Математика ППИ

ЛЕКЦИЯ № 14

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛ

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

- 3. Общая схема применения определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.(ознакомительно)
- 4. **Вычисление площадей плоских фигур и длин дуг плоских линий в декартовых и полярных координатах.**

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004. с. 340-375;

[3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004.. с. 253-266;

[14] Л.К. Потеряева, Г.А. Таратута. Курс высшей математики IV. Челябинск: Челябинский военный авиационный краснознамённый институт штурманов, 2002 г.с. 80-94.

- **УЧЕБНЫЙ ВОПРОС.**
- **Общая схема применения определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.**

Общая схема применения определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины Q, связанной с отрезком [a;b] изменения независимой переменной x.

Для нахождения величины можно применить один из следующих методов:

- 1) метод интегральных сумм, который базируется на определении определенного интеграла;

- **2) метод дифференциала, сущность которого заключается в том, что сначала составляется дифференциал искомой величины, а затем после интегрирования в соответствующих пределах находится значение искомой величины.**

Пример.

- **Пусть материальная точка М перемещается вдоль оси Ох под действие силы F=F(x). Найдем работу А силы по перемещению М из точки x=a в точку x=b (a<b). Для решения задачи применим метод интегральных сумм:**
- **Отрезок $[a;b]$ точками $a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b$ разобьем на n частичных отрезков.**
- **Выберем на каждом отрезке**

  $[x_{i-1};x_i]$ точку c_i.
- **Работа, совершенная силой на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, равна произведению $F(c_i)\cdot\Delta x_i$, как работа постоянной силы $F(c_i)$ на участке $[x_{i-1};x_i]$.**

- **Приближенное значение работы на [a;b] есть**

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

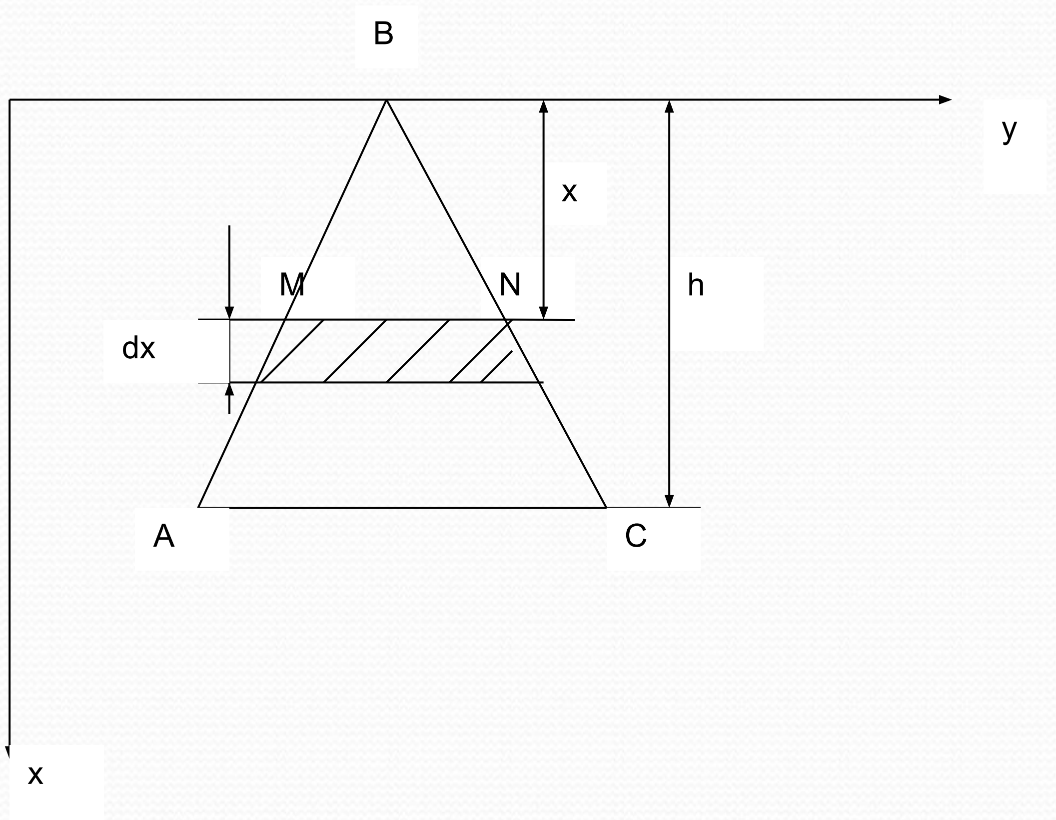
- **Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i , поэтому за точное значение работы А принимается предел интегральной суммы**

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx$$

Пример. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму треугольника с основанием 5 м и высотой 3 м. Уровень воды совпадает с вершиной треугольника.

