

Объем наклонной призмы

Цели урока.

- вывести формулу объёма наклонной призмы с помощью интеграла;
- показать применение полученной формулы для решения задач;
- сформировать навык по нахождению объёма наклонной призмы.

Объем наклонной призмы

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту

1. Треугольная призма

имеет S основания и высоту h .

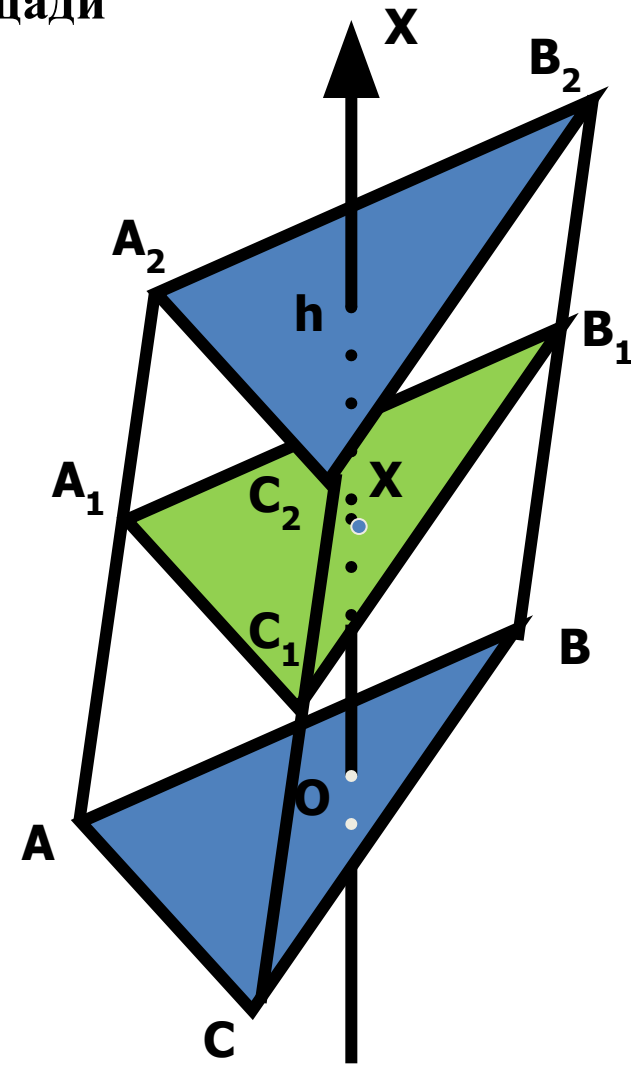
$O = OX \cap (ABC)$; $OX \perp (ABC)$; $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$;

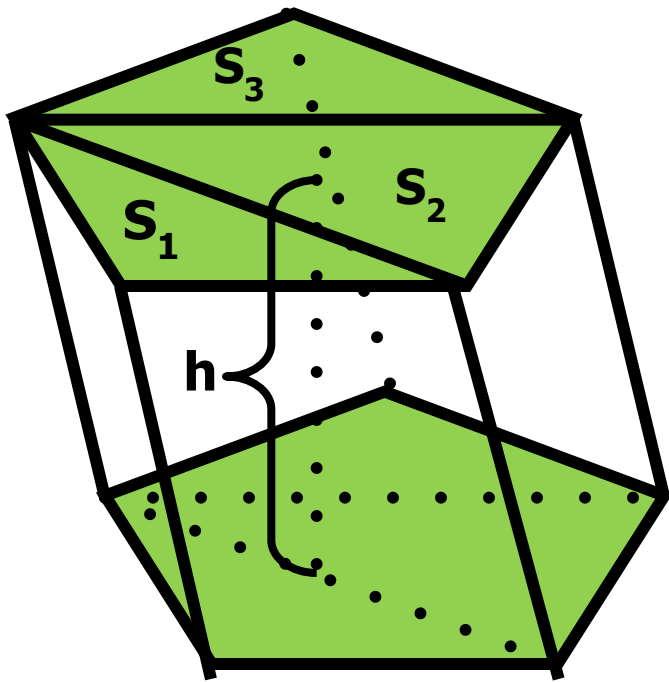
$(A_1B_1C_1)$ -плоскость сечения: $(A_1B_1C_1) \perp OX$

$S(x)$ -площадь сечения; $S = S(x)$, т.к.

