Объём прямоугольного параллелепипеда, призмы

Цель урока:

познакомиться с понятием объёма; рассмотреть свойства объёмов; теорему об объёме прямоугольного параллелепипеда и следствие о прямой призме, основани которой прямоугольный треугольник.

Понятие объёма

Объем – одна из основных величин, связанных с геометрическими телами.

Задача вычисления объемов простейших тел, идущая от практических потребностей, была одним из стимулов развития геометрии.

Математика Древнего Востока (Вавилония, Египет) располагала рядом правил для вычисления объема тел, с которыми чаще всего приходилось встречаться на практике (призматические брусья; пирамиды полные и усеченные; цилиндры).

Среди формул объема были и неточные, дававшие не слишком заметную процентную ошибку лишь в пределах употребительных линейных размеров тела.

Но в «Началах» Евклида и в сочинениях Архимеда имеются только точные правила для вычисления объемов многогранников и некоторых круглых тел (цилиндра, конуса, шара и их частей).

Понятие объёма

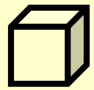
Чтобы найти объем сначала выбирают единицу измерения.

В Древнем Риме, например, одной из единиц объема служила амфора (около 25,5 л).

Нефть во всем мире принято сейчас измерять в англо-американских единицах – баррелях, т. е. бочках емкостью 159 л.

В России распространенная в быту мера объема – ведро.

Понятие объёма

За единицу измерения объёмов принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром ***1см*** *называют* ***кубическим сантиметром,*** *обозначают* ***см^3***. 

Аналогично определяются ***кубический метр (м^3)***, ***кубический миллиметр (мм^3).***

Свойства объёмов:

1. *Равные тела имеют равные объёмы.*
2. *Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.*
3. *Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.*

Следствие: Объём куба с ребром $\frac{1}{n}$ *равен* $\frac{1}{n^3}$

Теорема: *Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.*

$$V = abc$$

Дано: P – прямоугольный параллелепипед,

a, b, c – измерения,

V – объем

Доказать: $V = a \cdot b \cdot c$.

Доказательство:

I случай.

a, b, c – конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит *n* ($n \geq 1$).

$a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$, $c \cdot 10^n$ – являются целыми.

Разобьем ребра на равные части длины $\frac{1}{10^n}$.

Через точки разбиения проведем плоскости, перпендикулярные к этому ребру.

Параллелепипед разобьется на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$.

$$V_{куба} = \left(\frac{1}{10^n}\right)^3 = \frac{1}{10^{3n}}; \quad V_{параллелепипеда\ P} = abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc.$$

II случай: хотя бы одно из измерений *a, b, c* представляет собой бесконечную десятичную дробь.

Следствие 1:

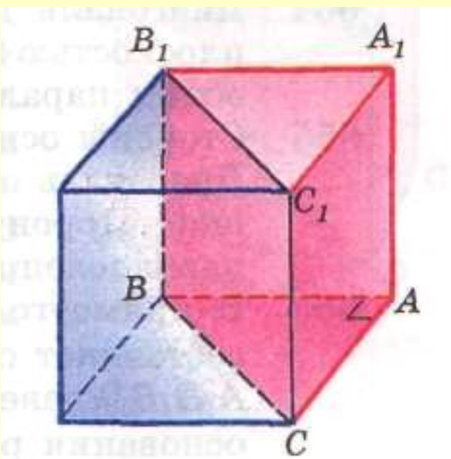
$V = abc$

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$V = \underbrace{a\cdot b}_{S}\cdot \underbrace{c}_{h} = S\cdot h.$$

Следствие 2:

Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма,

$\angle A = 90^\circ$

Доказать: $V = S_{ABC}\cdot h$

Доказательство:

Дополним прямую призму до прямоугольного параллелепипеда.

$V_{пар-да} = 2S_{ABC}\cdot h,$ где S_{ABC} – площадь ΔABC, h – высота призмы.

$$V = \frac{1}{2}\left(2S_{ABC}\cdot h\right) = S_{ABC}\cdot h$$

Почему?