Решение.

- По закону Паскаля давление жидкости на площадку равно ее площади S, умноженной на глубину погружения h, на плотность ρ и ускорение силы тяжести g, т.е. $P = \rho g h S$.


B
y
x
M
N
h
dx
A
C
x

- Рассмотрим горизонтальную полоску толщиной dx, находящуюся на глубине x .
- Принимая эту полоску за прямоугольник, находим дифференциал площади $dS = MN\, dx$. Из подобия треугольников BMN и ABC имеем $\frac{MN}{AC} = \frac{x}{h}$.
- Отсюда $MN = \frac{x \cdot AC}{h}$ и $dS = \frac{x \cdot AC}{h} dx = \frac{5x}{3} dx$
- Сила давления воды на эту полоску равна $dP = x\, dS$ (учитывая, что удельный вес воды равен 1). Следовательно, **сила давления воды на всю площадку ABC**

$$P = \int_0^h dP = \int_0^h x\ dS = \int_0^3 \frac{5x^2}{3} dx = \frac{5}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{5 \cdot 3^3}{3^2} = 15\ H$$

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

- **Вычисление площадей плоских фигур и длин дуг плоских линий в декартовых и полярных координатах.**

- **Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.**

Если непрерывная функция f(x)≥0 на [a;b], то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями y= f(x); y=0 , x=a , x=b , равна интегралу

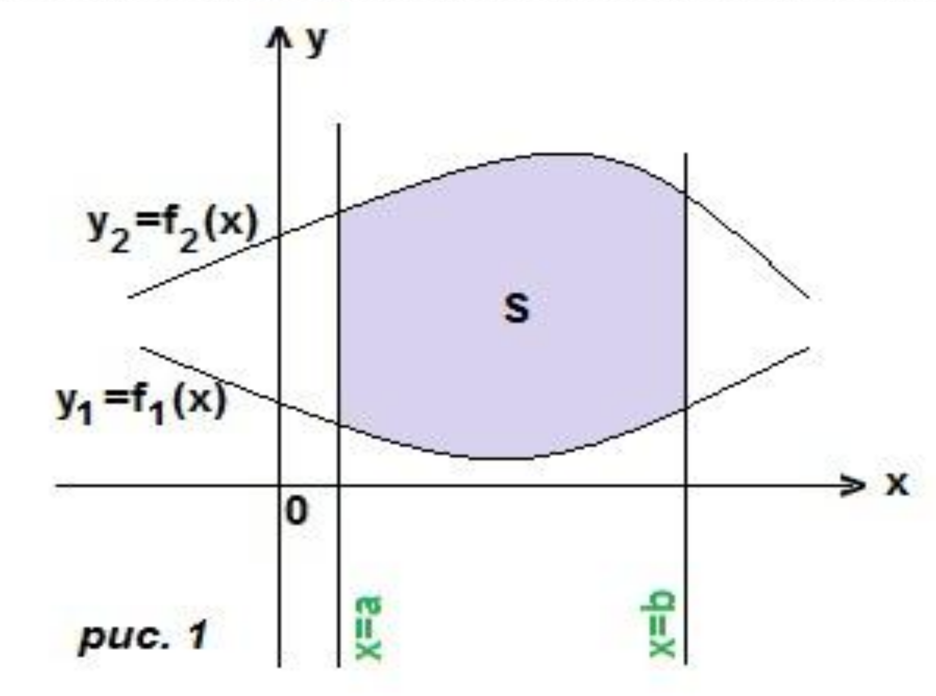
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

- **Если же f(x)≤0 на [a;b] , то**

$$S=-\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Пусть на [a;b] заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на отрезке [a;b] вычисляется по формуле

