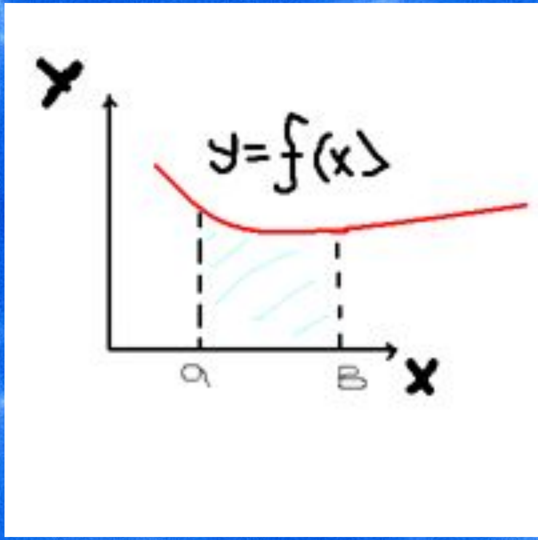
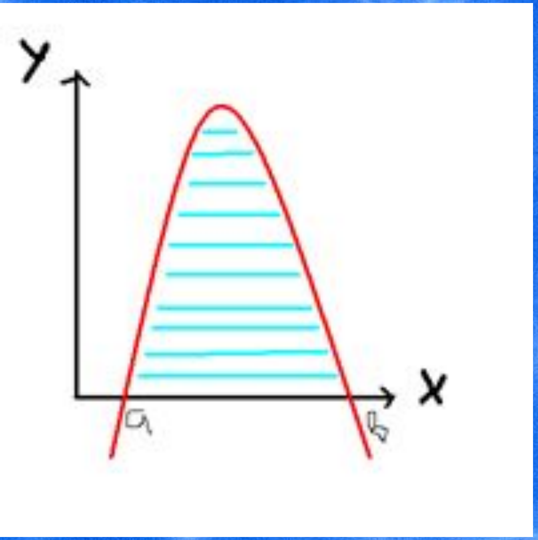
Презентация по теме: «Интегральные исчисления»

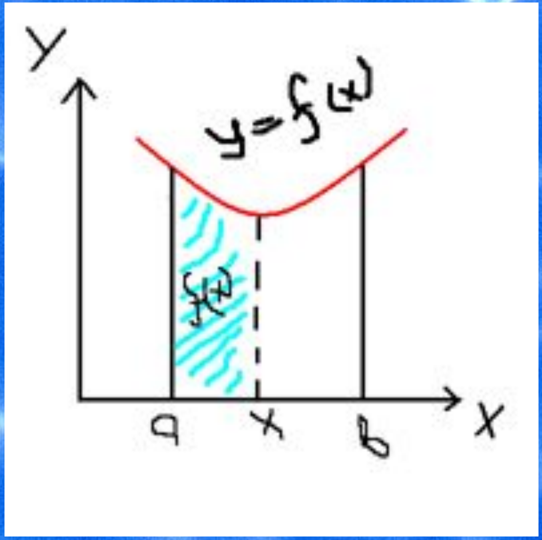
Криволинейная трапеция

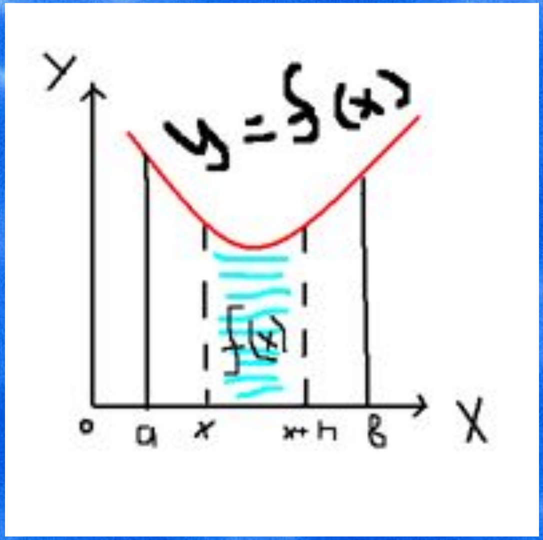
- Фигура, ограниченная снизу осью абсцисс, сверху графиком функции, а по бокам прямыми x=a x=b, называется криволинейной трапецией

Примеры криволинейных трапеций









Теорема Ньютона-Лейбница

- Пусть функция f неотрицательна, непрерывна на отрезке [a;b] и имеет на нём конечное число экстремумов. Обозначим через S(x) площадь криволинейной трапеции, расположенной над отрезком от [a;x], где x принадлежит отрезку [a;b], ограниченной сверху графиком функции. Тогда S(x) является первообразной для f(x), т.е:

$$S'(x)=f(x)$$

Определённый интеграл

- Разность значений первообразной для функции f в точках a и b называют определённым интегралом от a до b и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

История интеграла

- Символ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. (Действительно, операция интегрирования “восстанавливает” функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно происхождение слова интеграл иное: слово integer означает целый. В ходе переписки И. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же , в 1696г., появилось и название новой ветви математики - интегральное исчисление (calculus integralis), которое ввел И. Бернулли. Другие известные вам термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились значительно позднее. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее “примитивная функция”, которое ввел Лагранж (1797 г.).