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (AA_1C_1C -параллелограмм $\rightarrow AC = A_1C_1, BC = B_1C_1, AB = A_1B_1$)

$$v = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = Sx \Big|_0^h = S * h$$





2. Наклонная призма с многоугольником в основании

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 = \\ &= S_1 * h + S_2 * h + S_3 * h = \\ &= h(S_1 + S_2 + S_3) = S * h \end{aligned}$$

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ребру сечения

№ 676 Найти объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10см, 10см, 12см, а боковое ребро равно 8см, составляет с плоскостью основания угол 60°

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - наклонная прямая призма. $\angle B_1BK = 60^{\circ}$, $BC = 10$ см, $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, $BB_1 = 8$ см.

Найти: $V_{\text{призмы}} = ?$

Решение:

$$V = S_{ABC} \cdot h, \quad S_{\text{осн.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ - формула Герона}$$

$$S_{\text{осн.}} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6} = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

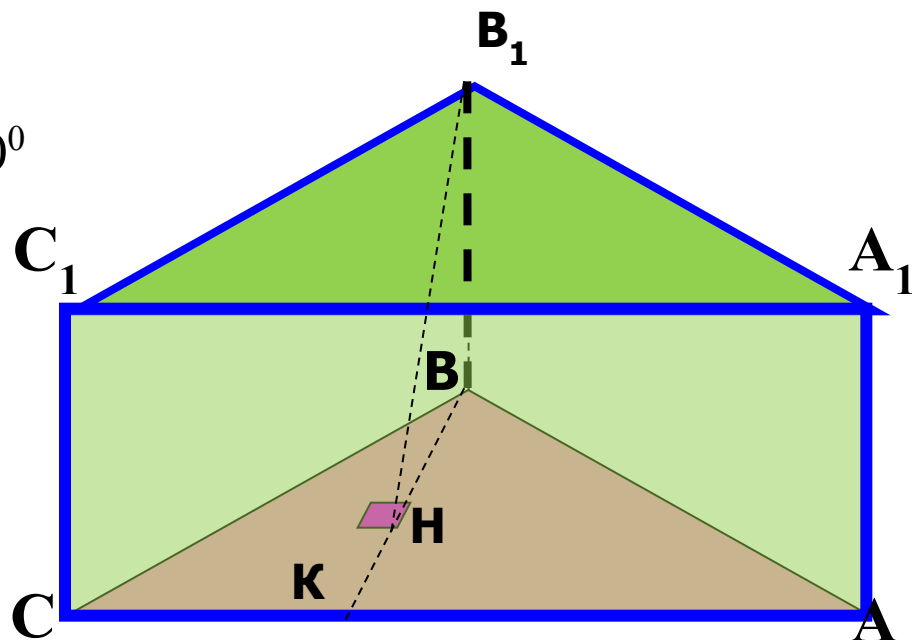
Треугольник BB_1H - прямоугольный,

так как B_1H - высота $B_1H = BB_1 \cdot \cos 60^{\circ}$

$$B_1H = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$V = 4\sqrt{3} \cdot 48 = 192\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $V_{\text{пр.}} = 192\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$



№ 680 Основанием наклонной призмы является прямоугольный треугольник со сторонами a и b . Боковые ребра длины c составляет со смежными сторонами основания углы, равные β . Найти объем призмы?

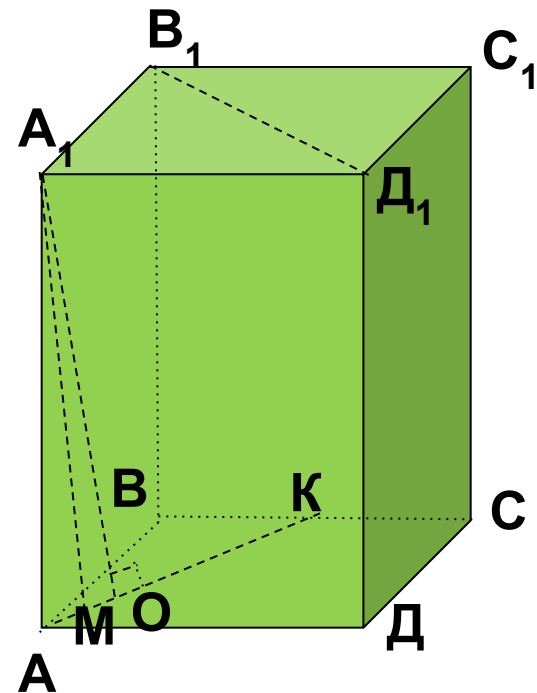
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ -призма, $ABCD$ -прямоугольник, $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \beta$