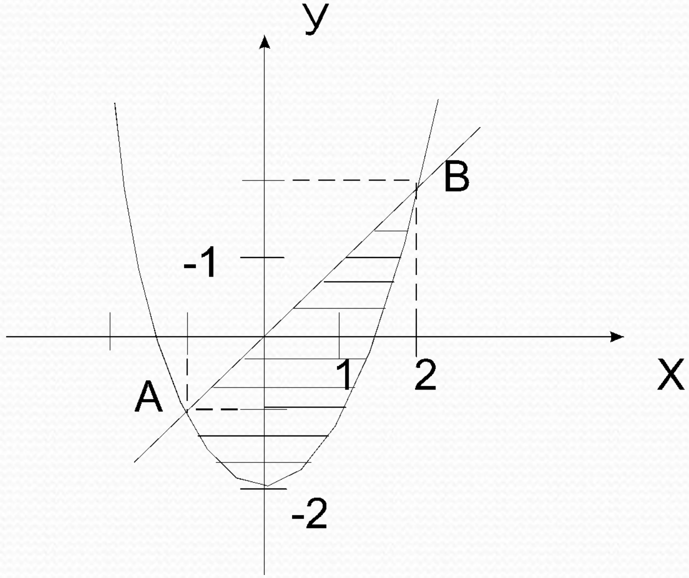
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$



- **Пример.**

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2$, $y=x$.

- Решение. Для нахождения абсцисс точек пересечения данных кривых решим систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$. Отсюда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.



$$S=\int_{-1}^{2}(x-(x^2-2))dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}-\frac{2^3}{3}+\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot 2-2\cdot(-1))=4{,}5\,кв.ед.$$

- **Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически**

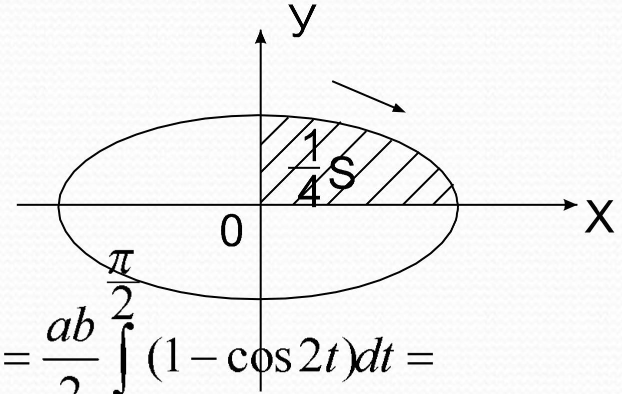
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

прямыми x=a, x=b и осью Ox (x(α)=a, x(β)=b), вычисляется по формуле ,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$$

Пример. **Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом** $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

Решение. Найдем сначала ¼ площади S.Здесь x изменяется от 0 до а, следовательно t изменяется от π/2 до 0



$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 tdt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

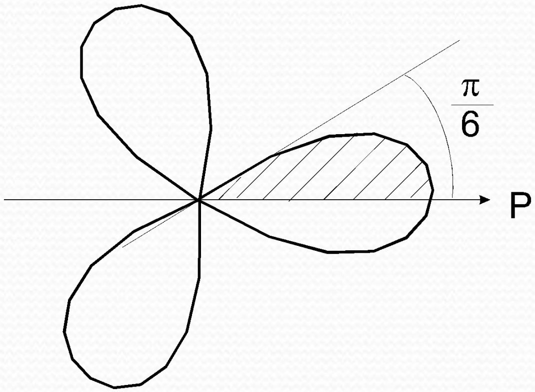
Значит: S=πab

Вычисление площадей в полярных координатах.

Площадь S плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией r=r(φ) и двумя лучами φ =α и φ= β (α <β).

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

- **Пример.** **Найти площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой:** $r = a\cos 3\varphi$
- **Решение. Найдем сначала площадь половины одного лепестка розы, т.е 1/6 часть всей площади фигуры:**



$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (a\cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)\ d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi a^2}{24}$$

