

Лекция 2

1. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера
2. Вычисление функций с помощью степенных рядов
3. Многочленные приближения
4. Вычисление функций методом итераций

Вычисление значений различных математических функций иногда представляет собой самостоятельную задачу, а иногда необходимо при решении других задач. Функции, даже элементарные, не могут быть вычислены с помощью операций языка программирования, и поэтому вычисляются с помощью программ.

Некоторые элементарные функции (тригонометрические, логарифмические, гиперболические и ряд других) могут быть вычислены с помощью программ, входящих в состав систем программирования. Например, для вычисления функций при программировании на языке **Visual Basic** могут быть использованы многочисленные процедуры (методы) класса **System.Math**. Для использования этих функций в программе на **Visual Basic** необходимо в начале файла с программой поместить код **Imports System.Math**.

Еще большие возможности по вычислению функций дают математические пакеты прикладных программ (ППП), например, знакомые вам **MathCad** и **MatLab**. Но на практике может возникнуть необходимость вычисления функции, отсутствующей даже в ППП, а, следовательно, необходимость разработки собственной программы с использованием известных методов решения задачи. В любом случае необходимо знать методы вычисления различных функций и оценки вносимых ими погрешностей, чтобы грамотно

Вычисление значений многочлена. Постановка задачи

Пусть дан многочлен (полином) n -й степени:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

с действительными
коэффициентами

$$a_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

и пусть требуется найти значение
этого многочлена при $x = u$:

$$P_n(u) = a_0u^n + a_1u^{n-1} + \dots + a_{n-1}u + a_n$$

Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Вычисление эффективнее всего выполнять, используя лишь операции сложения и умножения. Пусть, например, $n = 7$. Тогда

$$P_7(u) = a_0 u^7 + a_1 u^6 + a_2 u^5 + a_3 u^4 + a_4 u^3 + a_5 u^2 + a_6 u + a_7$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$P_7(u) = (((((((a_0 u + a_1)u + a_2)u + a_3)u + a_4)u + a_5)u + a_6)u + a_7)$$

Тогда вычисление $P_7(u)$ требует выполнения следующей последовательности действий:

