Тема 4:

Часть 3:

Расчет максимального отношения сигнал-шум на выходе оптимального приемника.

Оптимальное обнаружение и различение сигналов.

Максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора

Пример: корреляционный приемник для оценки задержки импульса

Принимаемое колебание

$$y(t) = s(t - \tau_0) + n(t)$$

$$\boxed{\hat{\tau} = \underset{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]}{\arg\max}\, R(\tau) = \underset{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]}{\arg\max} \left(\int_0^T y(t) s_\tau(t) dt \right) = \underset{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]}{\arg\max}\, q(\tau)}$$

Корреляционный интеграл

$$q(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s(t - \tau) dt = q_{\text{c}}(\tau) + q_{\text{ш}}(\tau)$$

$$q_{\text{c}}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt$$

- сигнальная функция (регулярная)

$$q_{\text{ш}}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t) s(t - \tau) dt$$

- шумовая функция (случайная)

Максимальное отношение сигнал-шум по напряжению:

$$\rho_{\max} = \frac{q_{\text{c}\,\max}}{\sigma_{q_{\text{ш}}}}$$

Вычисление максимума сигнальной функции $q_{\text{с max}}$

Сигнальная функция как скалярное произведение векторов:

$$q_{\text{с}}(\tau) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t-\tau_0)s(t-\tau)dt = \frac{2}{G_0}\left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}, \vec{\mathbf{s}}_{\tau}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \left\|\vec{\mathbf{s}}_{\tau}\right\| &= \sqrt{\left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau}, \vec{\mathbf{s}}_{\tau}\right)} = \sqrt{\int_0^T s^2(t-\tau)dt} = \sqrt{E_{\text{с}}} \\ \left\|\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}\right\| &= \sqrt{\left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}, \vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}\right)} = \sqrt{\int_0^T s^2(t-\tau_0)dt} = \sqrt{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left\|\vec{\mathbf{s}}_{\tau}\right\| = \left\|\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}\right\| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}, \vec{\mathbf{s}}_{\tau}\right) = \max \text{ при } \vec{\mathbf{s}}_{\tau} = \vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}, \text{ т.е. при } s(t-\tau) = s(t-\tau_0)$$

$$q_{\text{с max}} = q_{\text{с}}(\tau_0) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t-\tau_0)^2 dt = \frac{2E_{\text{с}}}{G_0}$$

Вычисление СКО шумовой функции $\sigma_{q_ш}$

Дисперсия шумовой функции:

$$q_ш(\tau) = \frac{2}{G_0}\int_0^T n(t)s(t-\tau)dt$$

$$\text{так как } \overline{q_ш(\tau)} = 0, \text{ то } \sigma^2_{q_ш} = \overline{q^2_ш(\tau)} = \overline{\frac{2}{G_0}\int_0^T n(t_1)s(t_1-\tau)dt_1 \cdot \frac{2}{G_0}\int_0^T n(t_2)s(t_2-\tau)dt_2} =$$

$$= \sigma^2_{q_ш} = \left(\frac{2}{G_0}\right)^2 \int_0^T\int_0^T \overline{n(t_1)n(t_2)}\, s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2$$

$$\text{АКФ шума } \overline{n(t_1)n(t_2)} = K_n(t_2-t_1) = K_n(x) = \frac{G_0}{2}\delta(x)$$

$$\sigma^2_{q_ш} = \left(\frac{2}{G_0}\right)^2 \int_0^T\int_0^T \frac{G_0}{2}\delta(t_2-t_1)s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2 = \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t_1-\tau)\underbrace{\left[\int_0^T \delta(t_2-t_1)s(t_2-\tau)dt_2\right]}_{s(t_1-\tau)}dt_1 =$$

$$= \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t_1-\tau)^2 dt_1 = \frac{2E_с}{G_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{q_ш} = \sqrt{\frac{2E_с}{G_0}}$$

$$\rho_{\max} = \frac{q_{с\max}}{\sigma_{q_ш}} = \sqrt{\frac{2E_с}{G_0}}$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

Принятая смесь сигнала и шума $$y(t) = \lambda s(t) + n(t) = s_\lambda(t) + n(t)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если сигнал есть} \\ 0, & \text{если сигнала нет} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \text{обнаружение} \\ \text{сигнала} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{оценка} \\ \text{параметра } \lambda \end{bmatrix}$$

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t) s_\lambda(t)\,dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\lambda s(t)\,dt \; - \text{ корреляционный интеграл}$$

$$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t)\,dt = \int_0^T \lambda^2 s^2(t)\,dt \; - \text{ энергия сигнала}$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

