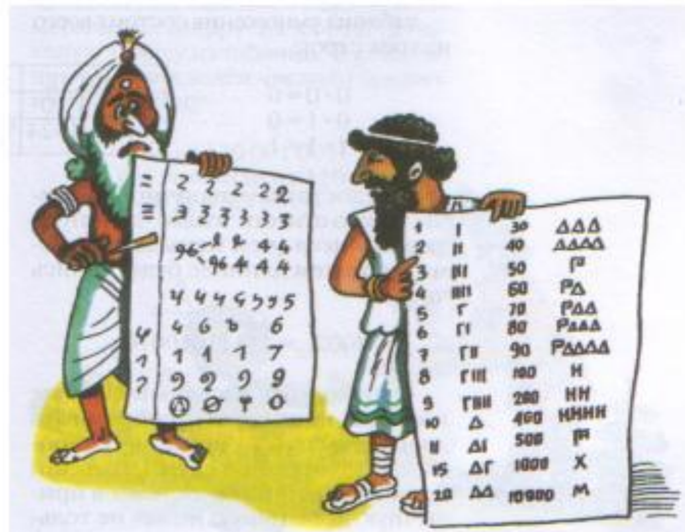
СИСТЕМЫ



СЧИСЛЕНИЯ

2016

Парамонов А.И.

Общие понятия

Система счисления — это *способ* записи (представления) чисел.

Система счисления – совокупность приемов обозначения чисел – *язык*, алфавитом которого являются символы (цифры, буквы), а синтаксисом - правило, позволяющее сформулировать запись чисел однозначно.

Запись числа в некоторой системе счисления называется ***кодом числа***.

Общий вид числа: $A = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

- ПОЗИЦИОННАЯ
  - Однородная
  - Смешанная
- НЕПОЗИЦИОННАЯ


Системы счисления
Позиционные
Непозиционные
Вавилонская шестидесятеричная система
Двоичная система
Шестнадцатеричная система
Десятичная система
Единичная (унарная) система
Римская система
Древнеегипетская десятичная система
Алфавитные системы

Непозиционные С/С

С/С, алфавит которых содержит неограниченное количество символов, причем количественный эквивалент любой цифры постоянен, и зависит только от ее начертания.

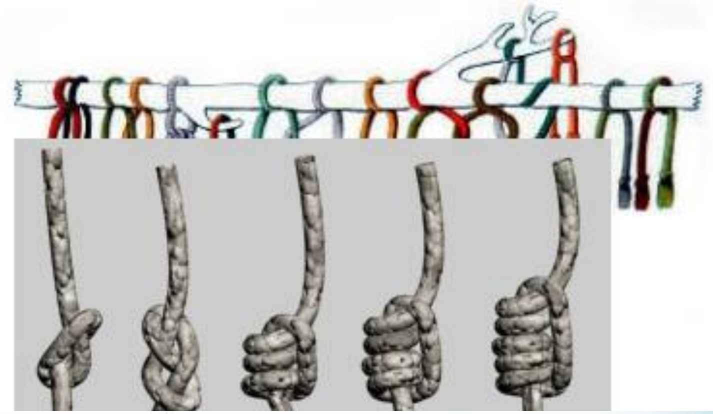
Позиция цифр в числе значения не имеет!

Непозиционные системы строятся по принципу аддитивности, т.е.

Унарная система счисления

Единичная ("палочная", "унарная") система счисления

Узелковая письменность Инко (кипу)

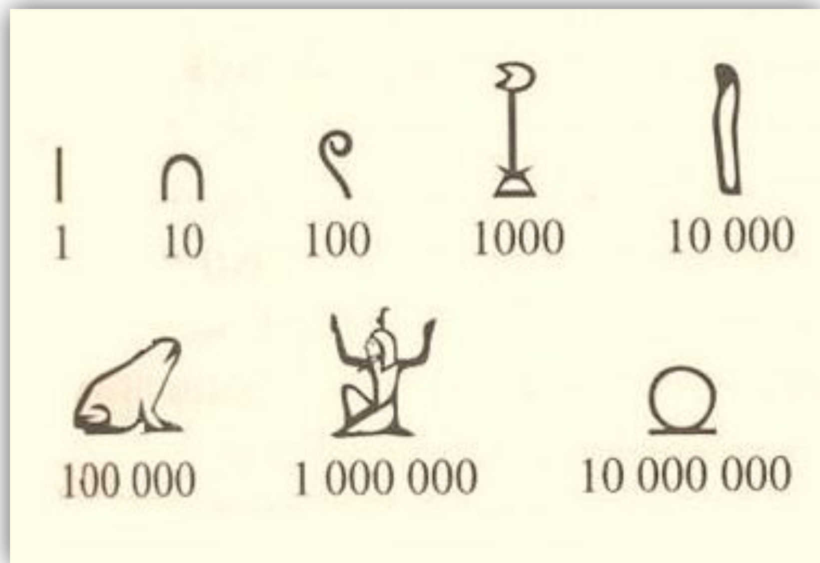


простейшая и самая древняя

1	|
2	||
3	|||
4	||||
5	|||||

Для записи любых чисел используется всего один символ: палочка, узелок, зарубка, камешек.

