

КИНЕМАТИКА

Кинематика твердого тела

Задачи кинематики твердого тела

1) задание движения и определение кинематических характеристик тела в целом

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела

Виды движения твердого тела

Поступательное

Вращательное

Простейшие
виды движения

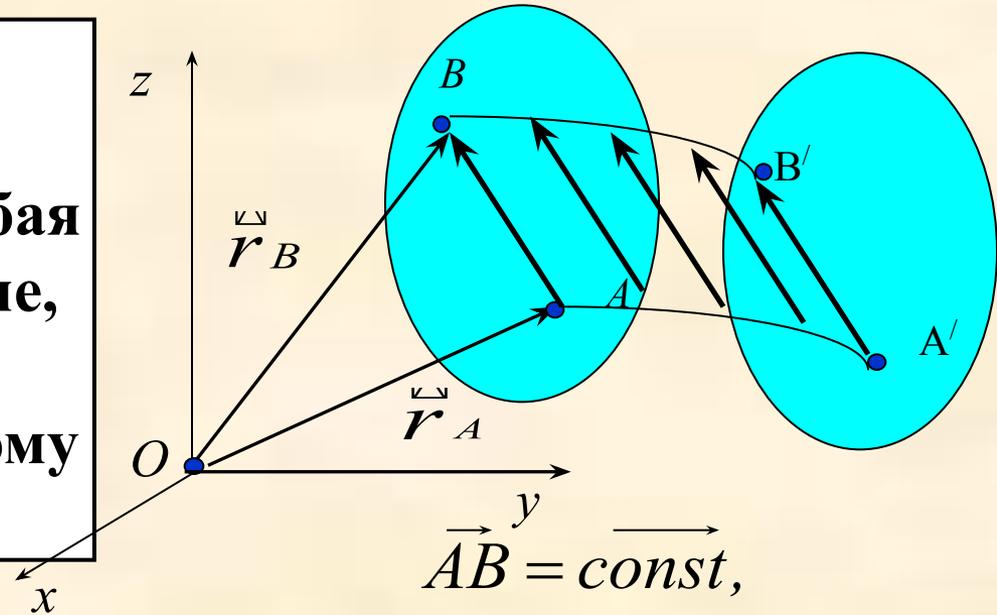
Плоскопараллельное
(плоское)

Сферическое

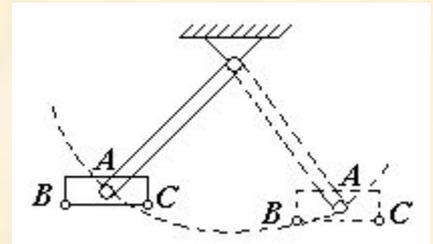
Движение
свободного
твердого тела

Поступательное движение твердого тела

Опр. Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.



Поступательное движение твердого тела не следует путать с прямолинейным движением.



Теорема. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения, то есть:

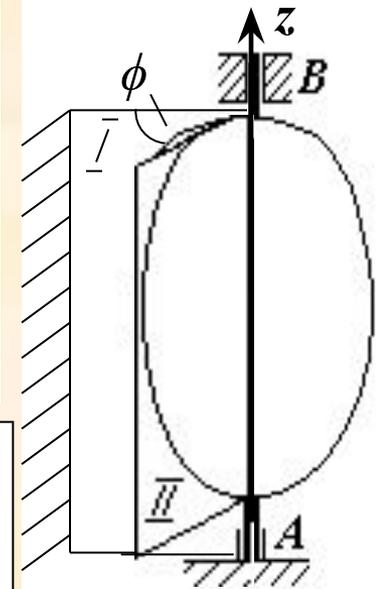
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}.$$

Вывод. Поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость \vec{V} называют *скоростью поступательного движения тела*, а ускорение \vec{a} - *ускорением поступательного движения тела*.

Вращательное движение твердого тела

Опр. Вращательным движением тела называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются во время движения неподвижными.



