# Дифференциальные уравнения высших порядков



- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

# Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ***ДУ высших порядков***.

Символически ДУ высших порядков можно записать:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{или}$$

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

***Общее решение*** ДУ n – ого порядка является функцией вида:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$$

Начальные условия для ДУ n – ого порядка задаются в виде:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad y''(x_0) = y''_0; \ldots ; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных, называется ***частным решением:***

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$$

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка



Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является ***метод понижения порядка.***

Рассмотрим 3 вида уравнений, допускающих понижение порядка.

- $y^{(n)} = f(x)$ *(1)*

Общее решение данного уравнения находится с помощью последовательного интегрирования :

$$y^{(n)} = \frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx} \Rightarrow \frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx} = f(x) \Rightarrow$$

$$\int d\left(y^{(n-1)}\right) = \int f(x)dx \Rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

В результате получается ДУ на порядок ниже. Проинтегрировав уравнение $n$ раз, получим искомую функцию.

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

*Найти общее решение ДУ:* $y''' = \sin 2x$

$$y'' = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y' = \int \left( -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left( -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2 \right) dx \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3}$$

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка



- $y'' = f(x; y')$  *(2)*

- уравнение второго порядка, не содержащее явно искомой функции $y$,

Сделаем замену переменной: $\boxed{y' = p(x)}$ тогда $\boxed{y'' = p'}$

и получим уравнение первого порядка:

$$p' = f(x; p)$$

Пусть: $p = \varphi(x; C_1)$ - решение данного уравнения.

Заменим функцию $p$ на $y'$: $y' = \varphi(x; C_1)$

Это уравнение вида *(1)*, поэтому:

$$y = \int \varphi(x; C_1)\, dx + C_2$$

В общем случае, порядок уравнения: $F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)})$

можно понизить на $k$ единиц с помощью подстановки: $y^{(k)} = p(x)$

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

*Найти частное решение ДУ:* $y'' - \frac{y'}{x} = 0 \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 2$

*Сделаем замену:* $y' = p; \quad y'' = p' \Rightarrow p' - \frac{p}{x} = 0$

*Это уравнение с разделяющимися переменными.*

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$p = C_1 x \Rightarrow y' = C_1 x$ *Найдем* $C_1$ *с помощью начального условия:*

$$y'(1) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow$$

$$y = \int 2x\,dx \Rightarrow y = x^2 + C_2$$

*Найдем* $C_2$ *с помощью начального условия:* $y(1) = 1 \Rightarrow$

$$1 = 1^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = x^2}$$

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

$y'' = f(y; y')$ *(3)* - уравнение второго порядка,

не содержащее явно независимой переменой $x$.

Сделаем замену переменной: $\boxed{y' = p(y)}$ тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' \Rightarrow$$

$$\boxed{y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p}$$

Теперь уравнение *(3)* запишется в виде:

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y; p)$$

Пусть: $p = \varphi(y; C_1)$ - решение данного ДУ $\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1) \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$$

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

*Найти частное решение ДУ:*

$$y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0 \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 2$$

*Сделаем замену:* $y' = p; \quad y'' = \dfrac{dp}{dy}p \quad \Rightarrow$

$$\frac{dp}{dy}p - p^2 + p(y-1) = 0$$

*Так как* $p = y' \neq 0$ *(по начальному условию), получим:*

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y$$ *- линейное уравнение 1 порядка.*

$$p = u \cdot v \qquad \frac{dp}{dy} = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad u'v + [uv' - uv] = 1 - y \quad \Rightarrow$$

$$u'v + u(v' - v) = 1 - y \quad \Rightarrow \quad v' - v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = v \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dy \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = y \quad \Rightarrow \quad v = e^y$$

# Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

$$u'e^{y} = 1 - y \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = (1 - y)\cdot e^{-y} \quad \Rightarrow \int du = \int (1 - y)\cdot e^{-y} dy$$

$$= \begin{bmatrix} u = 1 - y & du = -dy \\ dv = e^{-y} & v = -e^{-y} \end{bmatrix} \Rightarrow \; u = \; -e^{-y}(1 - y) - \int e^{-y} dy =$$

$$= \; -e^{-y}(1 - y) + e^{-y} + C_1 \quad = \; e^{-y} y + C_1$$

$$p = uv = \; e^{y}\left(e^{-y} y + C_1\right) \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 e^{y} + y$$

*Найдем $C_1$ с помощью начальных условий:* $2 = C_1 e^{2} + 2 \quad \Rightarrow C_1 = 0$

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \; x + C_2 \;\Rightarrow$$

$$y = \; e^{x + C_2} \qquad \Rightarrow \qquad y = \; C_2 e^{x} \;\; \Rightarrow \;\; 2 = \; C_2 e^{0} \;\; \Rightarrow \;\; C_2 = 2$$

$$\boxed{y = \; 2e^{x}}$$