$$b_0 = a_0$$

$$c_1 = b_0 u$$

$$b_1 = a_1 + c_1$$

$$c_2 = b_1 u$$

$$b_2 = a_2 + c_2$$

$$c_3 = b_2 u$$

$$b_3 = a_3 + c_3$$

$$c_4 = b_3 u$$

$$b_4 = a_4 + c_4$$

$$c_5 = b_4 u$$

$$b_5 = a_5 + c_5$$

$$c_6 = b_5 u$$

$$b_6 = a_6 + c_6$$

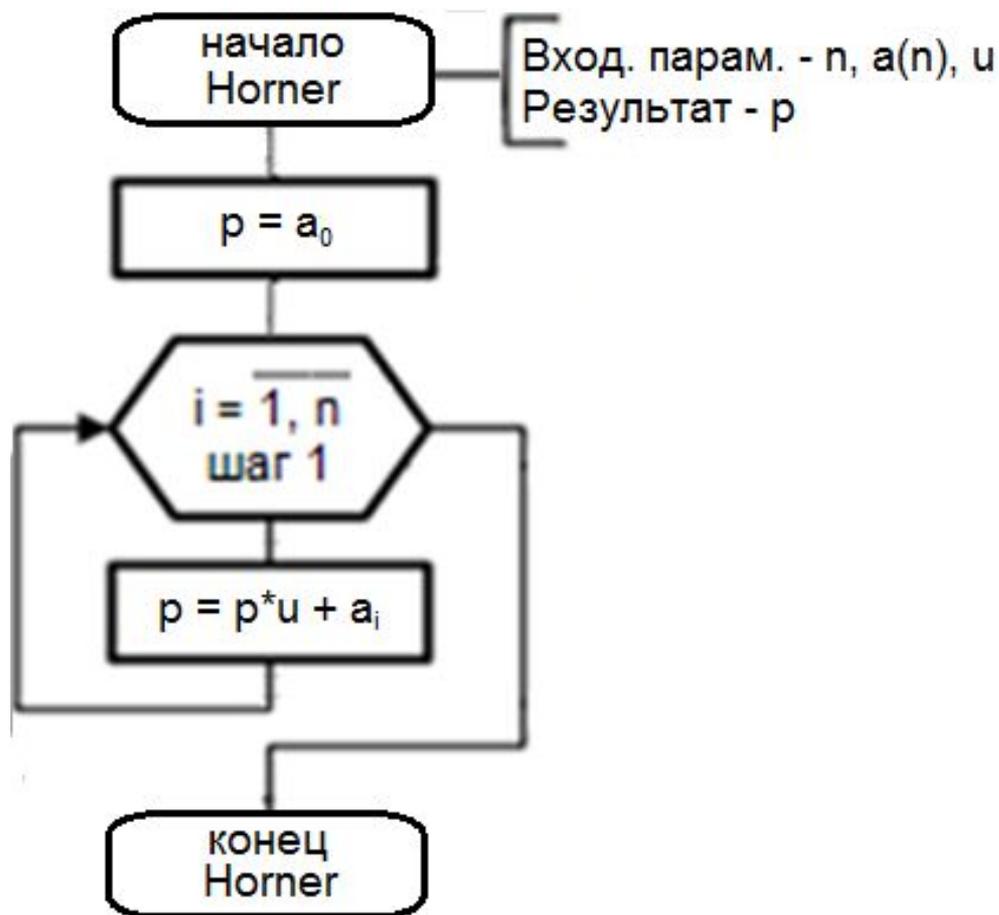
$$c_7 = b_6 u$$

$$b_7 = a_7 + c_7$$

Алгоритм реализации схемы Горнера

В краткой форме схема Горнера может быть представлена в виде рекуррентной формулы

$$P_n = P_{n-1}u + a_i; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad P_0 = a_0$$



Разложение функции в ряд Маклорена

Некоторые трансцендентные (т.е. неалгебраические) функции раскладываются в ряд Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Представим этот бесконечный ряд в виде суммы

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

а $R_n(x)$ – остаточный член.

Разложение функций в ряд Маклорена

Если ряд Маклорена сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, и при достаточно малом $R_n(x)$ значение функции $f(x) \approx P_n(x)$ с абсолютной погрешностью $R_n(x)$. Таким образом, погрешность этого метода вычисления значений функций определяется величиной $R_n(x)$ и может регулироваться путем выбора количества суммируемых членов ряда n .

При вычислении функции путем разложения в ряд Маклорена надо знать радиус сходимости ряда, т.е. ограничения на величину x , и оценку величины $R_n(x)$ для обеспечения условия $|R_n(x)| < \varepsilon$, где ε – заданная допустимая абсолютная погрешность.

Рекуррентные формулы

Во многих случаях вычисление членов ряда непосредственно по общей формуле члена ряда трудоемко и может вызвать дополнительные ошибки округления. В таких случаях очередной член ряда вычисляют не по общей, а по рекуррентной формуле – через предыдущий член ряда. Для получения рекуррентной формулы необходимо выполнить следующие операции:

1. Записать формулу для k -го члена ряда a_k .
2. Записать формулу для $(k-1)$ -го члена ряда a_{k-1} , заменив в предыдущей формуле всюду k на $k-1$.
3. Получить формулу для отношения $q = a_k / a_{k-1}$, произведя необходимые упрощения и сокращения.
 - Записать в развернутом виде полученную рекуррентную формулу в виде $a_k = q \cdot a_{k-1}$, значения k , при которых она работает, и значение первого члена ряда a_0 .

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < |a_n|$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) \leq |a_{n+1}|$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) \leq |a_{n+1}|$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots; \quad |x| \leq 1; \quad R_n(x) \leq |a_{n+1}|$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$\ln x = \sum_{k=0}^n a_k = -2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{2k+1}; \quad 0.5 \leq x < 1; \quad R_n(x) < \frac{1}{4} |a_n|$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{2}{3} a_n$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{1}{3} |a_n|$$

Вывод рекуррентной формулы для ряда e^x

$$e^x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < |a_n|$$

$$1. \quad a_k = \frac{x^k}{k!} \qquad 2. \quad a_{k-1} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$3. \quad q = \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{x^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot x^{k-1}} = \frac{x}{k}$$

$$4. \quad a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x}{k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = 1$$

