Семинар 14. Основные методы интегрирования

Для вычисления данного интеграла необходимо тем или иным способом свести его к табличному интегралу и таким образом найти искомый интеграл

Наиболее важными методами интегрирования являются:

1. Метод разложения.
2. Метод подстановки.
3. Метод интегрирования по частям.

Метод разложения

Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, тогда на основании свойства имеем

$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$. По возможности $f_1(x)$ **и** $f_2(x)$ стараются

подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно

Метод подстановки (метод введения новой переменной)

Пусть *f(x)* непрерывна на интервале *(a,b)* и $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (α, β); причем функция φ отображает интервал (α, β) в интервал *(a,b)*.

На основании свойства независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента и учитывая, что $dx = \varphi'(t)dt$, получим формулу замены в неопределенном интеграле.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Метод интегрирования по частям

Пусть *u* и *v* – непрерывно дифференцируемые функции от *x*.

На основании формулы дифференциала произведения имеем *d(uv)=udv+vdu.* Отсюда *udv=d(uv)-vdu*. Интегрируя, получаем $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$ или окончательно $\int udv = uv - \int vdu$ Это и есть формула интегрирования по частям. Выведенная формула показывает, что интеграл $\int udv$ приводится к интегралу $\int vdu$, который может оказаться более простым или даже табличным.

Интегрирование рациональных дробей с квадратичным знаменателем

Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$, где *P(x)* – целочисленный многочлен; *a,b,c* – постоянные величины $a \neq 0$

Разделив *P(x)* на знаменатель, получаем в частном некоторый многочлен *Q(x)* и в остатке – линейный многочлен *mx+n*. Отсюда

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = Q(x) + \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$$

Интеграл от многочлена Q(x) находится непосредственно. Рассмотрим способы вычисления интеграла вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ (1)

Рассмотрим интегралы:

I. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c (a \neq 0)$

II. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} (a \neq 0)$ Имеем $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

Тогда $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

III. $\int\frac{xdx}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2\pm a^2)}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+c$

Основной прием вычисления интеграла (1) состоит в следующем: квадратный трехчлен ax^2+bx+c дополняется до полного квадрата.

После этого, если коэффициент m=0, то интеграл (1) сводится к интегралу I или II. Если же $m\neq 0$, то интеграл (1) сводится к интегралам I и II, или к интегралам II и III.

Примеры с решениями.

1 $\int(1-\sqrt{x})^2dx=\int(1-2\sqrt{x}+x)dx=\int dx-2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int xdx=x-2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+c=x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+c$

2 $\int\frac{x^4-6x^3+8x^2+9x-5}{x^2}dx=\int(x^2-6x+8+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2})dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x+9\ln|x|+\frac{5}{x}+c$

3. $\int\sin x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x-\sin 2x)dx=\frac{1}{8}\int\sin 4xd(4x)-\frac{1}{4}\int\sin 2xd(2x)=-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+c$

(так как $\sin x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x)$)

4. $\int x\sqrt{x-5}dx$ Полагаем $\sqrt{x-5}=t, x-5=t^2, x=t^2+5, dx=2tdt$

Производя подстановку получаем

$$\int x\sqrt{x-5}dx=\int(t^2+5)2tdt=\int(2t^4+10t^2)dt=2\int t^4dt+10\int t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+10\cdot\frac{t^3}{3}+c=\frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}+c$$

5. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$ Выполним тригонометрическую подстановку

x=asint, dx=acostdt .

Следовательно

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cdot a\cos tdt=a^2\int\cos^2tdt=\frac{a^2}{2}\int(1=\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{4}\int\cos 2td(2t)=$$
$$\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+c$$

Делая обратную замену

$$\sin t=\frac{x}{a}, t=\arcsin\frac{x}{a}, \sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2t}=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

Окончательно

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}+c$$

6. $\int (\ln x + \frac{1}{\ln x})\frac{dx}{x}$ так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ получаем

$$\int (\ln x + \frac{1}{\ln x})\frac{dx}{x} = \int \ln x d(\ln x) + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln\left|\ln x\right| + c$$

7. $\int \ln x dx = \left\{u = \ln x, dv = dx, du = d(\ln x) = \frac{dx}{x}, v = x\right\}$ $= x\ln x -$ $\int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - x + c$

8. $\int x\cos x dx = \{u = x, dv = \cos x dx, du = dx, v = \sin x\} = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$

9. $\int x \cdot arctgx dx = \frac{1}{2}\int arctgx \cdot d(x^2+1) = \frac{1}{2}(x^2+1)arctgx - \frac{1}{2}\int (x^2+1)d(arctgx) =$

$$\frac{1}{2}(x^2+1)arctgx - \frac{1}{2}\int (x^2+1)\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)arctgx - \frac{1}{2}x + c$$

10. $\int \frac{dx}{x^2-10x+16} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + c$

11. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})+(4-\frac{9}{4})} = \int \frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c$

12. $\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

13. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int (x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx = \frac{x^3}{x} - x + arctgx + c$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

2. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$

3. $\int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

5. $\int x^3 \sqrt[3]{1 + x^2}\, dx$

6. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1 - x}\, dx$

7. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

8. $\int x e^{-x} dx$

9. $\int x \cdot arctgx \cdot dx$

10. $\int x \sin^2 x dx$