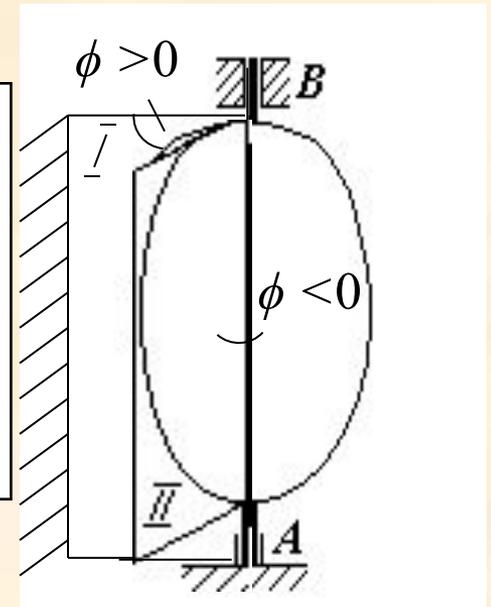
Опр. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения*.

Опр. Угол ϕ между полуплоскостями I и II , определяющий положение вращающегося тела, называется *углом поворота*.

Угол ϕ измеряется *в радианах*.

$\phi > 0$, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки и

$\phi < 0$ - если по ходу часовой стрелки.



Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: $\phi = \phi(t)$.

Кинематические характеристики (угловая скорость и угловое ускорение) вращающегося тела

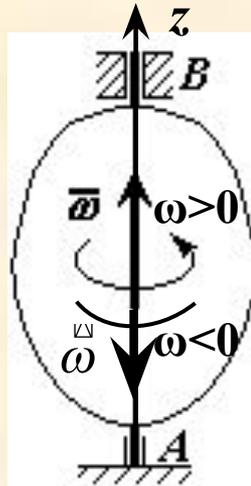
Угловая скорость.

Опр. Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота тела ϕ , называется угловой скоростью ω тела.

Вывод. Угловая скорость ω определяется по формуле $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$. (1)

Если вращение происходит против хода часовой стрелки, то $\omega > 0$, если по ходу - , то $\omega < 0$.

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.



$$[\omega] = 1/c = c^{-1}.$$

Угловое ускорение.

Опр. Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости ω , называется угловым ускорением ε тела.

Вывод. Угловое ускорение определяется по формуле

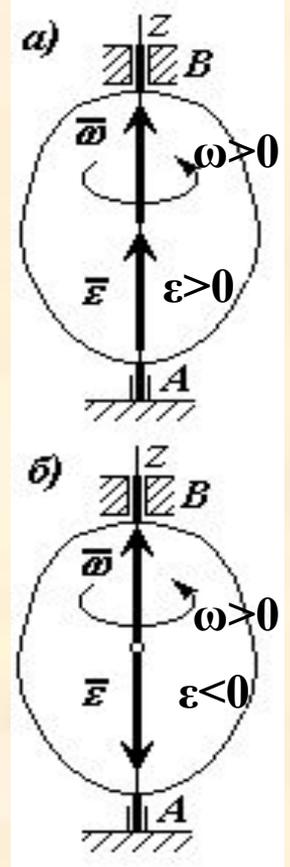
$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2)$$

Размерность $[\varepsilon] = 1/c^2 = c^{-2}$.

Опр. Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение называется ускоренным (модуль ω возрастает), если знаки разные, то замедленным (модуль ω убывает).

Угловое ускорение можно изобразить в виде вектора $\underline{\varepsilon}$, модуль которого равен $|\underline{\varepsilon}|$, и который направлен вдоль оси вращения тела.

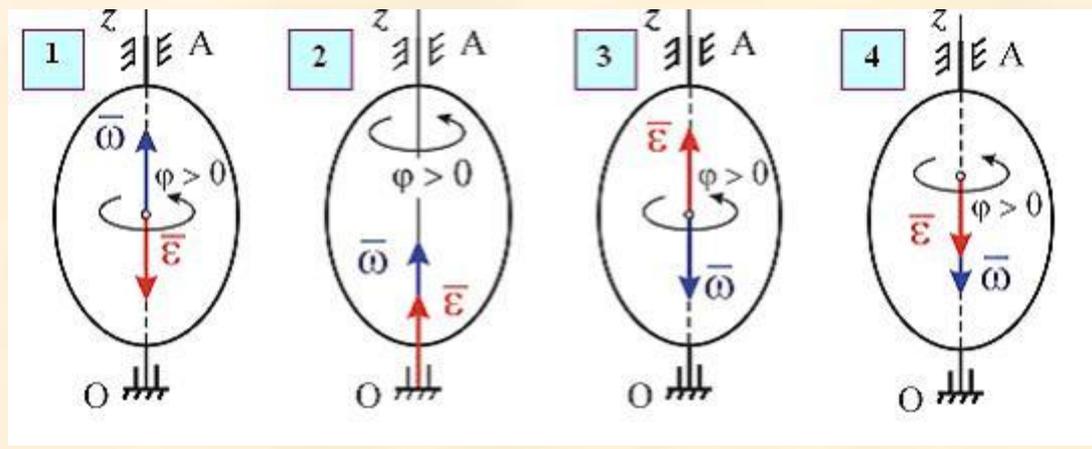
Если вращение ускоренное, то векторы $\underline{\omega}$ и $\underline{\varepsilon}$ направлены в одну сторону (рис. *a*), если замедленное, то - в противоположные стороны (рис. *б*).