Египетская система счисления



1. Палочки

10. Путы

100. Мерная веревка

1000. Цветок лотоса

100 000. Головастик.

10 000 000. Символ Амона Ра, бога Солнца.

Римская система счисления

Пример:

I = 1

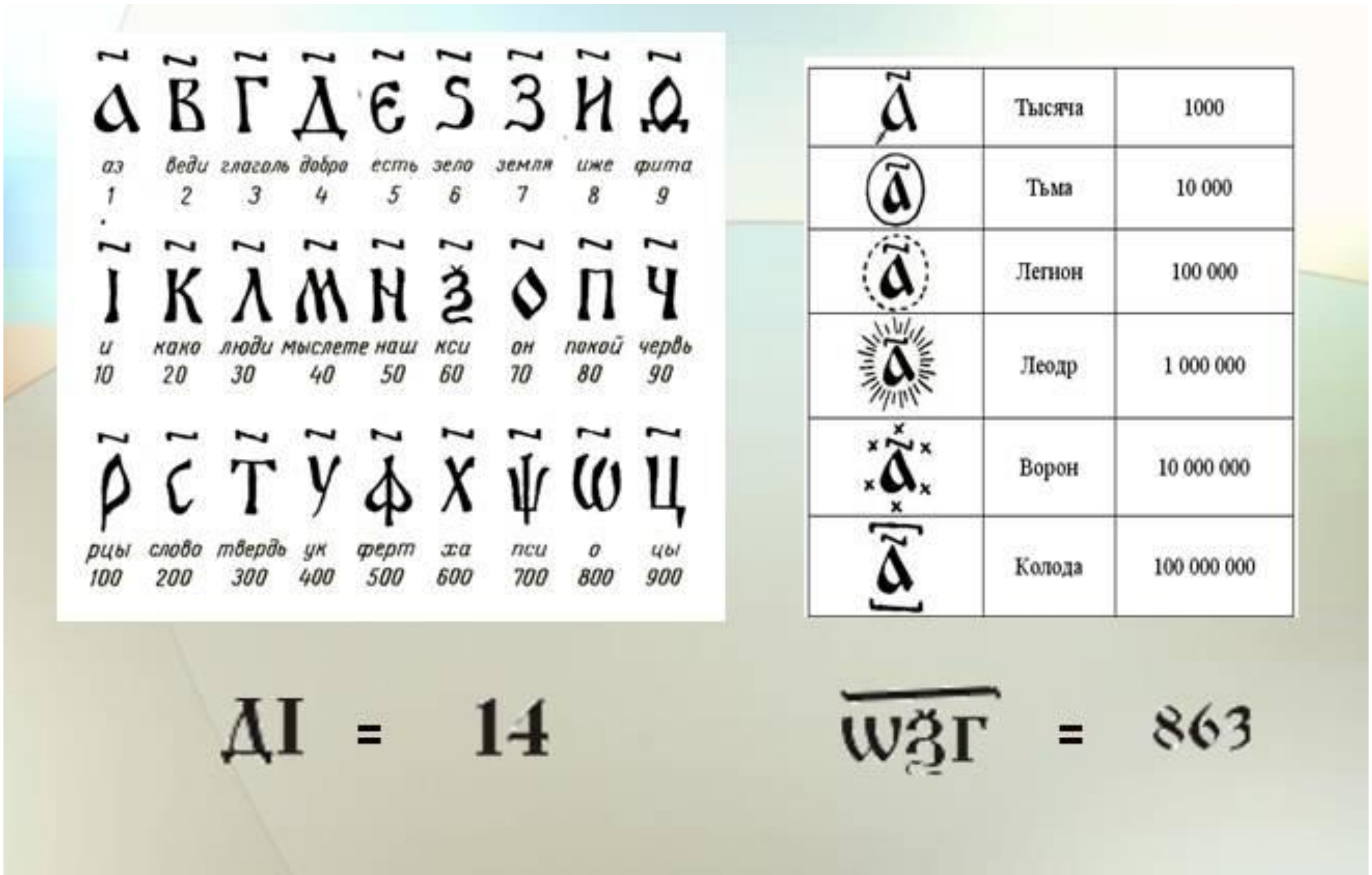
II = 2

III = 3

XXXI = 31

Единицы	Десятки	Сотни	Тысячи
1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Славянская система счисления