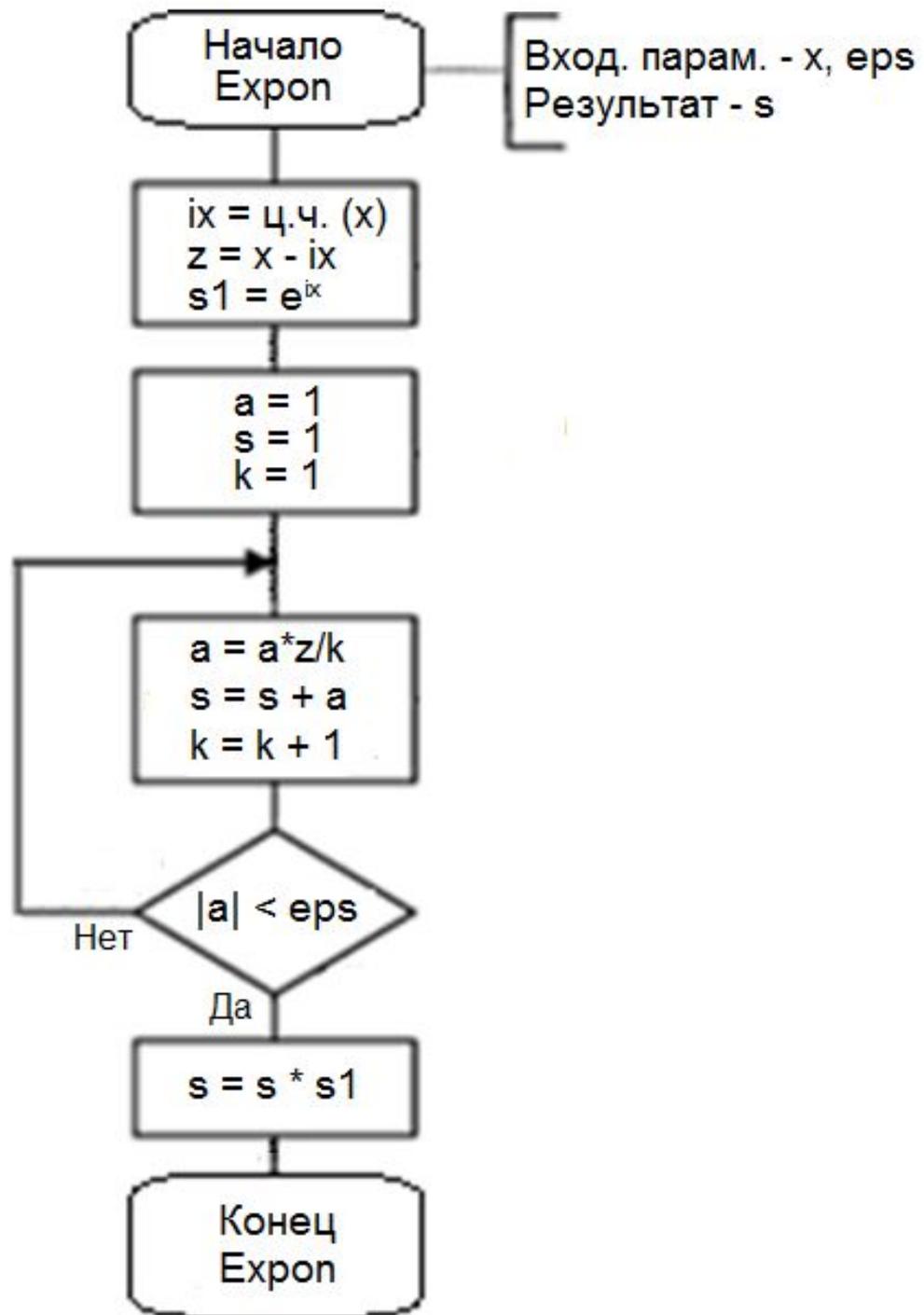
$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = 1$$

Приведение аргумента e^x к диапазону $|x| < 1$

При больших по абсолютной величине значениях x данный ряд сходится медленно, и за счет погрешностей округления результат может оказаться не просто неточным, а бессмысленным. Скорость сходимости ряда будет большой при $|x| < 1$. Для приведения x к этому диапазону его представляют обычно в виде суммы:

$x = E(x) + z$, где $E(x)$ – целая часть x , $0 \leq z < 1$ – дробная часть x . Тогда $e^x = e^{E(x)} \cdot e^z$, где $e^{E(x)}$ вычисляется путем возведения в целую степень, а e^z – путем разложения в ряд.

