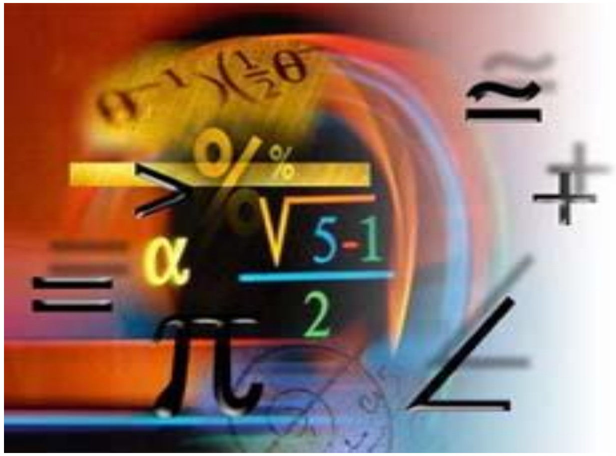

Теория вероятностей и комбинаторные правила для решение задачи ЕГЭ B10. Новые прототипы (2013)

Классическое определение вероятности

Стохастическим называют опыт, если заранее нельзя предугадать его результаты. Результаты (исходы) такого опыта называются *событиями*.

Пример: выбрасывается игральный кубик (опыт); выпадает двойка (событие).

Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания, называется *достоверным*, а которое не может произойти, - *невозможным*.

Пример: В мешке лежат три картофелины.

Опыт – изъятие овоща из мешка.

Достоверное событие – изъятие картофелины.

Невозможное событие – изъятие кабачка.

Классическое определение вероятности

Несовместимыми (несовместными) называют события, если наступление одного из них исключает наступление других.

Пример: 1) В результате одного выбрасывания выпадает орел (событие А) или решка (событие В).

События А и В - несовместны.

2) В результате двух выбрасываний выпадает орел (событие А) или решка (событие В).

События А и В - совместны.
Выпадение орла в первый раз
не исключает выпадение решки во
второй

Классическое определение вероятности

Полной группой событий называется множество всех событий рассматриваемого опыта, одно из которых обязательно произойдет, а любые два других несовместны.

События образующие полную группу называют *элементарными.*

Пример: 1) Опыт – один раз выбрасывается монета.

Элементарные события: выпадение орла
и выпадение решки образуют полную группу.

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события А называется отношение числа элементарных событий m, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех элементарных событий, входящих в данную группу n .

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Сумма вероятностей всех событий, входящих в полную группу равна 1.

Пример: Опыт – один раз выбрасывается монета.

$$\left.\begin{array}{l}\text{А – выпал орел } P(A)=0{,}5 \\ \text{В – выпала решка } P(B)=0{,}5\end{array}\right\} \text{Полная группа.}$$

$$P(A) + P(B) = 1$$

Классическое определение вероятности

*Два события, образующие полную группу называются **противоположными.***

А – за одно выбрасывание выпала решка

В – за одно выбрасывание выпал орел

А и В – противоположные события

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Классическое определение вероятности

Равновозможными называют события, если в результате опыта ни одно из них не имеет большую возможность появления, чем другие.

Примеры: 1) Опыт - выбрасывается монета.

Выпадение орла и выпадение решки – равновозможные события.

2) В урне лежат три шара. Два белых и синий.

Опыт – извлечение шара.

События – извлекли синий шар и извлекли белый шар - неравновозможны.

Появление белого шара имеет больше шансов.

Вероятности равновозможных событий равны.

Классическое определение вероятности

Произведением событий *A* и *B* называется событие *AB*, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: *A* и *B*.

Вероятность произведения совместных событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример: Найти вероятность того, что в результате двух выбрасываний игральной кости выпадет шестерка.

Событие A (первый раз выпала шестерка P(A)=1/6) и событие B (второй раз выпала шестерка P(B)=1/6) - совместны.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Классическое определение вероятности

Суммой событий *A* и *B* называется событие *A + B*, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: *A* или *B.*

Вероятность наступления суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Пример: Найти вероятность того, что в результате одного выбрасывания игральной кости выпадет шестерка или двойка.

Событие А (выпала шестерка Р(А)=1/6) и событие В (выпала двойка Р(В)=1/6) - несовместны.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Классическое определение вероятности

Вероятность наступления суммы совместных событий равна сумме вероятностей наступления этих событий минус вероятность их произведения.

Пример: Найти вероятность того, что в результате двух выбрасываний игральной кости выпадет один раз шестерка или один раз двойка.

Событие А (выпала шестерка Р(А)=1/12) и событие В (выпала двойка Р(В)=1/12) - совместны.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} = \frac{23}{144}$$

Статистическое определение вероятности

Частотой (статистической вероятностью) случайного события A называется отношение числа m опытов, в результате которых происходит событие A, к общему числу всех опытов n .

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Примеры: 1) Из 100 рожденных детей родилось 48 девочек. Найти частоту рождения девочек.

$$W(A) = \frac{48}{100} = 0,48$$

2) 4% выпущенных деталей имеют дефекты. Найти частоту деталей , выпущенных с дефектами.

$$W(A) = \frac{4}{100} = 0,04$$

Для конечных множеств событий при нахождении m и n широко используют правила комбинаторики.