Греческая система счисления

I - 1

Г - 5

Δ - 10

Н - 100

Х - 1000

М - 10 000

I, II, III, IIII - 1, 2, 3, 4

Какое число записано?

$$\underbrace{\Delta\,\Delta\,\Delta}_{10+10+10}\;\underbrace{\mathrm{I\,I\,I\,I}}_{+\,4}\;=\;34$$

Позиционные С/С

- ***Позиционные*** – С/С, алфавит которых содержит ограниченное количество символов, причем значение каждой цифры в числе определяется не только ее начертанием, но и ***<u>находится в строгой зависимости от позиции в числе</u>***.

<u>Пример</u>:

$111 = 1*10^2 + 1*10^1+1*10^0 = 100 + 10 + 1$

Основное достоинство позиционной системы возможность записи произвольного числа при помощи ограниченного количества символов.

Общие понятия

Отдельную позицию в изображении числа принято называть ***разрядом***, а номер позиции - ***номером разряда***.

Число разрядов в записи числа называется ***РАЗРЯДНОСТЬЮ*** и совпадает с его длиной.

ОСНОВАНИЕМ системы счисления называется количество различных символов (цифр), используемых в каждом из разрядов числа для его изображения в данной системе счисления.

Позиционные система

- **Однородная система** — для всех разрядов (позиций) числа набор допустимых символов (цифр) одинаков.

Пример: 10-я система. При записи числа в однородной 10-й системе вы можете использовать в каждом разряде исключительно одну цифру от 0 до 9, таким образом, допускается число 450 (1-й разряд — 0, 2-й — 5, 3-й — 4), а 4F5 — нет, поскольку символ F не входит в набор цифр от 0 до 9.

- **Смешанная система** — в каждом разряде (позиции) числа набор допустимых символов (цифр) может отличаться от наборов других разрядов.

Пример: система измерения времени. В разряде секунд и минут возможно 60 различных символов (от «00» до «59»), в разряде часов – 24 разных символа (от «00» до «23»), в разряде суток – 365 и т. д.

Вавилонская система счисления

Десятичная система счисления

- Алфавит 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
  - Вес более старшего разряда в 10 раз больше.
  - Переполнение разряда наступает, когда его значение становится больше 9 (т.е. больше основания = 10).


Системы счисления,
используемые на компьютере
Двоичная
Троичная
Восьме
ричная
Шестна
дцатери
чная
Цифры:
0,1.
Цифры:
0,1,2.
Цифры:
0,1,2,3,
4,5,6,7.
Цифры:
0,1,2,3
4,5,6,7
8,9,A,B
C,D,F.

Двоичная система счисления

- Алфавит две цифры: 0, 1.
  - Вес более старшего разряда в 2 раза больше.
  - Переполнение разряда наступает, когда его значение становится больше 1 (т.е. больше основания = 2).

«Есть 10 типов людей – одни понимают двоичную систему исчисления, а вторые нет»

Тетрады 2-чной системы

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	10
0011	3	1011	11
0100	4	1100	12
0101	5	1101	13
0110	6	1110	14
0111	7	1111	15

Тетрады 2-чной системы

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	10
0011	3	1011	11
0100	4	1100	12
0101	5	1101	13
0110	6	1110	14
0111	7	1111	15

Представление данных в ЭВМ

- Для хранения каждой отдельной цифры применяется **триггер**, представляющий собой электронную схему.

Он может находится в 2-х состояниях, одно из которых соответствует нулю, другое — единице.

- Для запоминания отдельного числа используется **регистр** — группа триггеров, число которых соответствует количеству разрядов в двоичном числе.

Представление данных в ЭВМ

- Число, содержащееся в регистре — **машинное слово.**
- Арифметические и логические операции со словами осуществляет **арифметико-логическое устройство** (АЛУ).

Для упрощения доступа к регистрам их нумеруют.

- Номер называется **адресом регистра**.

Например,

если необходимо сложить 2 числа — достаточно указать номера ячеек (регистров), в которых они находятся, а не сами числа.