Схема алгоритма вычисления e^x



Рекуррентные формулы для рядов $\sin(x)$ и $\cos(x)$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) \leq |a_{n+1}|$$

$$a_k = -a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{2k(2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = x$$
$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) \leq |a_{n+1}|$$

$$a_k = -a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2k-1)2k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = 1$$
$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = 1$$

Приведение аргумента $\sin(x)$ и $\cos(x)$ к отрезку $[0; \pi/4]$

Четность–нечетность

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Периодичность

$$\sin(x \pm 2\pi \cdot k) = \sin(x)$$

$$\cos(x \pm 2\pi \cdot k) = \cos(x)$$

Приведение к отрезку $[0; \pi/2]$

$$\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$$

$$\sin(\pi \pm x) = -\sin(x)$$

$$\sin(3\pi/2 \pm x) = -\cos(x)$$

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$$

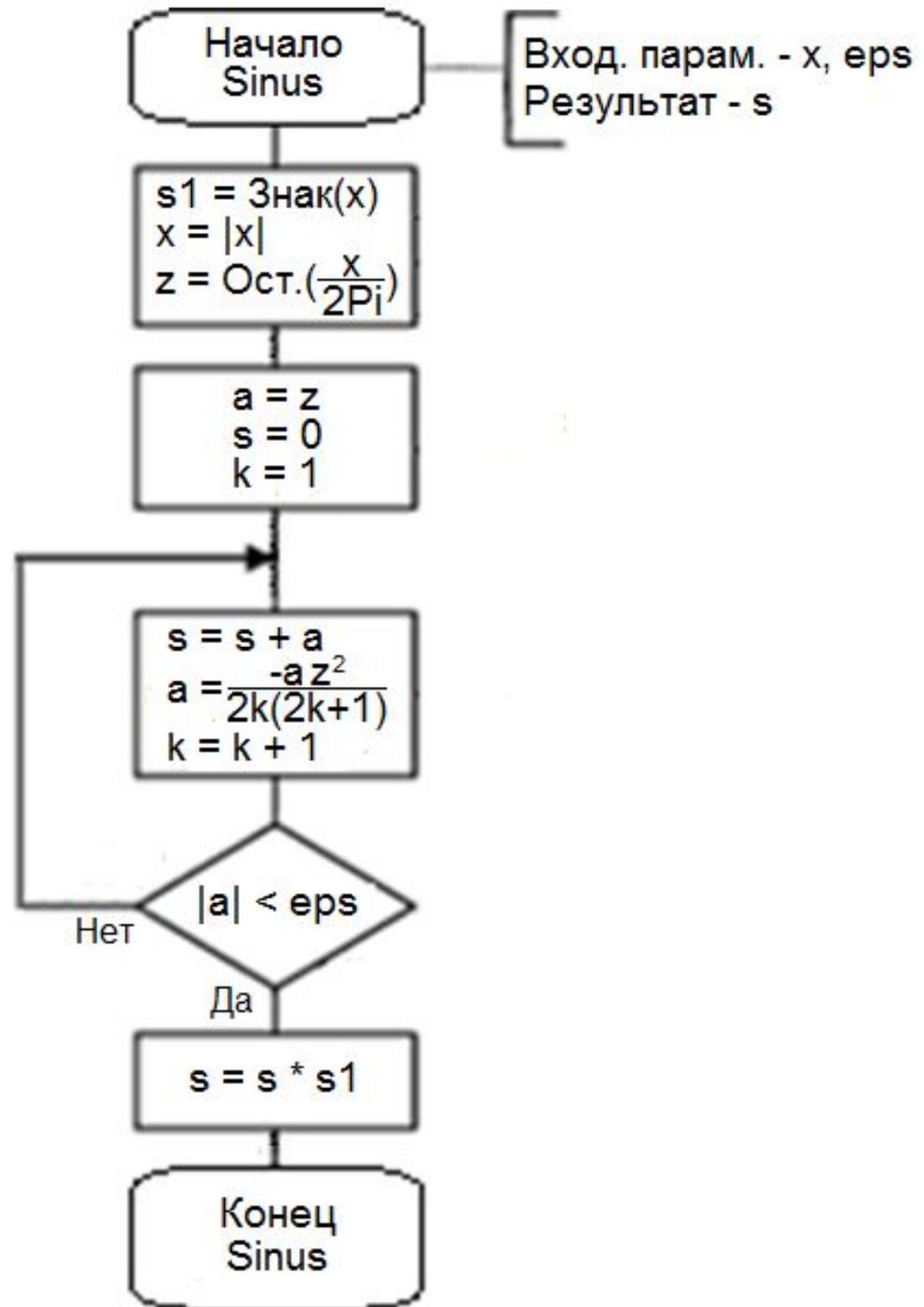
$$\cos(3\pi/2 \pm x) = \pm \sin(x)$$

Приведение к отрезку $[0; \pi/4]$

$$\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$$

$$\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$$

Схема алгоритма вычисления $\sin(x)$



Рекуррентные формулы и формулы приведения для функции $\text{arctg}(x)$

$$\text{arctg } x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots; \quad |x| \leq 1; \quad R_n(x) \leq |a_{n+1}|$$

$$a_k = -a_{k-1} \cdot \frac{x^2(2k-1)}{2k+1}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = x$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = x$$