ЗАДАНИЕ № 7

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси согласно уравнению $\varphi = 3t - 2t^2$, где φ - угол поворота тела в радианах.

В момент $t = 0,5$ с угловая скорость и угловое ускорение тела направлены, как указано на рисунке ...



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1

(введите ответ)

Обоснование ответа. $\omega = \dot{\varphi} = 3 - 4t \Big|_{t=0,5} = 1 \text{ с}^{-1} > 0.$
 $\varepsilon = \ddot{\varphi} = -4 < 0.$

Частные случаи вращения тела

Равномерное вращение

Опр. Вращение тела называется равномерным, если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = const$).

Вывод. Закон равномерного вращения имеет вид:

$$\phi = \phi_0 + \omega t.$$

При $\phi_0 = 0$ вид: $\phi = \omega t$ или $\omega = \phi / t$.

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту - n об/мин.

Связь между ω и n вытекает из закона равномерного вращения и имеет вид: $\omega = 2\pi \cdot n/60 \approx 0,1 \cdot n$.

Равнопеременное вращение

Опр. Вращение тела называется равнопеременным, если угловое ускорение тела остается во все время движения постоянным ($\varepsilon = const$).

Вывод. Закон равнопеременного вращения имеет вид:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \varepsilon \cdot t^2/2,$$

Закон изменения угловой скорости имеет вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

Опр. Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные – равнозамедленным.

Кинематические характеристики точек вращающегося тела

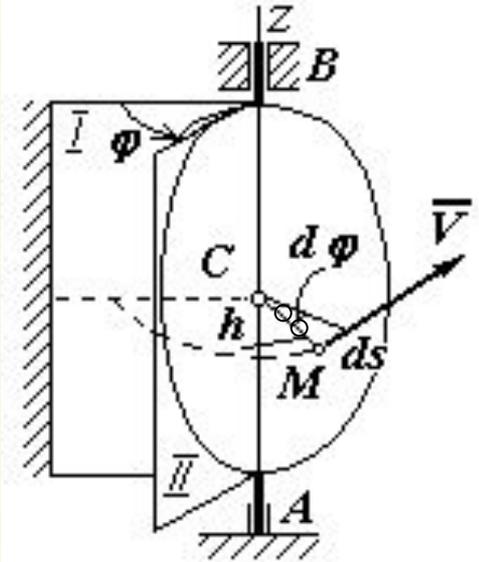
Скорость точек вращающегося тела

Опр. Скорость точки вращающегося тела называется линейной скоростью.

Вывод. Численное значение скорости точки M вращающегося тела равно произведению угловой скорости ω тела на расстояние от этой точки до оси вращения h , то есть:

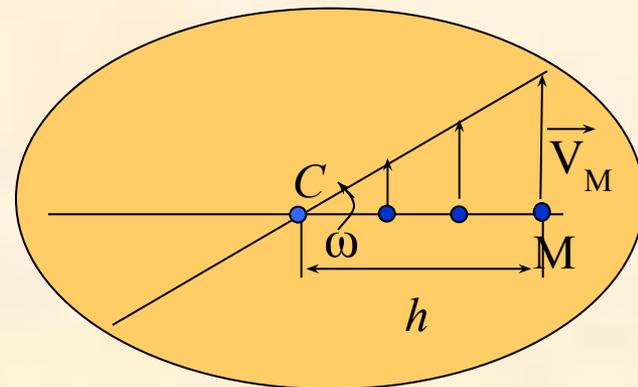
$$\underline{V_M = \omega \cdot CM = \omega \cdot h.}$$

Вектор скорости точки вращающегося тела M направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела или перпендикулярно отрезку, соединяющему ось вращения и точку M .



Свойство скоростей точек

Скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения, то есть чем дальше точка находится от оси, тем больше ее скорость.