Найти: $V_{\text{призмы}} = ?$

Решение:

1. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$ значит точка A_1 проецируется на биссектрису $\angle A$, $A_1O \perp (ABC)$, AO -биссектриса $\angle A$
2. Так как $A_1O \perp (ABC)$, $OM \perp AD$ (OM -проекция, A_1M -наклонная) отсюда следует, $A_1M \perp AD$
3. Треугольник AA_1M -прямоугольный, $AM = c \cdot \cos \beta$
4. Треугольник AOM -прямоугольный, $AO = \sqrt{2} \cdot AM$, $AO = \sqrt{2} \cdot c \cdot \cos \beta$
5. $A_1O = \sqrt{c^2 - 2c^2 \cdot \cos^2 \beta} = c \sqrt{1 - 2\cos^2 \beta} = c \sqrt{-\cos 2\beta}$.
6. $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\beta}$

Ответ : $V = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\beta}$



№682

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы, плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и их пересекающей.

Или $V_{\text{накл.пр.}} = S_{\text{ок.ребро}} \cdot S_{\text{сеч.}}$ перпендикулярного ему сечения (рис. 4).

Доказательство:

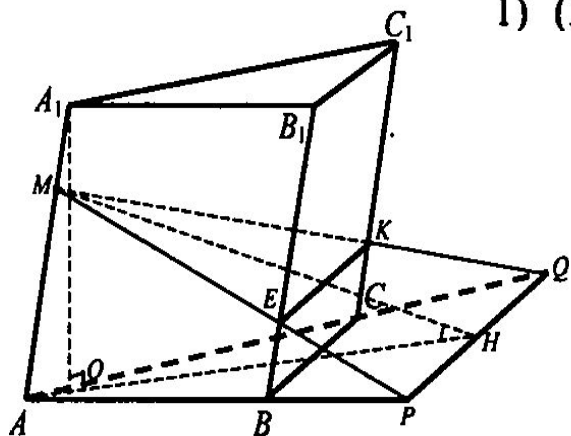


Рис. 4

— линейный угол двугранного угла $AQPM$. $\angle ANM = \varphi$, тогда $\angle MAN = 90^\circ - \varphi$.

5) $\triangle MEK$ — ортогональная проекция $\triangle ABC$ на плоскость перпендикулярного сечения.
 $S_{MEK} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$.

6) $(APQ) \perp (AMN)$, так как (APQ) проходит через PQ , перпендикулярно (AMN) .

1) (MEK) — плоскость перпендикулярного сечения призмы, (ABC) — плоскость основания. $(MEK) \cap (ABC)$ по прямой PQ .

$AA_1 \perp (MEK), \Rightarrow AA_1 \perp PQ$.

2) Проведем высоту A_1O — призмы, $A_1O \perp PQ$.

3) $\left. \begin{array}{l} PQ \perp AA_1 \\ PQ \perp A_1O \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \perp (OA_1A)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

4) $(AA_1O) \parallel PQ$ в точке H , $\angle ANM$

C_1

7) Из $\triangle AA_1O$: $A_1O = AA_1 \cdot \sin(90 - \varphi) = AA_1 \cdot \cos \varphi$.

8) $V = S_{ABC} \cdot A_1O = \frac{S_{MEK}}{\cos \varphi} \cdot AA_1 \cdot \cos \varphi = S_{MEK} \cdot AA_1$.

Что и требовалось доказать.

Произвольная призма состоит из треугольных призм, следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \sum_{i=1}^n S_i.$$

Подведение итогов урока.

- Напишите формулу для определения объёма наклонной призмы.

ЗАДАНИЕ НА ДОМ

№681,683