647(б)

$$V_R = \frac{2}{3}V_1 + V_2$$

647

648

649(б)

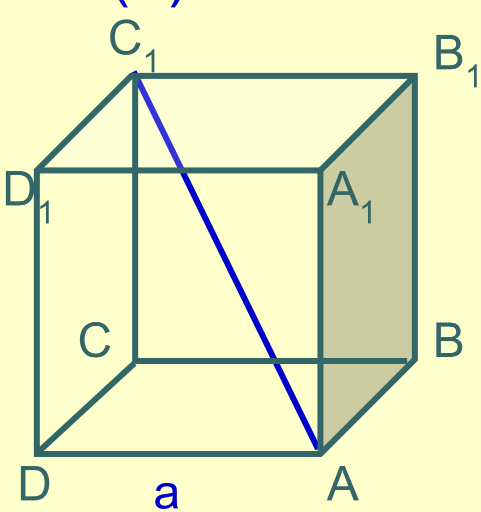
651

648(а, б) самостоятельно

$$а)V = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 1980;$$

$$б)V = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 10\sqrt{10} = 300.$$

649(б)



$$AC_1 = 3\sqrt{2}$$

$V = a^3$, *где a - ребро куба;*

$$AC_1 = a\sqrt{3};\ 3\sqrt{2} = a\sqrt{3};\quad a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6};$$

$$V = \left(\sqrt{6}\right)^3 = 6\sqrt{6}$$

Ответ $: 6\sqrt{6}.$

651

649(б)

651

653

$$m = \rho \cdot V$$

$$V = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950(см^3);$$

$$m = 1{,}8 \cdot 1950 = 3510(г) = 3{,}51(кг)$$

Ответ : 3,51 кг.

Домашнее задание

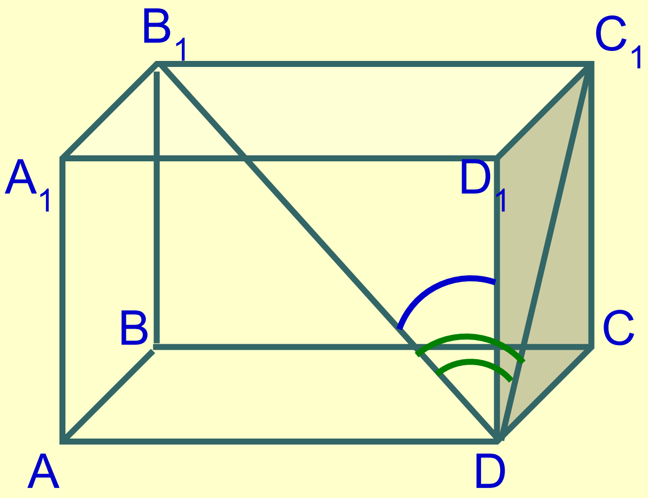
п. 74 – 75,

вопрос 1 на стр. 178

письменно: 649(а, в), 652

Решение задач

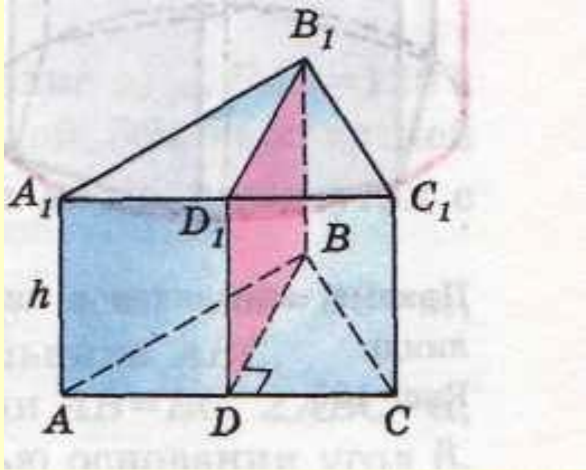
653



Объём прямой призмы

Теорема: Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая треугольная призма с объёмом V и высотой h.



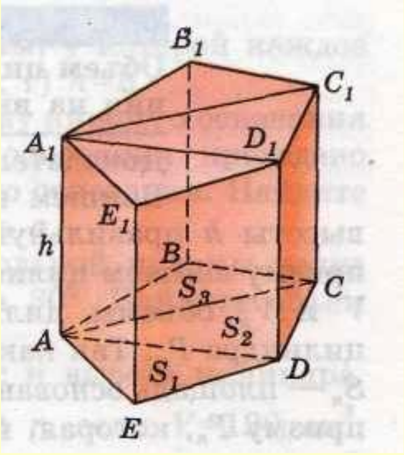
Проведём такую высоту треугольника ABC (BD), которая разделяет треугольник на два треугольника.