Это часто применяется в программировании…

Адреса записываются в 8- и 16-ричной системах, поскольку переход от них к двоичной системе и обратно осуществляется достаточно просто.

16-ричная система счисления

- Алфавит 16 символов:
0, 1, …, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
  - Вес более старшего разряда в 16 раз больше.
  - Переполнение разряда наступает, когда его значение становится больше F (т.е. 16).

Формы представления чисел

Любое число A в позиционной С/С с основанием p может быть представлено в виде полинома от основания p:

$$A = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_{0(p)} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$$

здесь A – *число,*

a_i – *значение i-того разряда числа,*

p – основание системы счисления.

Свернутая форма

Развернутая форма

875465$_{(\ldots}$ … $0^3 + 4 \cdot 1$

10011101$_{(2)}$ = $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$

Перевод из одних систем счисления в другие

Общий принцип 1:

чтобы перевести число в некоторую систему счисления с основанием М (цифрами 0, ..., М-1), *иначе говоря, в М-ичную систему счисления,* нужно представить его в виде:

$$\boldsymbol{A = a_n * M^n + a_{n-1} * M^{n-1} + \ldots + a_1 * M + a_0.}$$

a_i - цифры числа, из соответствующего диапазона,
a_n - первая цифра,
a_0 - последняя.

Перевод из одних систем счисления в другие

Общий принцип 2:

Если основание одной системы - степень другого *(например, 2 и 16)*, то перевод можно делать на основании таблиц.

Теорема:

Если $\mathbf{P=Q^n}$ (P,Q,n – целые положительные числа, при этом P и Q — основания С/С), то запись любого числа в смешанной (P-Q)-ой системе счисления тождественно совпадает с записью этого же числа в системе счисления с основанием Q.

Следствие теоремы:
Правила перевода между системами P и Q

- Для перевода из Q-й в P-ю, необходимо число в Q-й системе, разбить на группы по n цифр, начиная с правой цифры, и каждую группу заменить одной цифрой в P-й системе.

- Для перевода из P-й в Q-ю, необходимо каждую цифру числа в P-й системе перевести в Q-ю и заполнить недостающие разряды ведущими нулями, за исключением левого, так, чтобы каждое число в системе с основанием Q состояло из n цифр

если **$P=Q^n$**

Пример

2 -> 16 :

т.е. ***16 = 2*** ^{4} , то собираем с конца двоичного числа <u>четверки</u> чисел («тетрады»), каждая четверка – одна из цифр в 16-ричной С/С. Результат записываем в свернутой форме.

16 -> 2 :

наоборот. Создаем двоичные четверки по таблице и записываем результат в свернутой форме (*и не забывайте незначащие 0 в «тетрадах»!!!*).

Пример: перевод из двоичной системы счисления в восьмеричную

Возьмем двоичное число, **10011110_2**

разобьем его справа налево на группы по 3 цифры («триады»), <u>010</u> <u>011</u> <u>110</u>

по таблице переведем «триады» в восьмеричные цифры, 2_8 3_8 6_8

записываем свернутую форму полученного числа … **236_8**

Перевод в десятичную систему счисления

Перевод целого числа из *М*-ичной системы счисления в десятичную осуществляется путем представления числа в виде степенного ряда с основанием ***М***, то есть число записывается в развернутой форме.

Затем подсчитывается значение суммы ряда, при этом все арифметические действия осуществляются уже в десятичной системе.

Перевод в десятичную С/С

Вычисляем

$$A_{(10)} = a_n * M^n + a_{n-1} * M^{n-1} + \dots + a_1 * M^1 + a_0$$

где M - старое основание.

Вычисления идут в новой системе счисления!

Например: из (2) в (10)

5 4 3 2 1 0

$\mathbf{100101}_{(2)} =$

$1*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 32+4+1 = \mathbf{37}_{(10)}$

Примеры:

- *Перевести* **10101101** $_{(2)} \to X_{10}$

$10101101_{(2)}=1*2^7+0*2^6+1*2^5+0*2^4+1*2^3+1*2^2+0*2+1 =$

Ответ: **173** $_{10}$

- *Перевести* ***703*** $_{(8)} \to X_{10}$

$703_8 =7*8^2+0*8^1+3*8^0 = \ldots$

Ответ: ***451*** $_{10}$

- Перевести **B2E** $_{(16)} \to X_{10}$

$B2E_{16} = 11*16^2+2*16^1+14*16^0 =$

Ответ: **2862** $_{10}$

Пример: перевод из двоичной в восьмеричную

Возьмем двоичное число: $\mathbf{10011110_2}$,

разобьем его справа налево на группы по 3 цифры («триады»): 010 011 110

умножим каждый разряд на 2^n (где n — номер разряда):
$010\ 011\ 110 = (0*2^2+1*2^1+0*2^0)\ (0*2^2+1*2^1+1*2^0)\ (1*2^2+1*2^1+0*2^0) = 236_8$.