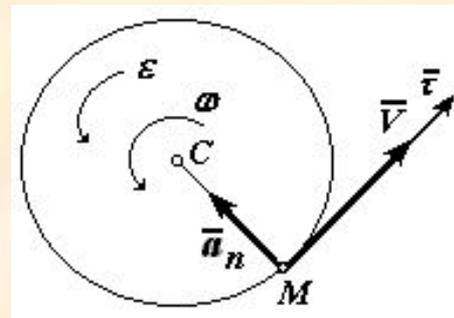


Ускорение точек вращающегося тела

Полное ускорение точки $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. (3)

Вектор \vec{a}_n направлен по главной нормали (при вращательном движении направлена по радиусу окружности).

Модуль a_n определяется по формуле $a_n = V^2/\rho$.



Учитывая формулу (1) и, что $\rho = h$, получим $\underline{a_n = \omega^2 \cdot h}$. (4)

Алгебраическое значение касательного ускорения находится по формуле

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \varepsilon \cdot h. \quad (5)$$

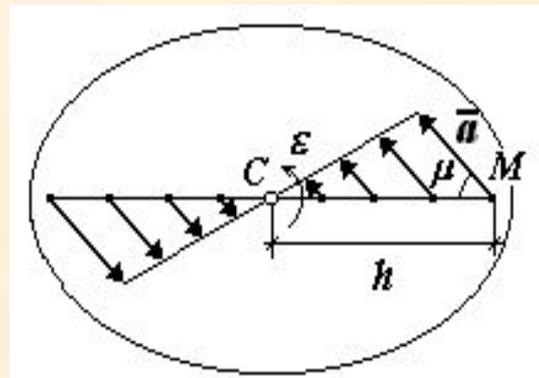
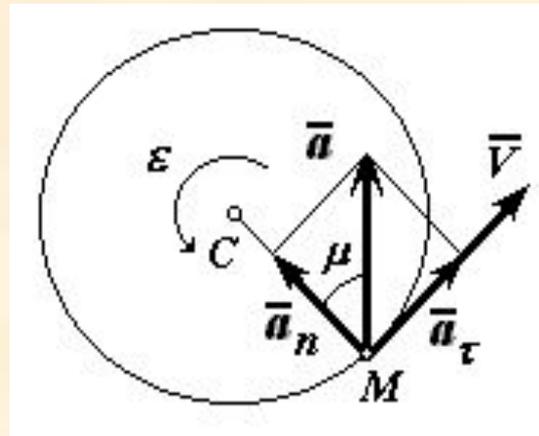
Вектор \vec{a}_{τ} направлен по касательной, то есть \perp к радиусу окружности.

Модуль полного ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} = h \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (6)$$

Направление полного ускорения

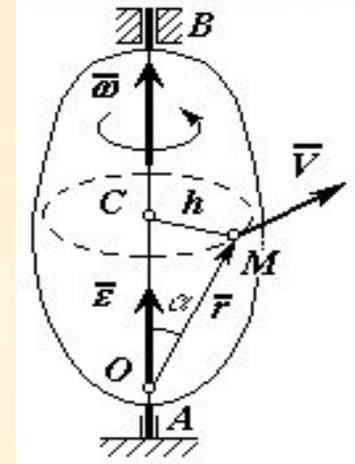
$$\operatorname{tg} \mu = |a_{\tau}| / a_n = |\varepsilon| / \omega^2. \quad (7)$$



Представление векторов скорости и ускорения точки в виде векторного произведения

Вывод а). Вектор скорости точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, то есть:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

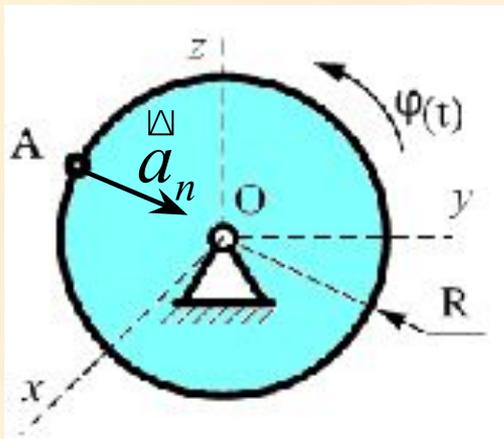


Вывод б). Каждый из составляющих векторов вектора ускорения точки вращающегося тела $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ равен векторному произведению:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}.$$

ЗАДАНИЕ № 8

Диск радиуса $R = 10$ см вращается вокруг оси Ox по закону
 $\varphi = 2 + t^3$ рад.



