Раздел V. Дифференциальное исчисление

Теоремы Ролля

Теорема Лагранжа

Правило Лопиталя

Теорема Ролля

Теорема Ролля. (О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения)

Пусть функция $y = f(x)$

- непрерывна на отрезке $[a;b]$;
- дифференцируема на интервале $(a;b)$;
- на концах отрезка $[a;b]$ принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ найдется, по крайней мере, одна точка x_0 в которой $f'(x_0) = 0$

Следствие. (Геометрический смысл теоремы Ролля)

- Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

Следствие.

- Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется, хотя бы один, нуль производной

Пример 1. Покажем, что функция $f(x)=x-x^3$ на отрезке $[-1;0]$ удовлетворяет теореме Ролля, и найдем соответствующее значение **c**.

Решение: 1) функция $f(x)=x-x^3$ непрерывна и дифференцируема на заданном интервале $[-1;0]$;

2) $f(-1)=f(0)=0$ значит, на отрезке $[-1;0]$ теорема Ролля применима для данной функции.

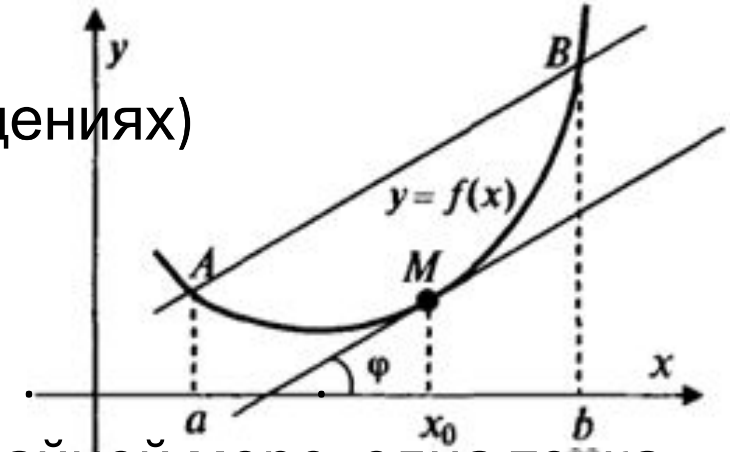
3) Для нахождения **c** составим уравнение: $f'(x)=1-3x^2=0$

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$c=x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Теорема Лагранжа



Теорема Лагранжа. (О конечных приращениях)

Пусть функция $y = f(x)$

- непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- дифференцируема на интервале $(a; b)$.

Тогда на интервале $[a; b]$ найдется, по крайней мере, одна точка x_0 такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа, когда

$$f(a) = f(b)$$

Следствие. (Геометрический смысл теоремы Лагранжа)

На кривой $y = f(x)$ между точками ***a*** и ***b*** найдется точка $M(x_0; f(x_0))$ такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную хорде AB (см.рис.).

Формулой Лагранжа может быть переписана в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Пример 2. Проверим выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x - x^3$ на отрезке $[-2;1]$ и найдем соответствующее значение **с**.

Решение: 1) Функция $f(x) = x - x^3$ непрерывна и дифференцируема на заданном интервале, поэтому теорема Лагранжа применима.

2) Найдем $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{0-6}{3} = -2$; $f'(x) = 1 - 3x^2$

3) Составим уравнение: $1 - 3x^2 = -2$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

4) Отрезку $[-2;1]$ принадлежит x_1 , значит, $c = x_1 = -1$.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя очень широко применяется для **вычисления пределов**, когда имеет место неопределенность вида (0/0), (∞/∞).

К этим видам неопределенностей сводятся неопределенности (0·∞) и (∞-∞).

Формулировка :

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle\, или \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$, и

если функции *f(x)* и *g(x)* – дифференцируемы в окрестности точки x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

В случае, когда неопределенность не исчезает после применения правила Лопиталя, то его можно применять вновь.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{x\cdot\cos(x)}$, используя правило Лопиталя

Решение. Подставляем значение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{x\cdot\cos(x)}=\frac{\sin^2(3\cdot 0)}{0\cdot\cos(0)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пределы с неопределенностью данного типа можно находить по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{x\cdot\cos(x)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2(3x)\right)'}{\left(x\cdot\cos(x)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(3x)\left(\sin(3x)\right)'}{x'\cdot\cos(x)+x\cdot\left(\cos(x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(3x)\cos(3x)}{\cos(x)-x\cdot\sin(x)}=$$

$$=\frac{6\sin(3\cdot 0)\cos(3\cdot 0)}{\cos(0)-0\cdot\sin(0)}=\frac{0}{1}=0$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{x\cdot\cos(x)}=0$