Получим: $10011110_2 = 236_8$.

Схема ГОРНЕРА

позволяет минимизировать арифметические операции и исключить возведение в степень.

$$(a_n a_{n\text{-}1} a_{n\text{-}2} \ldots a_1 a_0)_p = (\ldots(a_n \cdot p + a_{n\text{-}1}) \cdot p + a_{n\text{-}2}) \cdot p + \ldots) + a_1) \cdot p + a_0.$$

Алгоритм:

старшую цифру умножаем на основание, добавляем вторую цифру, результат умножаем на основание, добавляем третью цифру и так до тех пор, пока не прибавим последнюю цифру. Результатом будет десятичная запись числа.

Пример:

а) Перевести $10101101_2 \rightarrow X_{10}$.

$10101101_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$

$= ((((((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = 173_{10}$

Ответ: $10101101_2 = 173_{10}$.

б) Перевести $703_8 \rightarrow X_{10}$.

$703_8 = (7 \cdot 8 + 0) \cdot 8 + 3 = 451_{10}$

Ответ: $703_8 = 451_{10}$.

в) Перевести $B2E_{16} \rightarrow X_{10}$.

$B2E_{16} = (11 \cdot 16 + 2) \cdot 16 + 14 = 2862_{10}$.

Ответ: $B2E_{16} = 2862_{10}$.

Перевод из десятичной системы счисления

Чтобы найти такое представление, необходимо:

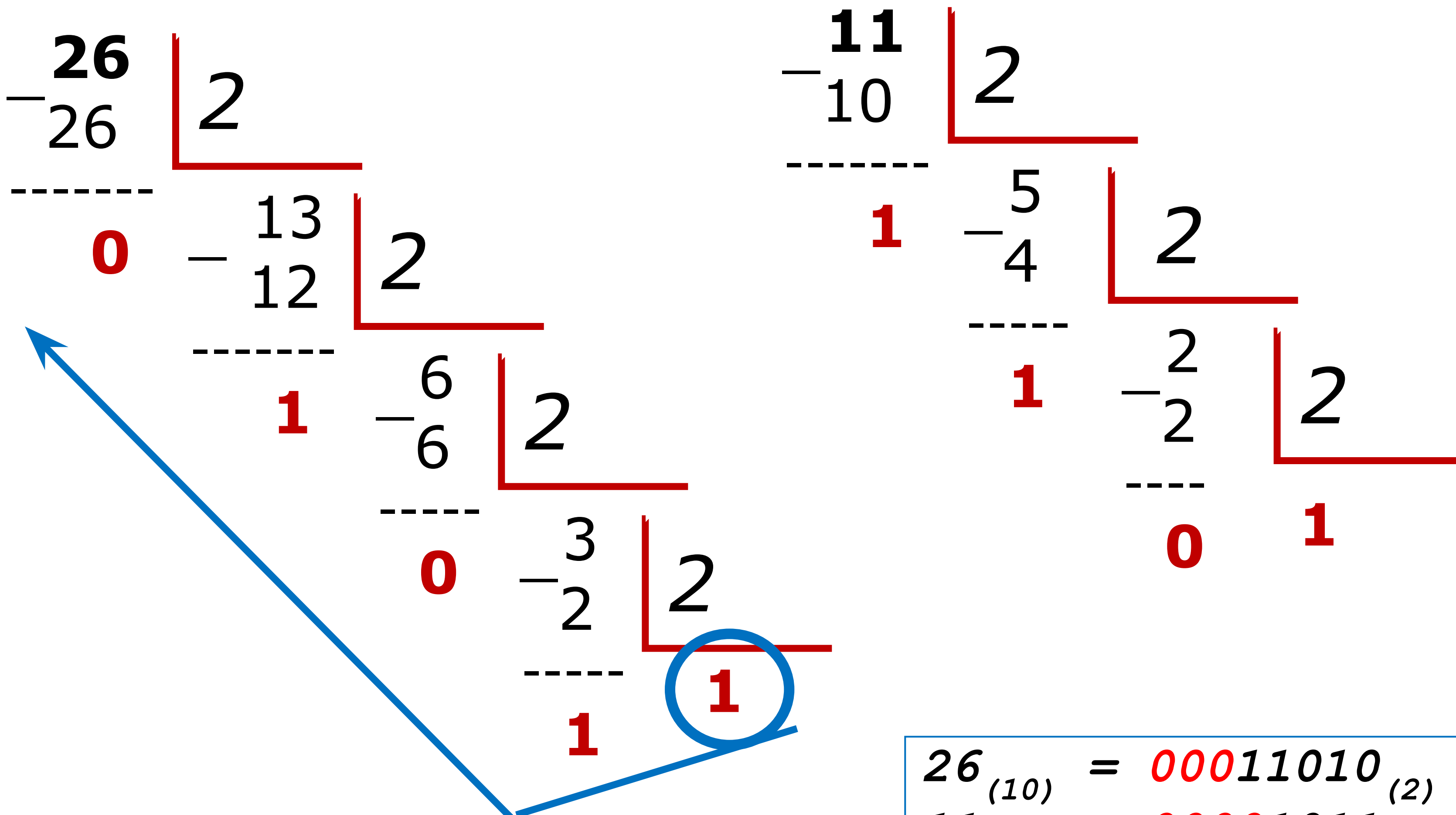
1. разделить число нацело на М (основание С/С, в которую переводим), остаток – цифра a_0 (значение младшего разряда).