$\lambda = 1$	$\lambda = 0$
$s_\lambda(t) = \lambda s(t) = s(t)$	$s_\lambda(t) = \lambda s(t) = 0$
$q(1) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T y(t)s(t)dt \overset{def}{=} q$	$q(0) = 0$
$E_{\text{c}}(1) = \displaystyle\int_0^T s^2(t)dt \overset{def}{=} E_{\text{c}}$	$E_{\text{c}}(0) = 0$
$p_{ps}(1) = p_{pr}(1)\, e^{q - \frac{E_{\text{c}}}{G_0}}$	$p_{ps}(0) = p_{pr}(0)$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

Оценка параметра

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ (сигнал есть), если } & p_{ps}(1) > p_{ps}(0) \\ 0 \text{ (сигнала нет), если } & p_{ps}(1) < p_{ps}(0) \end{cases}$$

Случай, когда $p_{ps}(1) > p_{ps}(0)$

$$ce^{q} e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1) > c\, p_{pr}(0) \quad \Rightarrow \quad e^{q} > \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} e^{\frac{E_c}{G_0}} \quad \Rightarrow \quad q > \ln \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} + \frac{E_c}{G_0}$$

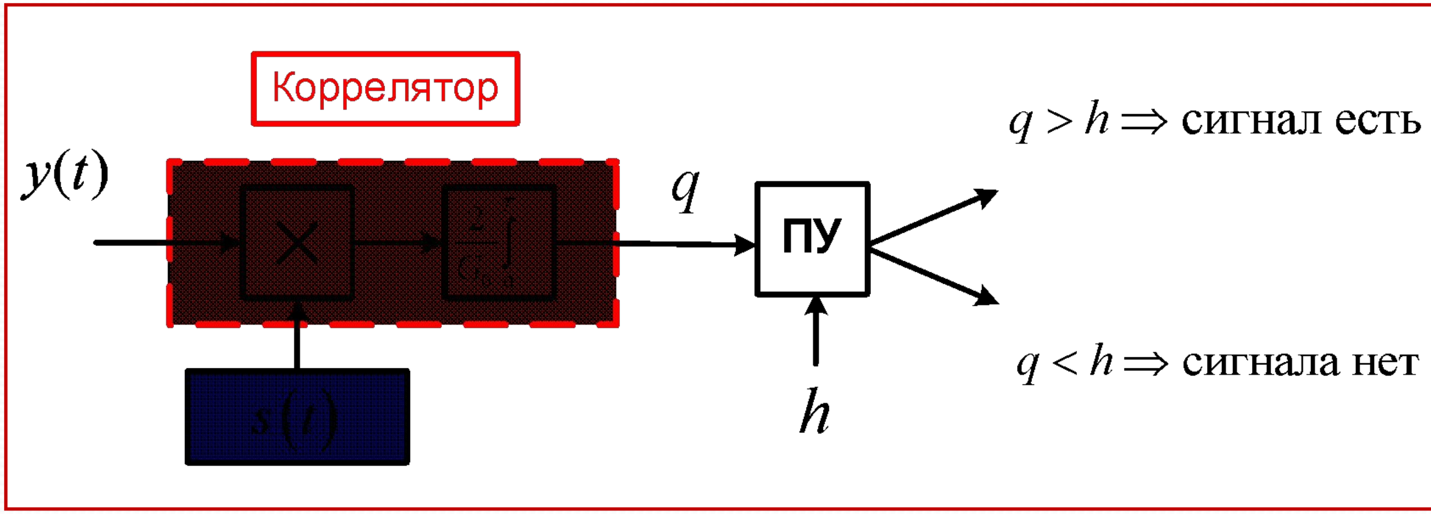
$$p_{pr}(1) \overset{def}{=} p_{pr} \quad \Rightarrow \quad p_{pr}(0) = 1 - p_{pr}$$

Алгоритм оптимального обнаружения

$$q = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s(t) dt > \underbrace{\ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \frac{E_c}{G_0}}_{\text{порог } h}$$

Оптимальный корреляционный обнаружитель

(полностью известный сигнал)



Оптимальный порог

$$h = \frac{E_c}{G_0} + \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Возможные ситуации при обнаружении

$\hat{\lambda}$ \ λ	1	0
1	правильное обнаружение $p_{\text{обн}}$	ложное срабатывание [ложная тревога (ЛТ)] $p_{\text{ЛТ}}$
0	пропуск сигнала $p_{\text{проп}}$	правильное необнаружение $p_{\text{необн}}$

$$p_{\text{проп}} + p_{\text{обн}} = 1$$

$$p_{\text{необн}} + p_{\text{ЛТ}} = 1$$

Независимые вероятности:

$$p_{\text{обн}} = \mathsf{P}\left\{q > h \middle| \lambda = 1\right\} = D \text{ (Detection) – обнаружение}$$

$$p_{\text{ЛТ}} = \mathsf{P}\left\{q > h \middle| \lambda = 0\right\} = F \text{ (False Alarm) – ложная тревога}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Статистические характеристики корреляционного интеграла