Нормальное ускорение точки A в момент времени $t = 2$ с равно

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) 360 см/с^2

2) 1000 см/с^2

3) 1440 см/с^2

4) 1600 см/с^2

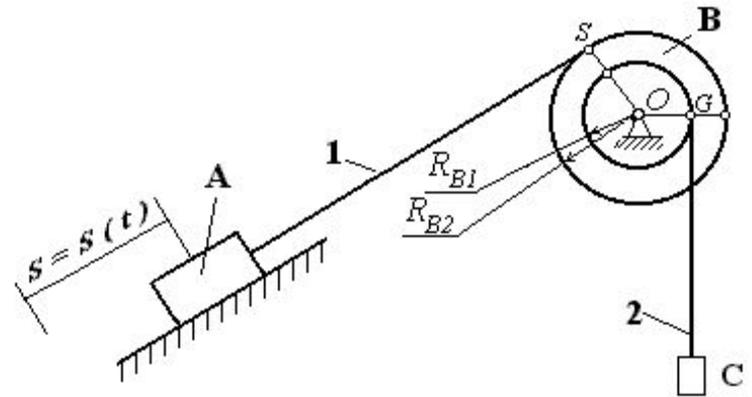
Обоснование ответа: $\omega = \dot{\varphi} = 3t^2 \Big|_{t=2} = 12 \text{ с}^{-1}$;
 $a_n = \omega^2 R = 1440 \text{ см/с}^2$.

Пример решения задачи на вращательное движение

Нить 1 сходит со ступенчатого шкива В в точке S, а верхний конец нити 2 – в точке G.

К нижнему концу нити 2 подвешен груз С. Тело А движется по закону

$$s = \sin(\pi \cdot t/3) \text{ м.}$$



Определить в момент времени $\tau = 1 \text{ с.}$ направление и величину скорости и ускорения груза С.

В расчетах принять: $R_{B1} = r$, $R_{B2} = 2 \cdot r$.

Решение.

1. Выберем систему, движение которой будем рассматривать: грузы А и С; нити 1 и 2; ступенчатый шкив В.

2. Определим вид движения, в котором находится каждое тело системы:

- грузы А и С, нити 1 и 2 совершают поступательное движение;
- шкив В находится во вращательном движении.

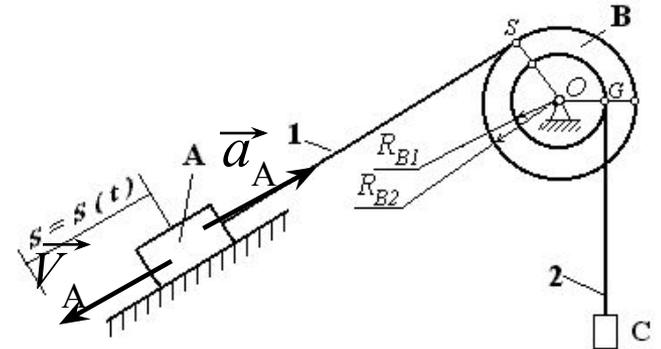
3. Определим скорость и ускорение груза А.

$$V_A = \dot{s} = \pi/3 \cos(\pi \cdot t/3) \Big|_{\text{при } t=1} = \pi/6 \text{ м/с.}$$

Так как $V_A > 0$, то вектор скорости будет направлен вниз по наклонной плоскости (в сторону возрастания s).

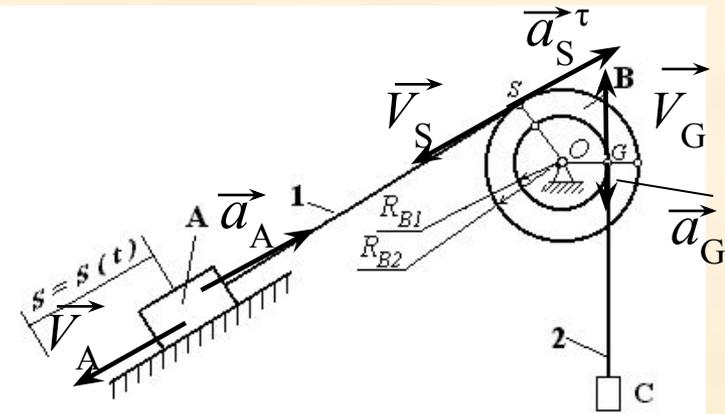
$$a_A = \ddot{s} = -\pi^2/9 \sin(\pi \cdot t/3) \Big|_{\text{при } t=1} = -\pi^2 \sqrt{3}/18 \text{ м/с}^2.$$

Так как $a_A < 0$, то вектор ускорения будет направлен в сторону противоположную вектору скорости.