2. взять частное и проделать с ним шаг 1, остаток будет a_1 и т.д.

Деление продолжают до тех пор, пока частное не станет меньше делителя, т.е. основания С/С, в которую переводим.

Значение последнего частного будет старшим разрядом.

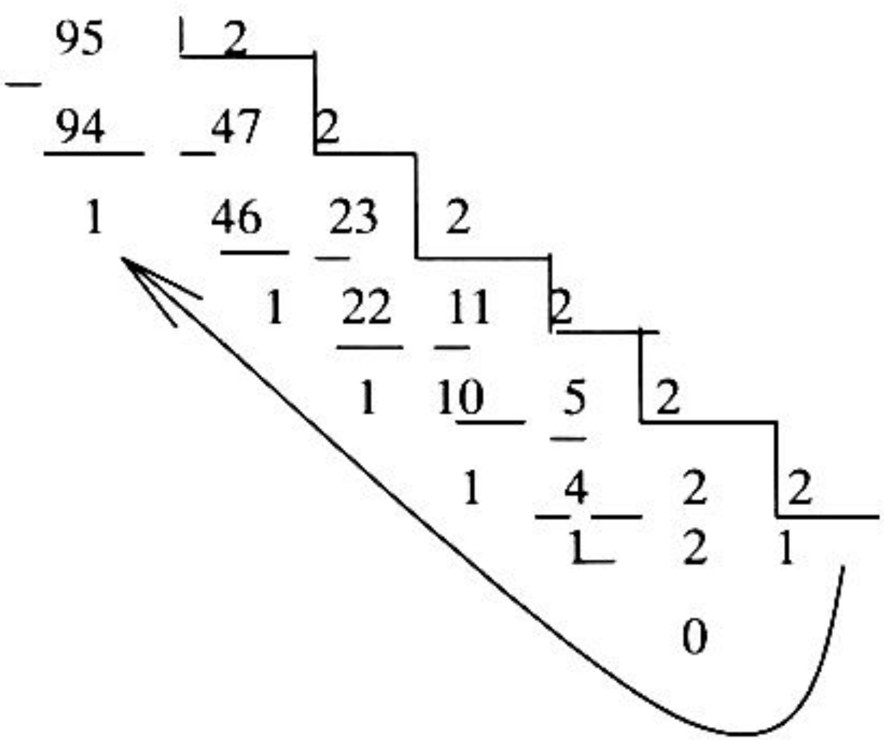
Пример: $26_{(10)} \rightarrow X_{(2)}$, $11_{(10)} \rightarrow Y_{(2)}$???



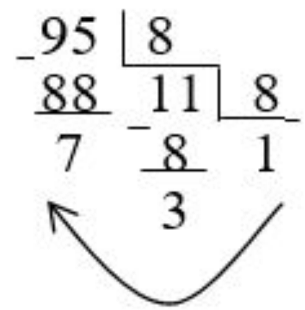
$26_{(10)}$ = 00011010$_{(2)}$

$11_{(10)}$ = 00001011$_{(2)}$

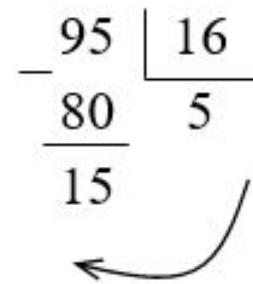
Пример: $95_{(10)} \rightarrow X_{(2)} \rightarrow Y_{(8)} \rightarrow Z_{(16)}$?