Методы интегрирования

- Табличное
- Замена переменной
- Геометрическая интерпретация
- Интегрирование по частям

Таблица интегрирования

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ x \neq -1$.
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right) + C$.
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

Интегрирование по частям

- Интегрирование по частям — один из способов вычисления интеграла, состоящий в представлении интеграла от выражения вида u(x)dv(x) через интеграл от v(x)du(x). Для определенного интеграла формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x)$$

Аналогом этой формулы для неопределенного интеграла является соотношение

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Замена переменной

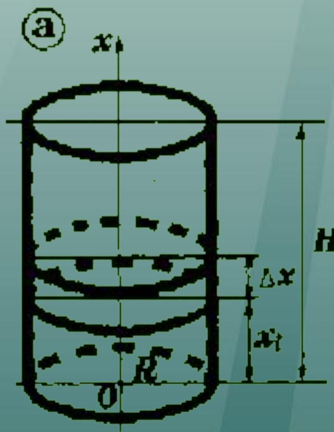
- Сущность интегрирования методом замены переменной (способ подстановки) заключается в преобразовании интеграла ∫f(x)dx в интеграл ∫F(u)du, который легко вычисляется по какой - либо из основных формул интегрирования.

$$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 4+5x^4;\, dt = 20x^3dx,\;\; x^3dx = \frac{1}{20}dt \\ \text{при}\;\; x = 0 \;\; \text{находим}\; t = 4 \\ \text{при}\;\; x = 1 \;\; \text{находим}\; t = 9 \end{array}\right] = \frac{1}{20}\int_4^9 t^{\frac{1}{2}}dt =$$

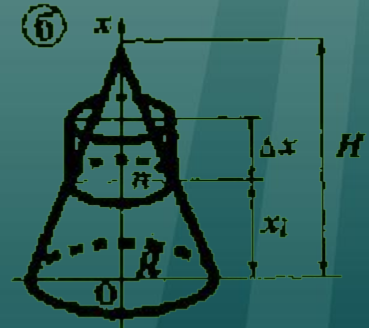
$$= \frac{1}{20}\cdot\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_4^9 = \frac{1}{20}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3}\Big|_4^9 = \frac{1}{30}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{4^3}\right) = \frac{3^3-2^3}{30} = \frac{19}{30} \approx 0{,}63$$

Применение интеграла

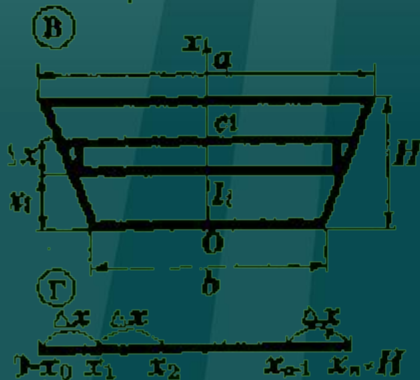
ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА В ФИЗИКЕ



ВОДА ПОДАЕТСЯ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ В ДНЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ БАК ВЫСОТЫ H И РАДИУСА R. НАЙДИТЕ ЗАТРАЧЕННУЮ ПРИ ЭТОМ РАБОТУ.



НАЙДИТЕ ЦЕНТР МАСС ОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА.



КАНАЛ В РАЗРЕЗЕ ИМЕЕТ ФОРМУ РАВНОБОЧНОЙ ТРАПЕЦИИ С ВЫСОТОЙ H И ОСНОВАНИЯМИ a И b. НАЙДИТЕ СИЛУ, С КОТОРОЙ ВОДА, ЗАПОЛНЯЮЩАЯ КАНАЛ, ДАВИТ НА ПЛОТИНУ.

Свойства определённого интеграла

$$\int_a^b A dx = A \cdot x \Big|_a^b = A \cdot (b-a)$$

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ , } c \in (a, b)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ если } f(x) - \text{нечетная функция}$$

$$\int_a^b f_1(x) dx \ge \int_a^b f_2(x) dx \text{ , } \quad \text{если} \quad f_1(x) \ge f_2(x) > 0 \quad \text{на} \quad [a, b]$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx \text{ , если } f(x) - \text{четная функция}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \le \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{при} \quad a < b$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Ученые, внесшие вклад в развитие интеграла

1646-1716. Великий немецкий учёный. Философ, математик, физик, юрист, языковед. Создатель (наряду с Ньютоном) математического анализа. Основоположник большой математической школы. Идеи Лейбница оказали значительное влияние на развитие математической логики.

Готфрид Лейбниц

hacker

Исаак Ньютон

Пьер Ферма

1601-1665. Французский математик, один из создателей аналитической геометрии и дифференциального исчисления. Открыл правило нахождения экстремума с помощью производной. Автор многих теорем теорий чисел. Знаменитая теорема Ферма из теории чисел , которую Ферма сформулировал без доказательства, не доказана до сих пор.

Жозеф Луи Лагранж

Жозеф-Луи, 1736-1813, знаменитый французский математик. С 1766 по 1787 был в Берлине директором Академии, с 1787 в Париже принимал участие в установлении метрической системы. Первоклассные труды в разных областях математики.

- Над презентацией работали
- Шапошников Георгий,
- Чебыкина Юлия,
- Ерохин Иван,
- Абдулаев Эльдар
- Силкин Александр
- Учитель математики-Зайцева Г.А.
- 2006 - 2007 учебный год