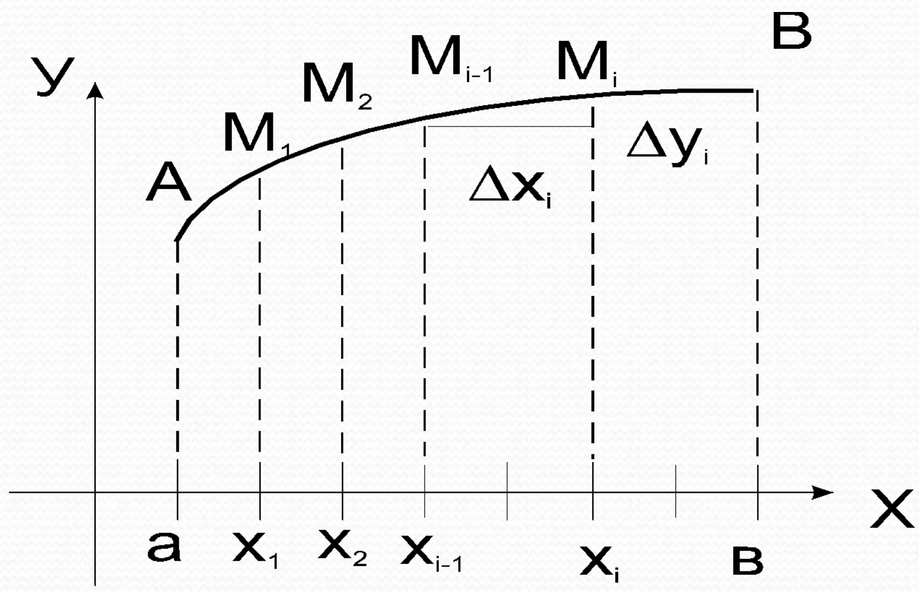
Следовательно: $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$

Вычисление длины дуги в декартовых координатах.

- **Теорема.** **Пусть кривая AB задана уравнением y=f(x), где f(x) - непрерывная функция, имеющая непрерывную производную на [a;b] . Тогда дуга AB имеет длину, равную**

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

- Доказательство. Введем обозначение $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$



$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

По теореме Лагранжа имеем $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c)$

где $x_{i-1} < c_i < x_i$.

Следовательно,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$$

Таким образом, длина вписанной ломаной равна $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)}\Delta x_i$

$$\lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

- **Пример. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки А(4;8) .**
- **Решение. Имеем**

$$y = x^{\frac{3}{2}}, y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4} x\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

- **Длина дуги кривой, заданной параметрически уравнениями** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$

вычисляется по формуле $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$

Пример. Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

Решение. Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первой четверти. Находим $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t,\ y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$

Параметр t будет изменяться от 0 до π/2 .

Итак,

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d(\sin t) = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2};$$

$$l = \frac{3a}{2}\cdot 4 = 6a.$$

Длина дуги кривой в полярных координатах.

- **Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой r=r(φ); α≤φ≤β. Если в равенствах x=rcosφ, y=rsin φ, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол , то кривую можно задать параметрически:**
- **Тогда** $$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$$

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} = \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\sin\varphi)^2} =$$

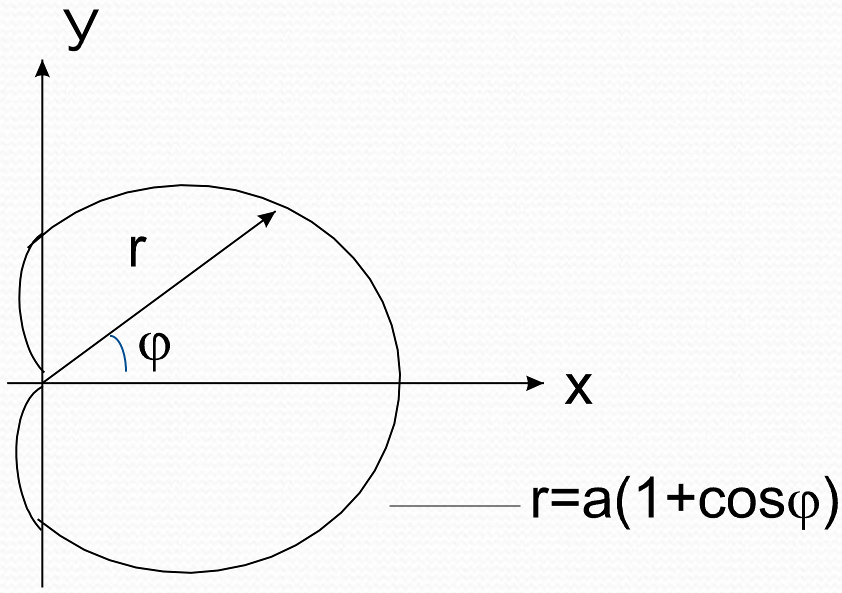
$$= \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}$$

- **Получаем** $$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

- **Пример.** Найти длину кардиоиды r=a(1+cosφ).
- Решение. Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды.

$$\frac{1}{2}l=\int_0^{\pi}\sqrt{(a(1+\cos\varphi)^2+(a(-\sin\varphi))^2}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4a$$



Таким образом , l = 8a

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