$95_{10} \Rightarrow 1011111_2$



$95_{10} \Rightarrow 137_8$



$95_{10} = 5F_{16}$

Пример: Требуется перевести число $\mathbf{139}_{(10)}$ в 2-ную, 8-ную, 4-ную С/С.

1) 139/2 -> 69/ 34/ 17/ 8/ 4/ 2/ 1 / 0 – частное,

   1 1 0 1 0 0 0 1 – остаток.

   $\mathbf{10001011}_2 = 1*2^7+1*2^3+1*2^1+1*2^0 = \mathbf{139}_{10}$

2) 139/8 = 17, остаток 3, 17/8 = 2, остаток 1,
   2/8 = 0, остаток 2.

   $\mathbf{213}_8 = 2*8^2+1*8^1+3*8^0 = 128+8+3 = \mathbf{139}_{10}$

3) 139/4 = 34, остаток 3, 34/4 = 8, остаток 2,

   8/4 = 2, остаток 0, 2/4 = 0, остаток 2.

   $\mathbf{2023}_4 = 2*4^3+2*4^1+3*4^0 = 128+8+3 = \mathbf{139}_{10}$

Перевод дробей

Перевод правильной дроби из десятичной С/С в *Р*-ичную осуществляется последовательным умножением на основание той системы, в которую осуществляется перевод.

Умножение выполняется **до тех пор, пока**:

- или дробная часть произведения не станет равной нулю,
- или не будет достигнута требуемая точность,
- или не выделится период.

При этом умножаются только дробные части.

Дробь в новой С/С записывается в виде последовательности целых частей произведений, начиная с первого.

Примеры перевода правильной десятичной дроби **0.36:**

а) в двоичную **б) в восьмеричную** **в) в шестнадцатеричную**

$$\begin{array}{r} *0{,}36 \\ \underline{2} \\ *0.72 \\ \underline{2} \\ *1.44 \\ \underline{2} \\ *0.88 \\ \underline{2} \\ 1.76 \end{array}$$

$0.36 \Rightarrow 0.0101_2$

$$\begin{array}{r} *0{,}36 \\ \underline{8} \\ *2.88 \\ \underline{8} \\ *7.04 \\ \underline{8} \\ *0.32 \\ \underline{8} \\ 2.56 \end{array}$$

$0.36 \Rightarrow 0.2702_8$

$$\begin{array}{r} *0{,}36 \\ \underline{16} \\ *5.76 \\ \underline{16} \\ 12.16 \\ \underline{16} \\ *2.56 \\ \underline{16} \\ 8.96 \end{array}$$

$0.36 \Rightarrow 0{,}5C28_{10}$

Примеры:

а) *Перевести* $03125_{10} \to X_8$.

0	3125 × 8
2	5000 × 8
4	0000

Ответ: $0.3125_{10} = 0.24_8$.

б) *Перевести* $0.65_{10} \to X_2$.

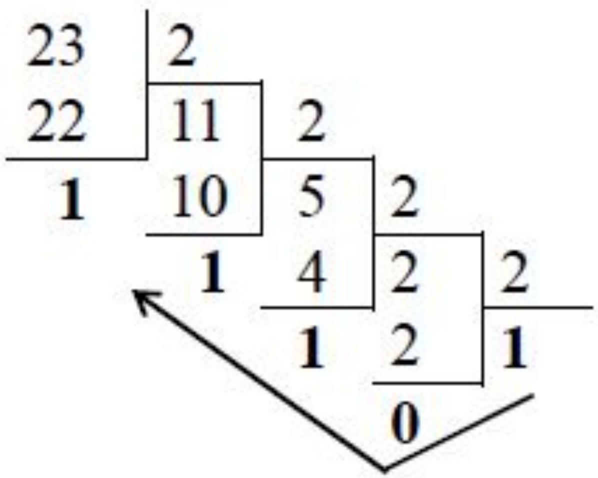
0	65 × 2
1	3 × 2
0	6 × 2
1	2 × 2
0	4 × 2
0	8 × 2
1	6 × 2

...

Ответ: $0.65_{10} \approx 0.10(1001)_2$.

Перевести $23.125_{10} \rightarrow X_2$

1) Переведем целую часть:



2) Переведем дробную часть:

0	125×2
0	25×2
0	5×2
1	0

Таким образом $23_{10} = 10111_2$; $0.125_{10} = 0.001_2$.