Задача №1: Сколько двузначных чисел можно составить используя цифры 7; 8; 9 (цифры могут повторяться)?

В данном случае легко перебрать все комбинации.

$$\underbrace{\begin{matrix} 77 & 88 & 99 \\ 78 & 87 & 97 \\ 79 & 89 & 98 \end{matrix}}_{\text{9 вариантов}}$$

Задача №2: Сколько пятизначных можно составить используя цифры 7; 8; 9 (цифры могут повторяться)?

Как видим, в этой задаче перебор довольно затруднителен.

Решим задачу иначе.

На первом месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На втором месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На третьем месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На четвертом месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На пятом месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Комбинаторное правило умножения

Задачи открытого банка.

Классическое определение вероятности.

В чемпионате мира учавствуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение:

Благоприятных событий – 4.

Всего событий – 16.

Р=4/16=0,25

Ответ:0,25

На борту самолёта 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

Решение:

Удобных мест 12+18=30

Событие А – досталось удобное место.

Всего событий – 300 (равно количеству мест)

Р(А)=30/300=0,1

Ответ:0,1

В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А. хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А. пойдёт в магазин?

Решение:

Возможные комбинации пар из 5 человек (1,2,3,4,5)

12	*23*	*34*	*45*
13	*24*	*35*	
14	*25*		
15			

Всего - 10

У каждого 4 шанса

Р=4/10=0,4

Ответ:0,4

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение:

А- «Статор» начинает игру

В- начинает игру другая команда

«Статор» играет с тремя командами

Возможные комбинации:

ААА	*АВВ*	*ВВВ*
ААВ	*ВВА*	
$\boxed{\text{АВА}}$	*ВАВ*	
ВАА		

Всего - 8

Благоприятное - 1

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ:0,125

В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

Решение:

$$\frac{30}{6} = 5$$ ***- всего рейсов.***

Попасть на первый рейс (равно как и на второй и на любой имеющийся) – один шанс из пяти .

$$P = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Ответ:0,2

На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение:

Возможные комбинации (независимо от количества групп):

ДШН	$\boxed{\text{ШНД}}$
ДНШ	*НДШ*
ШДН	$\boxed{\text{НШД}}$

6 - вариантов

Благоприятных - 2

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Ответ:0,33

При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного меньше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

Решение:

А – диаметр не больше 66,99 и не меньше 67,1   Р(А) =0,965

Диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм – противоположное событие

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}965 = 0{,}035$$

Ответ:0,035

На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение: $250 - 2 \cdot 120 = 10$ ***- участников не попали в первые две аудитории***

Только 10 из 250 участников имеют шанс попасть в запасную аудиторию.

$$P = \frac{10}{250} = 0{,}04$$

Ответ:0,04

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение:

События «ничья», «выиграла», «проиграла» составляют полную группу.

=>Р(ничья)=1-Р(выиграла)-Р(проиграла)=1-0,4-0,4=0,2

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение:

Условию удовлетворяют три независимых события:

А – команда выиграла в первой и во второй игре. Р (А)=0,4·0,4=0,16

В – команда выиграла в первой игре и во второй сыграла вничью. Р(В)=0,2·0,4=0,08

С – команда выиграла во второй игре и в первой сыграла вничью Р(С)= 0,2·0,4=0,08

А, В, С -несовместны

$$P(A \cup B \cup C) = 0,16 + 0,08 + 0,08 = 0,32$$

Ответ:0,32

Задачи открытого банка.

Сумма несовместных событий.

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение:

Событие А – вопрос на тему «Вписанная окружность»

Событие В – вопрос на тему «Параллелограмм»

События А и В – несовместны. (Если достался первый, то не достался второй.)

$$P = P(A \cup B) = 0,2 + 0,15 = 0,35$$

Ответ:0,35

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение:

$$A - \text{меньше} \quad 15$$
$$C - \text{от} \quad 15 \quad \text{до} \quad 19$$
$$B - \text{меньше} \quad 20 \quad \text{человек}$$

B=A+C   A и C - несовместны

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(C)$$

$$\Rightarrow P(C) = P(B) - P(A) \Rightarrow P(C) = 0{,}94 - 0{,}56 = 0{,}38$$

Ответ:0,38

Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

Решение:

$A - \text{больше} \quad 11$
$B - \text{ровно} \quad 11$
$C - \text{больше} \quad 10$

C=A+B ***A и B - несовместны***

$$\Rightarrow P(C) = P(A) + P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(C) - P(A) = 0{,}74 - 0{,}67 = 0{,}07$$

Ответ:0,07

Задачи открытого банка.
Произведение совместных событий.

Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение:

$$A_1 - первая \quad батарейка \quad бракованная$$

$$\overline{A}_1 - первая \quad батарейка \quad исправна$$

$$A_2 - вторая \quad батарейка \quad бракованная$$

$$\overline{A}_2 - вторая \quad батарейка \quad исправна$$

$$A - обе \quad батарейки \quad исправны$$

$$P(A_1) = P(A_2) = 0{,}06 \Rightarrow P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$$

События A_1 и A_2 - совместны $\Rightarrow$

$$P(A) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_1) = 0{,}8836$$

Ответ:0,8836

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение:

Вероятность того, что перегорят обе лампы равна $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

Событие – не перегорела хотя бы одна лампа – противоположное.

Его вероятность равна $1 - 0,09 = 0,81$

Ответ:0,81

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение:

Событие А – попал. P(A) =0,8

P(A) =0,8 => $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ ***(вероятность непопадания)***

Все пять событий совместны

P=0,8·0,8·0,8·0,2· 0,2=0,02048

Ответ:0,02048

Задачи открытого банка.

Произведение совместных событий и сумма несовместных.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

Событие А –стекло выпустила первая фабрика

$$P(A)=0,45$$

Событие В –стекло выпустила вторая фабрика

$$P(B)=0,55$$

Событие A_1 – колесо, выпущенное первой фабрикой – бракованное.

$$P(A_1)=0,03$$

Событие B_1 – колесо выпущенное второй фабрикой – бракованное.

$$P(B_1)=0,01$$

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

$$P\left(A \cap A_1\right) = 0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$$

- куплено бракованное колесо первой ф.

$$P\left(B \cap B_1\right) = 0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$$

- куплено бракованное колесо второй ф.

Эти события - несовместны

$$P = 0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$$

Ответ:0,019

Задачи открытого банка.
Статистическое определение вероятности..

В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение:

$5000 - 2512 = 2488$ ***-родилось девочек.***

$\frac{2488}{5000} = 0{,}4976$ ***-статистическая вероятность (частота рождения).***

Ответ:0,4976

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение:

$$Частота \quad события = \frac{51}{1000} = 0{,}051$$ ***-статистическая вероятность.***

$$0{,}051 - 0{,}045 = 0{,}006$$

Ответ:0,006

На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов.

Решение:

А – произведенная тарелка имеет дефект

Р(А) =10%:100%=0,1

В – при контроле выявлена дефектная тарелка

Р(В) =80%:100%=0,8

Вероятность того, что произвели дефектную тарелку и обнаружили дефект =

$$= P(A \cap B) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08$$

Событие – произведена тарелка без дефекта и дефект не обнаружен противоположно предыдущему.

Его вероятность = $1 - 0{,}08 = 0{,}92$

Ответ:0,92

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение:

В задаче требуется узнать, какую часть всех яиц выпускает первое хозяйство. Это статистическая вероятность события «куплено яйцо из первого хозяйства»

Пусть x яиц выпускает первое хозяйство (0,4x – высшей кат.), y – второе (0,2y – высшей кат.).

Составим уравнение:

$$\frac{0{,}4x+0{,}2y}{x+y}=0{,}35 \quad \Rightarrow 0{,}05x=0{,}15y \quad \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{1}$$

Значит первое хозяйство поставляет ¾ всех яиц.

Ответ:0,75

Задачи открытого банка.

Сумма совместных событий.

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение:

Событие А – исправен первый автомат Р(А)=1-0,05=0,95

Событие В – исправен второй автомат Р(В)=1-0,05=0,95

События А и В – совместны.

А·В – исправны оба Р(А·В)=0,95·0,95=0,9025

А+В– хотя бы один исправен

Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(А)·Р(В)=0,95+0,95-0,9025=0,9975

Ответ:0,9975

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

Событие А – кофе закончилось в первом автомате Р(А)=0,3

Событие В – кофе закончилось во втором автомате Р(В)=0,3

События А и В – независимы

D – кофе закончилось в двух автоматах Р(D)=0,12

С– кофе закончится хотя бы в одном из двух

Р(С)=Р(А)+Р(В)-Р(А)·Р(В)=0,3+0,3-0,12=0,48

События «кофе закончилось хотя бы в одном» и «осталось в обоих» - противоположны.

Ответ:0,52

Р=1-Р(С)=0,52

Условная вероятность.

В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение:

Андрей обязательно попал в какую то группу (достоверное событие) Р=1

Теперь в этой группе 12 свободных мест и осталось 25 учеников..
Сергей попал в ту же группу Р=12/25

Рассматриваемые события – совместны.

$$1 \cdot \frac{12}{25} = 0{,}48$$

Ответ:0,48

На склад поступило 35 холодильников. Известно, что 5 холодильников с дефектами, но неизвестно, какие это холодильники. Найти вероятность того, что два взятых наугад холодильника будут с дефектами. Ответ округлите до сотых.

Решение:

Вероятность того, что первый взятый наугад холодильник имеет дефекты равна 5/35=1/7

Теперь из 34 холодильников 4 имеют дефекты.

Вероятность того, что второй взятый наугад холодильник имеет дефекты при условии, что один с дефектами уже взяли равна 4/34=2/14

Рассматриваемые события – совместны.

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{14}\approx 0{,}02$$

Ответ:0,02