Нечетность: $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}(x)$

Приведение к $|x| \leq 1$: $\text{arctg}(x) = \pi/2 - \text{arctg}(1/x)$

Рекуррентные формулы и формулы приведения для функции $\ln(z)$

$$\ln x = \sum_{k=0}^n a_k = -2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2k+1}; \quad 0.5 \leq x < 1; \quad R_n(x) < \frac{1}{4} |a_n|$$

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{(1-x)^2 (2k-1)}{(1+x)^2 (2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = x$$

Представим z в виде $z = 2^m \cdot x$, где m – целое число и $0.5 \leq x < 1$. Прологарифмировав это равенство, получим $\ln z = m \cdot \ln 2 + \ln x$

$$\ln 2 \approx 0,6931471805599453$$

Алгоритм приведения аргумента $\ln(x)$

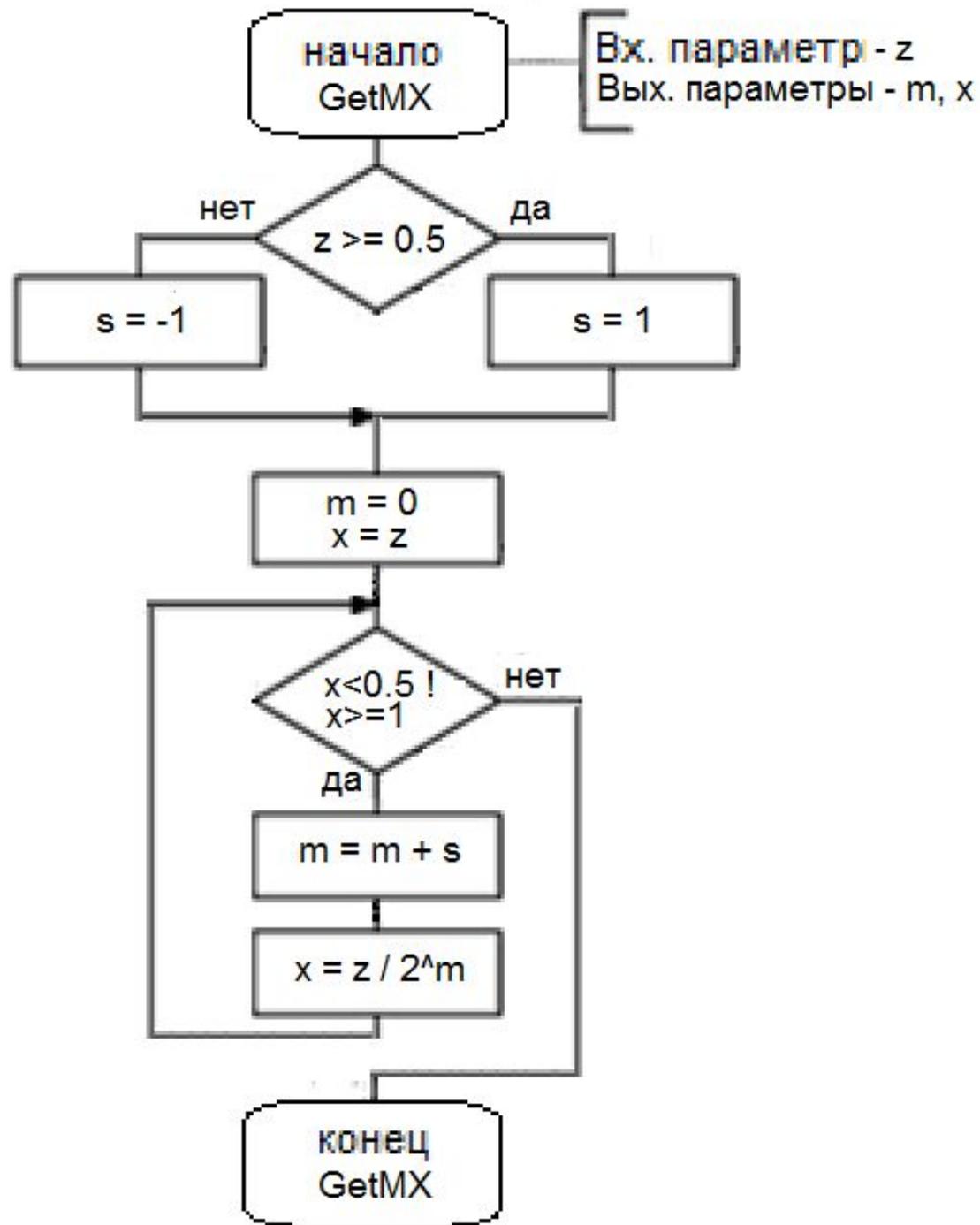
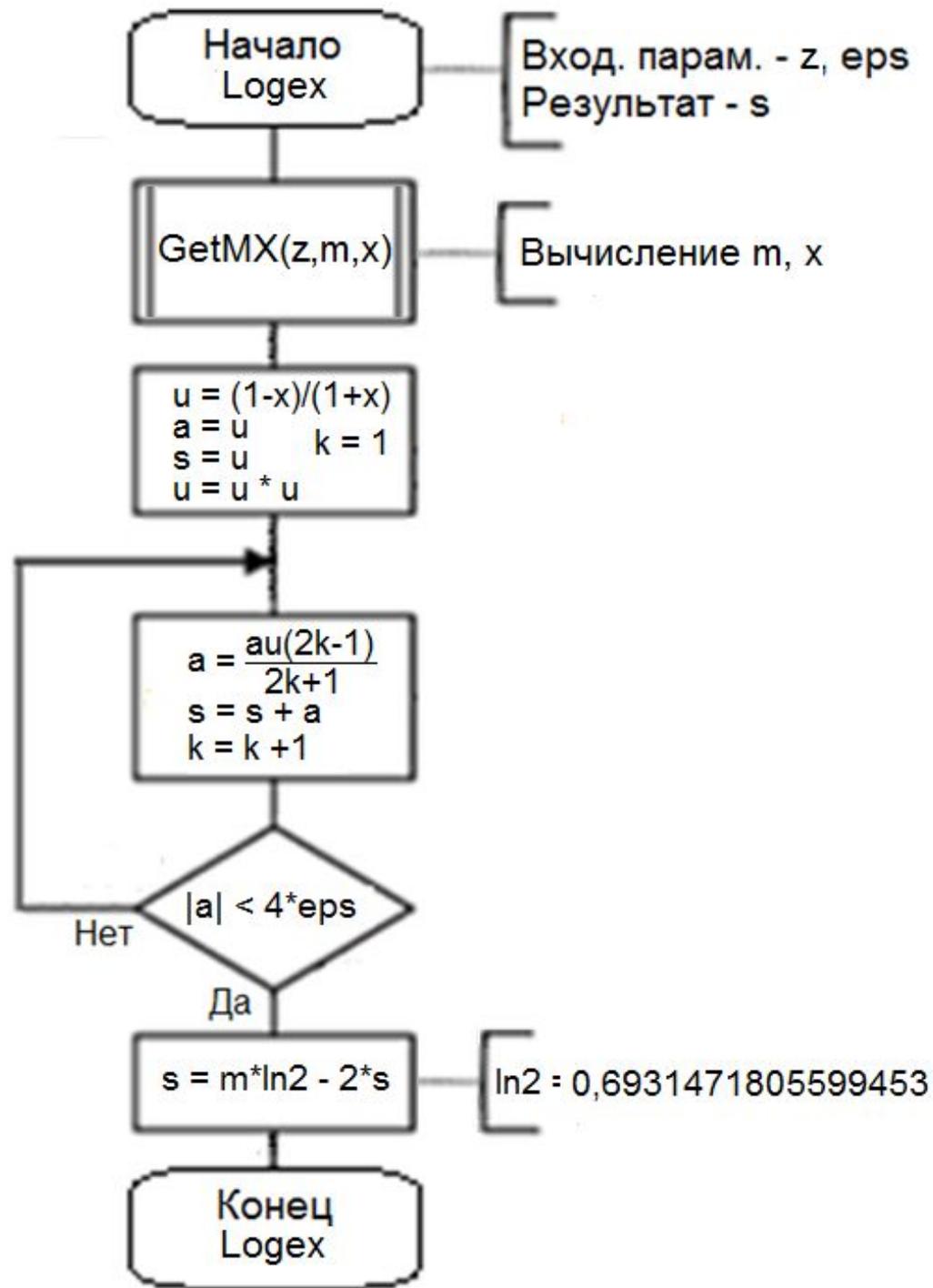


Схема алгоритма вычисления $\ln x$



Рекуррентные формулы для рядов $\sinh(x)$ и $\cosh(x)$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{1}{3} |a_n|$$