(BB_1D) разделяет данную призму на две призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC.

$$V_1 = S_{ABD}\cdot h;\quad V_2 = S_{BDC}\cdot h.\qquad V = V_1 + V_2,$$

$$V = S_{ABD}\cdot h + S_{BDC}\cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC})\cdot h.$$ т. е. $V = S_{ABC}\cdot h.$

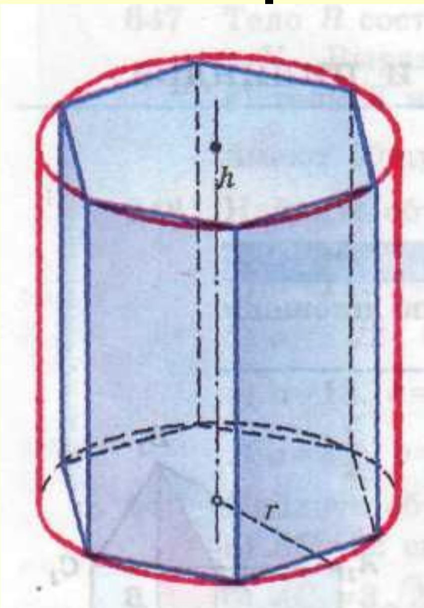
2. Произвольную призму разобьём на треугольные призмы с высотой h.



$$\boldsymbol{V = S_1\cdot h + S_2\cdot h + \ldots + S_n\cdot h = }$$
$$\boldsymbol{= (S_1 + S_2 \ldots + S_n)\cdot h = \quad S\cdot h}$$

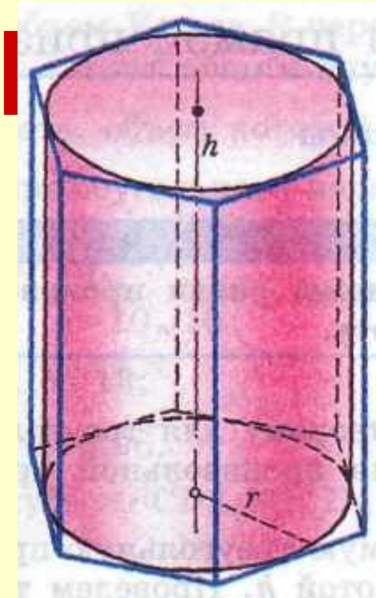
$$\boldsymbol{V = S\cdot h}$$

Объём цилиндр



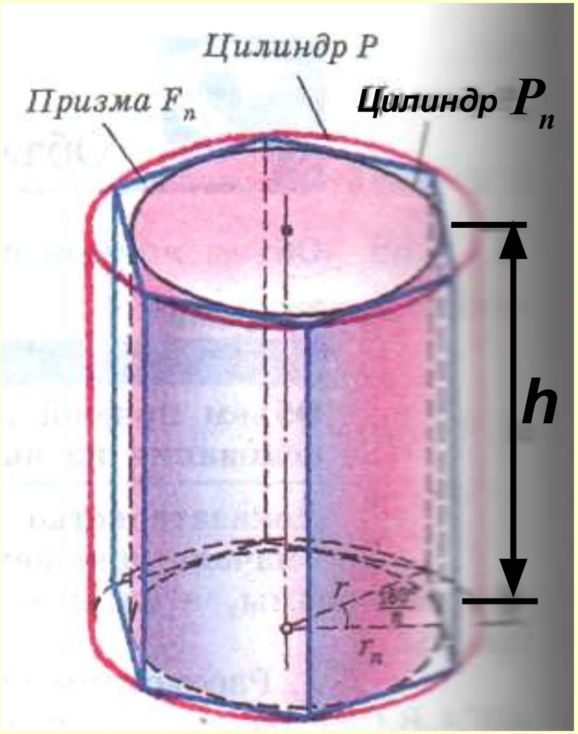
Призма **вписана в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра.

Призма **описана около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра.



Высота любой призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте самого цилиндра

Теорема: Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



Доказательство

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n–угольную призму F_n,
а в эту призму впишем цилиндр Pn.

Пусть ***V – объём цилиндра P, V_n – объем цилиндра P_n; r_n радиус цилиндра P_n.***

Так как объем призмы F_n равен ***$S_n \cdot h$****, где* ***S_n — площадь основания призмы****, а* ***цилиндр P содержит призму F_n, которая, в свою очередь, содержит цилиндр Pn,***
то ***$V_n < S_n \cdot h < V$. (2)***

Будем неограниченно увеличивать число n. При этом радиус r_n цилиндра P_n стремится к радиусу r цилиндра P

$$r_n = r\cos\frac{180°}{n} \to r,\ где\ n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi r^2.$$

Поэтому объём цилиндра Pn стремится к объёму цилиндра P: $\lim_{n\to\infty} V_n = V.$

Из неравенства ***(2)*** *следует, что* $\lim_{n\to\infty} S_n \cdot h = V.$ *Но* $\pi r^2 = S.$

Т.е. $V = \pi r^2 h.$

Итак, объём цилиндра равен: $V = S \cdot h$