Ответ: $23.125_{10} = 10111.001_2$.

Преобразование дроби из любой системы счисления в десятичную

Преобразование осуществляется также, как и для целых частей, за исключением того, что цифры числа умножаются на основание в отрицательной степени («-n», где n начинается от 1).

Пример:

101,011 $_{(2)}$ =

$= (1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0)$ **+** $(0*2^{-1} + 1*2^{-2} + 1*2^{-3}) =$

$= (5)$ **+** $(0 + 0,25 + 0,125) =$ **5,375** $_{(10)}$

Пример перевода дробей в 10 с/с

Перевести $1001101.1101_2 \rightarrow X_{10}$.

$$1001101.1101_2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} = 77.8125_{10}$$

Ответ: $1001101.1101_2 = 77.8125_{10}$.

Замечания:

- Целые числа остаются целыми, а правильные дроби – правильными в любой системе счисления.

- Конечной десятичной дроби в другой системе счисления может соответствовать бесконечная (иногда периодическая) дробь.

  В этом случае количество знаков в представлении дроби в новой системе берется *в зависимости от требуемой точности*.

Перевод из восьмеричной в шестнадцатеричную систему и обратно осуществляется через двоичную систему

(с помощью триад и тетрад)

$$F4F{,}88_{(16)} = 1111\ 0100\ 1111,\ 1000\ 1000_{(2)} =$$

$$111\ 101\ 001\ 111,\ 100\ 010_{(2)} = 7517{,}42_{(8)}$$

Двоичная система счисления широко используется в информатике и вычислительной технике, поэтому полезным оказывается знание первых шестнадцати степеней двойки:

$2^3 = 8$; $2^7 = 128$; $2^{11} = 2048$; $2^{15} = 32\,768$;

$2^4 = 16$; $\boxed{2^8 = 256}$; $2^{12} = 4096$; $2^{16} = 65\,536$.

$2^5 = 32$; $2^9 = 512$; $2^{13} = 8192$;

$2^6 = 64$; $2^{10} = 1024$; $2^{14} = 16\,384$;

Задачка

- Учитель утверждает, что в его классе 100 учеников, при этом их них 32 мальчика и 24 девочки.

Возможно ли такое?

Пусть X – основание системы счисления

$100 = X^2$

$32 = 3*x+2$

$24 = 2*x+4$

X*X - 5*X – 6 = 0; X = ?

Ответ: ДА, в *шестеричной* с/с !

двоично-десятичная система

- В такой системе каждая десятичная цифра кодируется определенной комбинацией цифр двоичной системы.
- Обозначение каждой десятичной цифры называется ***тетрадой***.

Примеры:

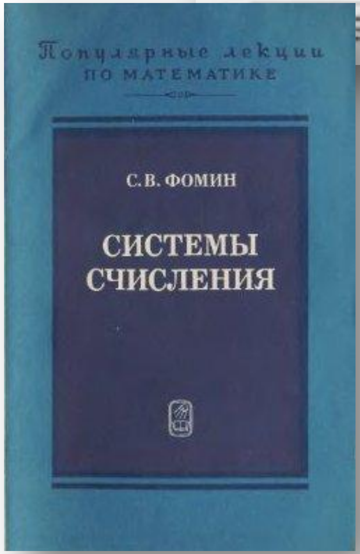
$125_{10} = 0001\ \ 0010\ \ 0101_{2\text{-}10}$ (3 тетрады)

0000 = 0	0100 = 4	1000 = 8
0001 = 1	0101 = 5	1001 = 9
0010 = 2	0110 = 6	
0011 = 3	0111 = 7	

Литература для самостоятельной работы

- Гашков С.Б. **Системы счисления и их применение**. Серия: Библиотека «Математическое просвещение». // М.: МЦНМО, 2004. - 52 с.: ил.

- Фомин С. В. **Системы счисления.** Серия «Популярны лекции по математике», выпуск 40. // М.: Наука, 1987. - 48 с.



Задачи для программирования:

- Циклические сдвиги http://www.e-olymp.com/ru/problems/27
- А + В в двоичной с/с http://www.e-olymp.com/ru/problems/1001
- Римские числа http://www.e-olymp.com/ru/problems/7
- Единицы http://www.e-olymp.com/ru/problems/622
- Коды Грея http://www.e-olymp.com/ru/problems/1780
- Системы счисления http://www.e-olymp.com/ru/problems/1008
- Какая система счисления?
  http://www.e-olymp.com/ru/problems/1377

http://www.e-olymp.com/