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{2k(2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = x$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = x$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{2}{3} a_n$$

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2k-1)2k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = 1$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = 1$$

Свойства функций $\sinh(x)$ и $\cosh(x)$

Четность–нечетность

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Многочленные приближения e^x и $\ln x$

$$e^x \approx a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,0002040 & a_1 &= 0,0014393 & a_2 &= 0,0083298 \\ a_3 &= 0,0416350 & a_4 &= 0,1666674 & a_5 &= 0,5000063 \\ a_6 &= 1,0 & a_7 &= 0,9999998 \end{aligned}$$

$$|x| \leq 1 \quad \Delta = 2 \cdot 10^{-7}$$

$$\ln(1+x) \approx a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,010757369 & a_1 &= -0,055119959 & a_2 &= 0,134639267 \\ a_3 &= -0,225873284 & a_4 &= 0,328233122 & a_5 &= -0,499470150 \\ a_6 &= 0,999981028 & a_7 &= 0 \end{aligned}$$

$$|x| \leq 1 \quad \Delta = 2 \cdot 10^{-7}$$

Многочленные приближения $\sin x$ и $\cos x$

$$\sin x \approx a_0 x^9 + a_2 x^7 + a_4 x^5 + a_6 x^3 + a_8 x$$

$$a_0 = 0,000002608 \quad a_2 = -0,000198107 \quad a_4 = 0,008333075$$

$$a_6 = -0,166666589 \quad a_8 = 1,000000002$$

$$|x| \leq \pi/2 \quad \Delta = 6 \cdot 10^{-9}$$

$$\cos x \approx a_0 x^{10} + a_2 x^8 + a_4 x^6 + a_6 x^4 + a_8 x^2 + a_{10}$$

$$a_0 = -0,000000269591 \quad a_2 = 0,000024795132$$

$$a_4 = -0,001388885683 \quad a_6 = 0,041666665950$$

$$a_8 = -0,4999999999942 \quad a_{10} = 1,0$$

$$|x| \leq \pi/2 \quad \Delta = 6 \cdot 10^{-9}$$

Многочленное приближение $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x \approx a_0 x^{13} + a_2 x^{11} + a_4 x^9 + a_6 x^7 + a_8 x^5 + a_{10} x^3 + a_{12} x$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,0095168091 & a_2 &= 0,0029005250 & a_4 &= 0,0245650893 \\ a_6 &= 0,0533740603 & a_8 &= 0,1333923995 & a_{10} &= 0,3333314036 \\ & & a_{12} &= 1,0 & & \end{aligned}$$

$$|x| \leq \pi/4 \quad \Delta = 2 \cdot 10^{-8}$$

Вычисление функции методом

итераций

Всякую функцию $y = f(x)$ можно различными способами задавать неявно, т.е. некоторым уравнением $F(x, y) = 0$, где x – заданный параметр, а y – неизвестное.

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'(x, y_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_0; \quad y_1 = y_0 - \frac{F(x, y_0)}{F'(x, y_0)}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{F(x, y_1)}{F'(x, y_1)}$$

.....

Условия сходимости: $F'(x, y)$ и $F''(x, y)$ существуют и знакопостоянны в окрестности корня уравнения

Правило останова: $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$ – допустимая абс. погр.

Вычисление квадратного корня методом итераций

Пусть $y = \sqrt{x}$ ($x > 0$). Тогда $F(x,y) = y^2 - x$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эта формула называется **формулой Герона**.