4. Определим скорость и ускорение точки S шкива B .

Так как нить 1 находится в поступательном движении то скорости и ускорения всех точек нити равны по величине и направлению, то есть $V_S = V_A$ и $a_S^\tau = a_A$.



5. Определим скорость и ускорение точки G шкива B .

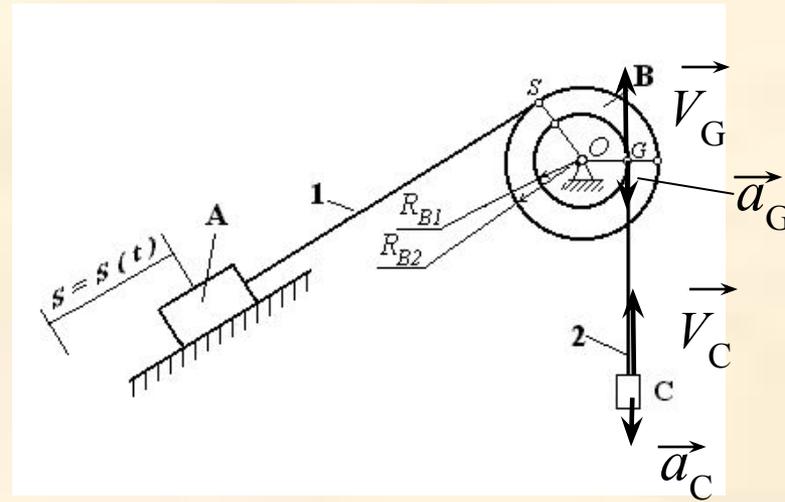
Так как точка G находится в два раза ближе к оси вращения, чем точка S , то $V_G = V_S / 2 = \pi / 12$ м/с, а $a_G^\tau = a_S^\tau / 2 = -\pi^2 \sqrt{3} / 36$ м/с².

Направления показано на рисунке.

6. Определим скорость и ускорение груза С.

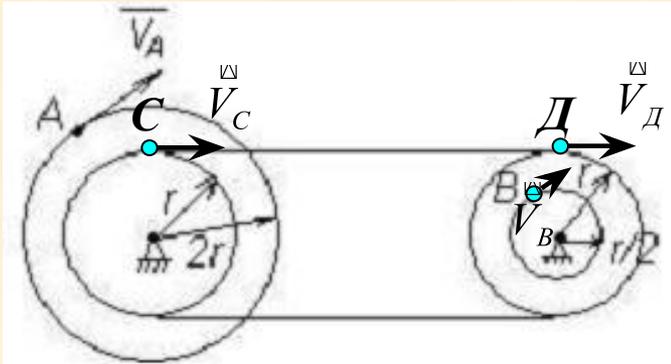
Так как нить 2 находится в поступательном движении, то скорости и ускорения всех точек нити равны по величине и направлению, то есть $V_C = V_G$ и $a_C = a_G$.

Ответ. $V_C = \pi / 12$ м/с, $a_C = - \pi^2 \sqrt{3} / 36$ м/с².



ЗАДАНИЕ № 8

Два шкива соединены ременной передачей. Точка A одного из шкивов имеет скорость $V_A = 20$ см/с. Скорость точки B другого шкива в этом случае равна ..



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $V_B = 20$ см/с

2) $V_B = 5$ см/с

3) $V_B = 40$ см/с

4) $V_B = 10$ см/с

Обоснование ответа. $V_C = V_A / 2 = 10$ см/с.

$V_D = V_C = 10$ см/с.

$V_B = V_D / 2 = 5$ см/с.

ЗАДАНИЕ № 9

Тело движется так, что в любой момент времени направления скоростей и ускорений его точек совпадают. В этом случае справедливо утверждение, что тело...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) движется поступательно, прямолинейно, ускоренно

2) движется поступательно, криволинейно, ускоренно

3) ускоренно вращается вокруг неподвижной оси

4) движется поступательно по окружности

Ответ вытекает из теоремы о скоростях и ускорениях точек тела, движущегося поступательно.