Корреляционный интеграл $q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t)dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T \left[\lambda s(t) + n(t)\right]s(t)dt =$

$$= \lambda \frac{2}{G_0}\int_0^T s^2(t)dt + \frac{2}{G_0}\int_0^T n(t)s(t)dt = \lambda\frac{2E_c}{G_0} + q_ш$$

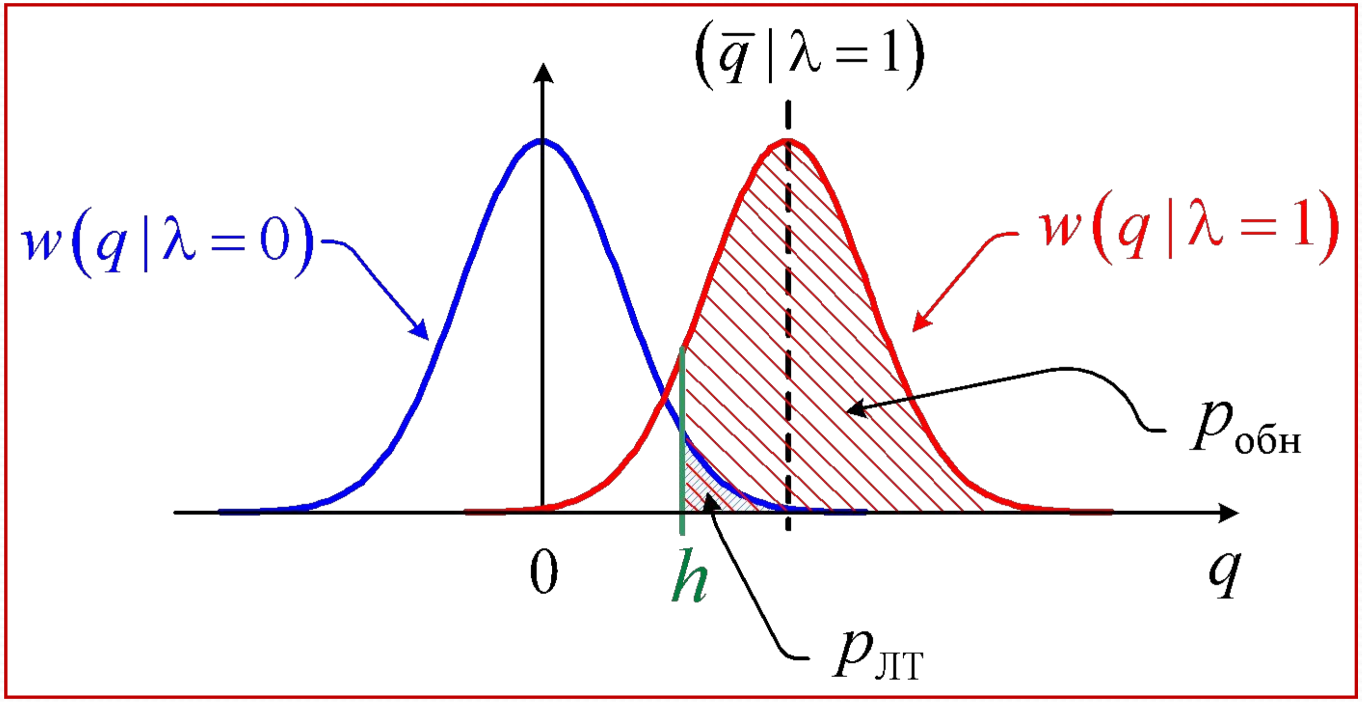
$$\left.\begin{aligned} &\overline{q_ш} = 0 \\ &\mathbf{D}\{q_ш\} = \frac{2E_c}{G_0}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\text{мат.ожидание } \overline{q(\lambda)} = (\overline{q}\,|\,\lambda) = \lambda\frac{2E_c}{G_0} \\ &\text{дисперсия } \mathbf{D}\{q(\lambda)\} = \sigma_q^2 = \frac{2E_c}{G_0}\end{aligned}\right.$$

Условная плотность вероятности корреляционного интеграла:

$$w(q\,|\,\lambda) = \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(q - (\overline{q}|\lambda)\right)^2}{2\sigma_q^2}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)



Вероятность ложной тревоги

$$p_{\text{ЛТ}} = \mathbf{P}\{q > h | \lambda = 0\} = \int_h^\infty w(q \mid \lambda = 0)\, dq$$

