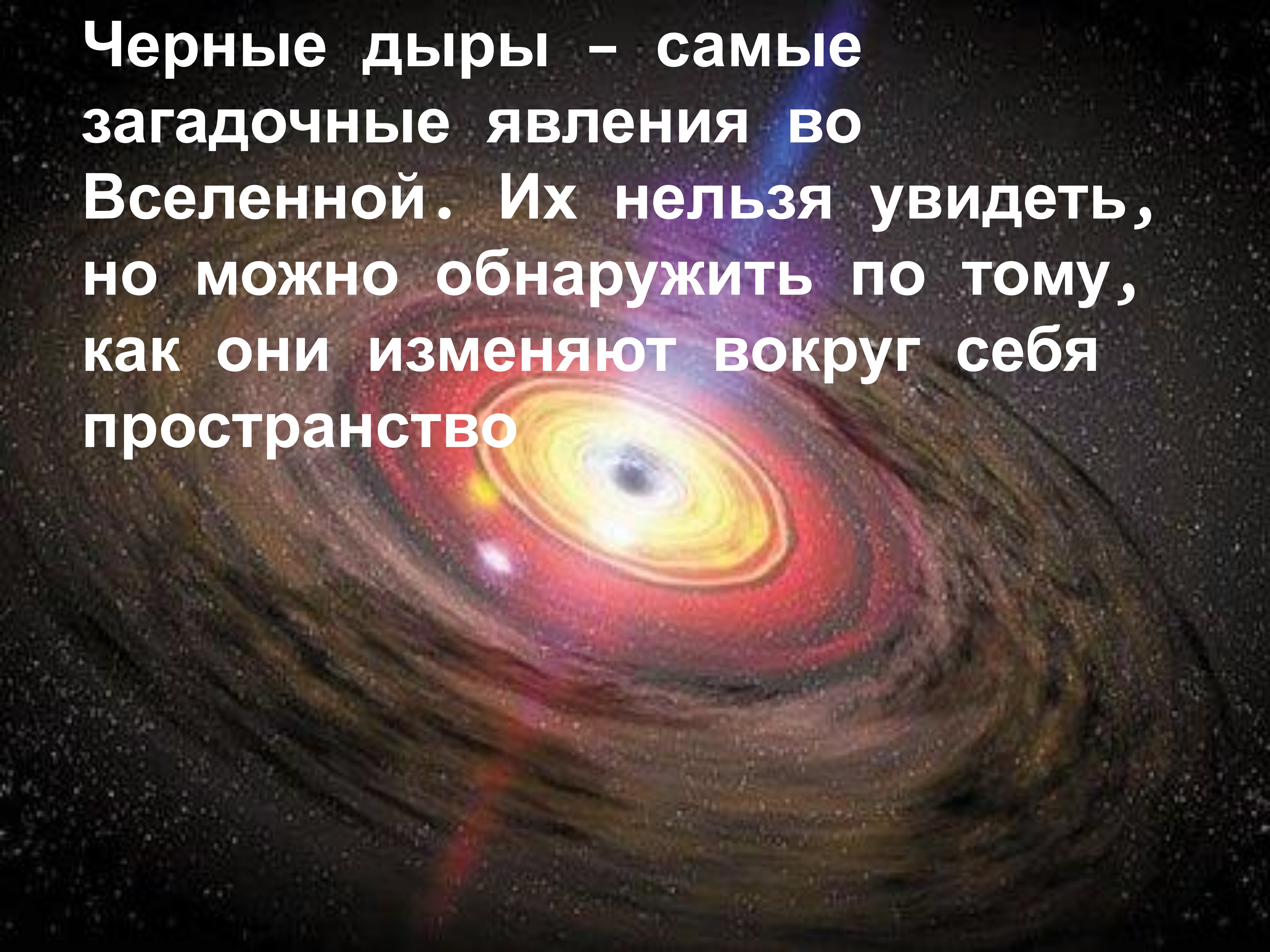
Уравнение черной дыры

$$\frac{m_\gamma c^2}{2} \le G\frac{m_\gamma M}{r_g},$$ отсюда

если $\boxed{r_g \le G\frac{2M}{c^2}}$ то **свет не сможет** покинуть данный космический объект.

Уже есть достаточно веские доказательства существования черных дыр. Основная трудность состоит в том, что они поглощают все и почти ничего не излучают. Поэтому об их существовании можно судить по косвенным данным: поглощению вещества и испусканию в этом процессе излучения.

Черные дыры – самые загадочные явления во Вселенной. Их нельзя увидеть, но можно обнаружить по тому, как они изменяют вокруг себя пространство



Сегодня: *

Лекция № Z

Тема: Закон сохранения энергии на основе однородности времени

Понятие однородности времени

Если какое-либо явление протекает в определенный промежуток времени, то будучи повторенным в другой промежуток времени при тех же начальных условиях, оно будет протекать точно также.

Следствием однородности времени является закон сохранения энергии

Между законами сохранения и свойствами симметрии пространства и времени существует внутренняя связь

На основе экспериментальных законов сохранения можно вывести свойства симметрии пространства и времени

Пусть имеется некая замкнутая система частиц.

Введем функцию

$$L(x,v,t)=E(v,t)-U(x,t)$$

Такая функция характеризует динамические свойства системы. Здесь E(v,t) – есть полная кинетическая энергия всех частиц, составляющих систему, U(x,t) – полная потенциальная энергия системы.

Такая функция содержит полную информацию о динамических свойствах системы частиц.

Потребуем, чтобы в силу замкнутости системы и в силу однородности времени функция L(x,v,t) не зависела явно от времени (производная от L равна нулю)

$$L(x,v,t) = L(x,v,(t+\Delta t)) \Rightarrow \frac{\partial L}{dt} = 0$$

Тогда полная производная по времени от такой функции будет иметь вид:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v_i}\frac{dv}{dt} \right\} =$$

$$= \sum_i \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v_i}\frac{dv_i}{dt} \right\} = \sum_i \left\{ f_i v_i + m_i v_i \frac{dv_i}{dt} \right\} \quad (1)$$

где mi и vi – соответственно масса и скорость i-той частицы; fi - сила, действующая на нее со стороны других частиц системы.

Преобразуем второе слагаемое под знаком суммы:

$$m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_i v_i^2\right) - v_i \frac{d}{dt}(m_i v_i)$$

Продолжим преобразование полученного выражения.
Замечаем, что

$$(m_i v_i) = p_i \Rightarrow импульс$$

Но производная от импульса, согласно 2-му закону Ньютона, равна силе $\boldsymbol{f}_i$

$$m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_i v_i^2\right) - v_i f_i \qquad (2)$$

Подставим уравнение (2) в (1)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \{ f_i v_i - v_i f_i + \frac{d}{dt}(m_i v_i^2) = \frac{d}{dt}(2E(v,t))$$

$$\frac{d}{dt}\{ -L(x,v,t) + 2E(v,t) \} = 0 \qquad (3)$$

Если производная равна нулю, то величина в фигурных скобках есть величина постоянная = const

$$-E(v,t)+U(x,t)+2E(v,t)=E(v,t)+U(x,t)=const$$

Таким образом, исходя из свойства однородности времени, которое проявляется в том, что отсутствует явная зависимость от времени функции *L(x,v,t), и второго закона Ньютона dp/dt=f, мы получили, что сумма кинетической и потенциальной энергии замкнутой системы частиц есть величина постоянная.*

Закон сохранения энергии доказан.

Обратите внимание, что мы вновь использовали второй закон Ньютона!!!


Лекция окончена