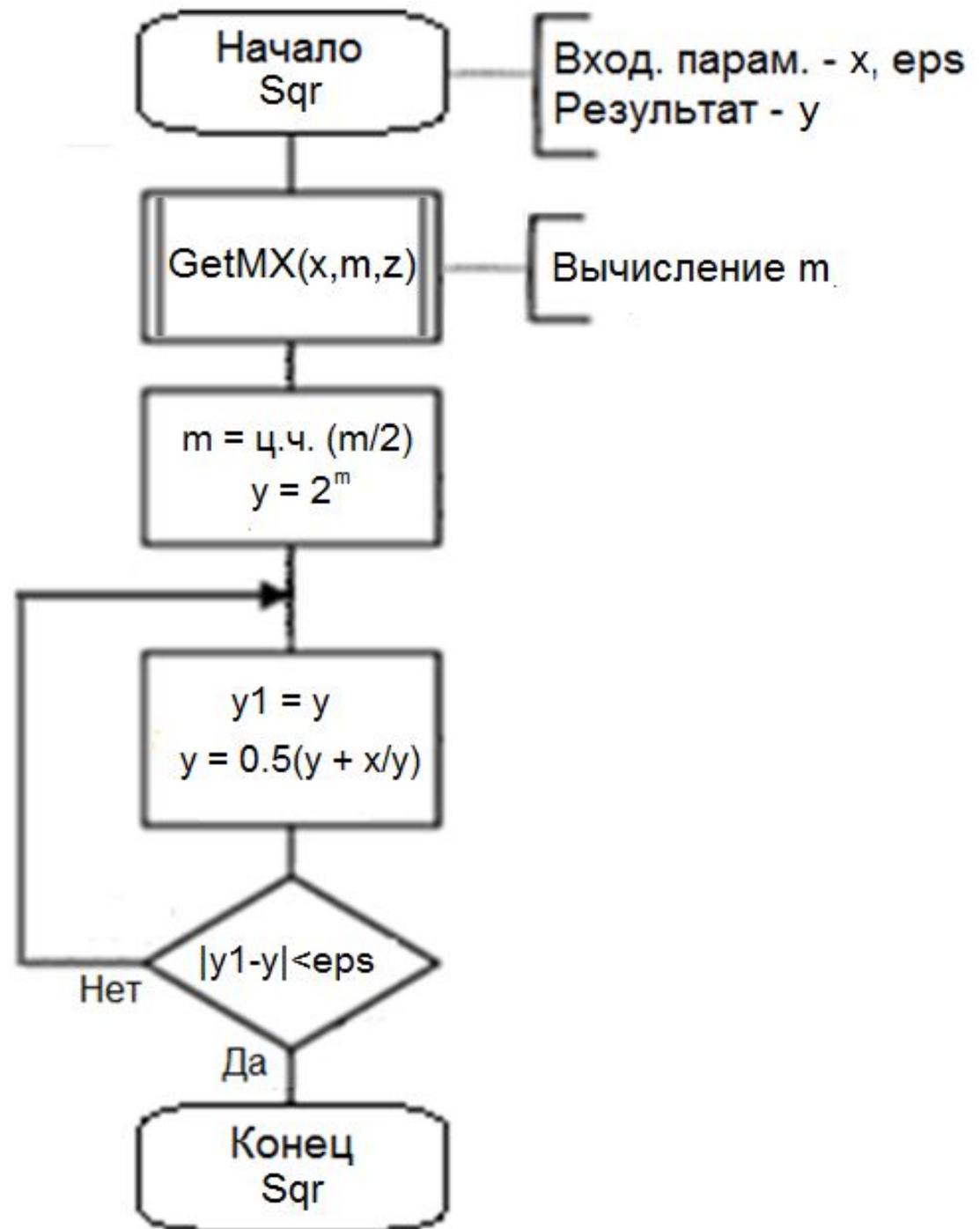
Выбор y_0 :

Если $x > 1$, то $x = 2^m z$, где m – целое число и $0,5 \leq z < 1$,
и $y_0 = 2^{E(m/2)}$, где $E(m/2)$ – целая часть числа $m/2$.

Если $0,01 \leq x \leq 1$, то $y_0 = ax + b$, a и b – из таблицы:

Интервал x	a	b	Интервал x	a	b
(0,01 ; 0,02)	4,1	0,060	(0,18 ; 0,30)	1,0	0,247
(0,02 ; 0,03)	3,2	0,078	(0,30 ; 0,60)	0,8	0,304
(0,03 ; 0,08)	2,2	0,110	(0,60 ; 1,00)	0,6	0,409
(0,08 ; 0,18)	1,4	0,174			

Схема алгоритма вычисления \sqrt{x}



Вычисление корня p -й степени методом итераций

Пусть $y = \sqrt[p]{x}$ ($x > 0, p > 0$). Тогда

$$F(x, y) = 1 - x/y^p$$

$$y_{n+1} = \left[y_n \left(1 + \frac{1}{p} \right) - \frac{y_n^p}{px} \right]; \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Выбор y_0

$$y_0^p < x(p+1), \quad \text{откуда} \quad y_0 < e^{\frac{\ln[x(p+1)]}{p}}$$

Вычисление корня p -й степени методом итераций. Формула Ньютона

Если преобразовать выражение $y = \sqrt[p]{x}$ к виду

$F(x, y) = y^p - x$, то получим другую итерационную формулу:

$$y_{n+1} = \frac{1}{p} \left[(p-1) y_n + \frac{x}{y_n^{p-1}} \right]; \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

известную как **формула Ньютона**. При $p = 2$

из формулы Ньютона получается формула Герона.