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \mathbf{P}\{q > h | \lambda = 1\} = \int_h^\infty w(q \mid \lambda = 1)\, dq$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Вероятность ложной тревоги

$$p_{\text{ЛТ}} = \int_h^{\infty} w(q \mid \lambda = 0)\,dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{h} w(q \mid \lambda = 0)\,dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_q^2}}\,dq =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right) = 1 - \Phi\left(h \Big/ \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right)$$

$$p_{\text{ЛТ}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right)$$

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \int_h^{\infty} w(q \mid \lambda = 1)\,dq = 1 - \int_{-\infty}^{h} w(q \mid \lambda = 1)\,dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\overline{q} \mid \lambda = 1))^2}{2\sigma_q^2}}\,dq = 1 - \Phi\left(\frac{h - (\overline{q} \mid \lambda = 1)}{\sigma_q}\right) =$$

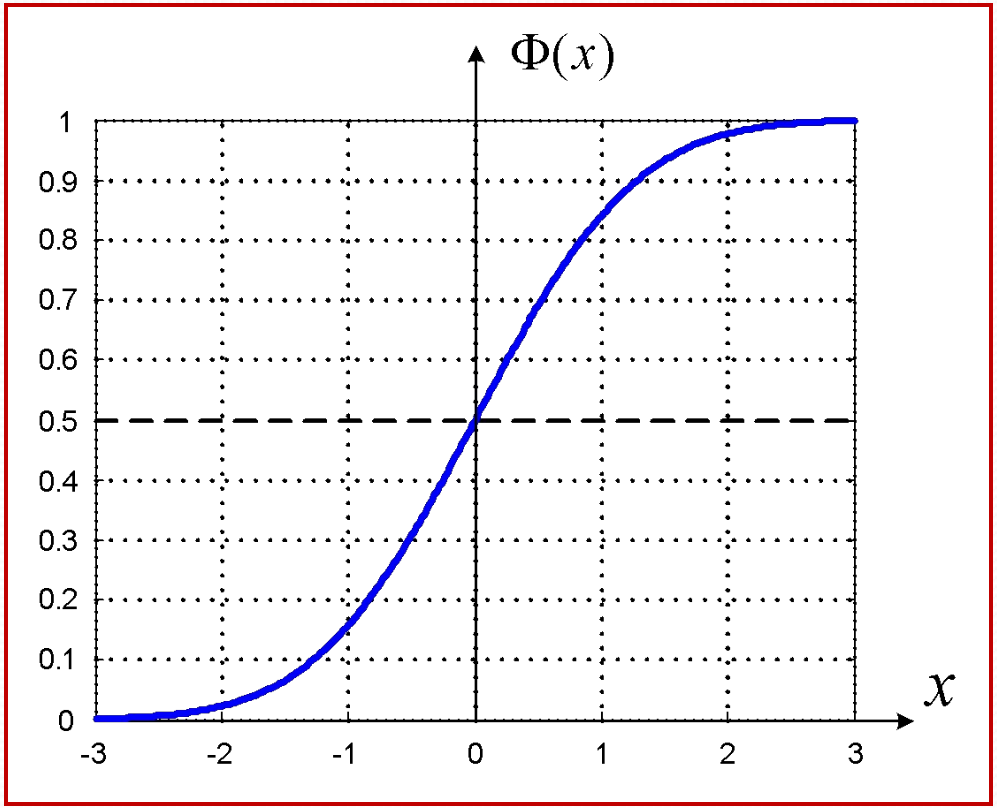
$$= 1 - \Phi\left(\frac{h - \frac{2E_c}{G_0}}{\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}} - \sqrt{\frac{2E}{G_0}}\right)$$

$$p_{\text{обн}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q} - \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Интеграл вероятности $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$



$$\Phi(0)=\frac{1}{2}$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Обнаружение по критерию максимума апостериорной вероятности

Полная вероятность ошибки $p_{\text{ош}} = p_{\text{проп}} \cdot p_{pr} + p_{\text{ЛТ}} \cdot \left(1 - p_{pr}\right) = \min$

при оптимальном пороге $h = \ln \dfrac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \dfrac{E_{\text{с}}}{G_0}$

Обнаружение по критерию Неймана-Пирсона

$p_{\text{обн}} = \max$ при заданной допустимой $p_{\text{ЛТ}}$

$$p_{\text{обн}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q} - \sqrt{\frac{2E_{\text{с}}}{G_0}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{с}}}{G_0}} - \frac{h}{\sigma_q}\right)$$

$$p_{\text{ЛТ}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\sigma_q} = \Phi^{-1}\left(1 - p_{\text{ЛТ}}\right)$$ *- нормированный порог*

$$p_{\text{обн}} = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{с}}}{G_0}} - \Phi^{-1}\left(1 - p_{\text{ЛТ}}\right)\right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Характеристики (кривые) обнаружения

по критерию Неймана-Пирсона