



Решение некоторых иррациональных уравнений.



Необходимые умения и навыки:

- 1) умение решать линейные уравнения;***
- 2) умение применять формулу сокращенного умножения (ФСУ): квадрат суммы (разности);***
- 3) умение решать квадратные уравнения;***
- 4) вычислительные умения и навыки.***



Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком корня.

Рассмотрим некоторые виды иррациональных уравнений.

1.

$$\sqrt{f(x)} = a$$

ОДЗ: $f(x) \geq 0$

*Условие существования
квадратного корня*

При условии, что обе

части неотрицательны,

имеем право возвести их в

квадрат.

$a < 0$

$a \geq 0$

Ответ : \emptyset

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = a^2$$

$$f(x) = a^2$$

Осталось решить

полученное уравнение.



*Условие существования
квадратного корня*

Пример 1.

$$\sqrt{x^2 - 3} = 1 \quad \text{ОДЗ: } \boxed{x^2 - 3 \geq 0}$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 3}\right)^2 = 1^2$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 & \text{-является решением} \\ x_2 = -2 & \text{-является решением} \end{cases}$$

Ответ : ± 2



Пример 2.

*Условие существования
квадратного корня*

$$\sqrt{x^2 - 3} = -1 \quad \text{ОДЗ: } \boxed{x^2 - 3 \geq 0}$$

Но, правая часть отрицательна \Rightarrow Ответ : \emptyset

Пример 3.

*Условие существования
квадратного корня*

$$\sqrt{x^2 - 5} = 0 \quad \text{ОДЗ: } \boxed{x^2 - 5 \geq 0}$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 5}\right)^2 = 0^2$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{5} \text{ -является решением} \\ x_2 = -\sqrt{5} \text{ -является решением} \end{array} \right.$$

$$x^2 = 5 \quad \text{Ответ : } \pm\sqrt{5}$$



Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком корня.

2. $\sqrt{f(x)} = g(x)$

ОДЗ: $f(x) \geq 0$

$g(x) \geq 0$ *Условие
существования
корней
уравнения*

$(\sqrt{f(x)})^2 = g^2(x)$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.

$f(x) = g^2(x)$

Осталось решить полученное уравнение с заданными условиями.



Пример 4.

$$\sqrt{7 - 3x} = x + 7 \quad \text{ОДЗ: } 7 - 3x \geq 0$$

$$\text{УСК: } x + 7 \geq 0$$

$(\sqrt{7 - 3x})^2 = (x + 7)^2$ При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.

$$7 - 3x = x^2 + 14x + 49$$

$$x^2 + 14x + 49 + 3x - 7 = 0$$

$$x^2 + 17x + 42 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -14 \end{array} \right. \text{-не является решением}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_2 = -3 \end{array} \right. \text{-является решением}$$

Ответ : -3



Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком корня.

3. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ *ОДЗ: $f(x) \geq 0$
 $g(x) \geq 0$*

$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = \left(\sqrt{g(x)}\right)^2$ *При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.*

$$f(x) = g(x)$$

Осталось решить полученное уравнение с заданными условиями.



Пример 5.

$$\sqrt{7 - 3x} = \sqrt{x + 7}$$

$$\text{ОДЗ: } 7 - 3x \geq 0$$

$$x + 7 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{7 - 3x}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 7}\right)^2$$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.

$$7 - 3x = x + 7$$

$$-4x = 0$$

$$x = 0 \text{ -является решением}$$

Осталось решить полученное уравнение с заданными условиями.

Ответ : 0



Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком корня.

4. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a$

ОДЗ: $f(x) \geq 0$
 $g(x) \geq 0$

$$\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2$$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.

$$f^2(x) + g^2(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2$$

Уединим корень (оставим в левой части, остальное перенесем) и еще раз возведем обе части уравнения в

$$\left(2\sqrt{f(x) \cdot g(x)}\right)^2 = \left(a^2 - f^2(x) - g^2(x)\right)^2$$

На практике намного проще. Рассмотрим пример.



Пример 6.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} = \sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.

$$x - 3 + 6 - x + 2\sqrt{(x-3) \cdot (6-x)} = 3$$

$$2\sqrt{(x-3) \cdot (6-x)} = 0$$

$$\left(\sqrt{(x-3) \cdot (6-x)}\right)^2 = (0)^2 \begin{cases} x_1 = 3 \text{ - является решением} \\ x_2 = 6 \text{ - является решением} \end{cases}$$

$$(x-3) \cdot (6-x) = 0$$

Ответ : 3;6.



Пример 7.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}\right)^2 = (2)^2$$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, имеем право возвести их в квадрат.

$$x-1 + x+3 + 2\sqrt{(x-1) \cdot (x+3)} = 4$$

$$2\sqrt{(x-1) \cdot (x+3)} = -2x + 2$$

$$\left(\sqrt{(x-1) \cdot (x+3)}\right)^2 = (1-x)^2 \quad x = 1 \text{ -является решением}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 1 - 2x + x^2$$

$$4x = 4$$

Ответ : 1.



*Для отработки навыка решения таких
уравнений воспользуйся
задачником А. Г. Мордкович.*

Если не получается ответ, обращайся за помощью.

