

Экстремумы функций.

«Применение производной к
исследованию функций»

Цели занятия:

Образовательная:

- систематизировать знания и создать разноуровневые условия контроля (самоконтроля, взаимоконтроля) усвоения знаний и умений

Развивающая:

- способствовать формированию умений применять полученные знания в новой ситуации, развивать математическое мышление, речь

Воспитательная:

- содействовать воспитанию интереса к математике, активности, мобильности, умения общаться

Памятка.

Метод интервалов.

Основные положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).
2. Знак произведения не изменяется (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.
3. Знак линейной функции с ненулевым угловым коэффициентом и знак квадратичной функции справа от большего (или единственного) корня совпадают со знаком их старшего коэффициента.
4. Если строго возрастающая (убывающая) функция имеет корень, то справа от корня она положительна (отрицательна) и при переходе через корень меняет знак.

Замечания:

1. В случае отсутствия корней знак квадратичной функции совпадает со знаком ее старшего коэффициента на всей области определения этой функции.
2. Положение 3 и замечание 1 справедливы для многочлена любой степени.

Проверка домашнего задания.

Найти производную функции:

а) $3x^4 - 2x + 5$;

б) $x^2 * \sin x$.

2. Найти значения x , в которых значение функции равно 0, если:

а) $f(x) = 5x^2 + 3x$;

б) $f(x) = x * e^2$;

в) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$.

3. Решить неравенство:

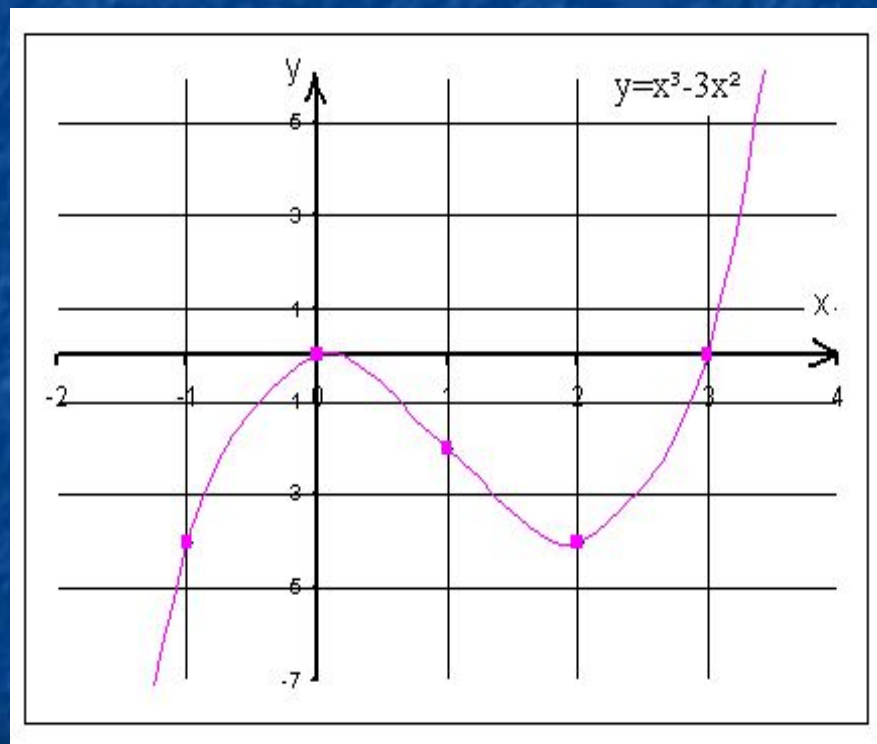
а) $15x + 1 \geq 0$;

б) $x(x - 3) < 0$;

в) $(x - 1)/x > 0$.

Работа с графиком.

- Рассмотрим рисунок, на котором изображен график функции $y=x^3-3x^2$. Рассмотрим окрестность точки $x=0$, т.е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Из рисунка видно, что такая окрестность существует и наибольшее значение функция принимает в точке $x=0$. Эту точку называют точкой максимума. Аналогично точку $x=2$ называют точкой минимума, так как функция в этой точке принимает значение меньше, чем в любой точке окрестности $x=2$.



Нужно запомнить:

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех x отличных от x_0 из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.
(рисунок 1)

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех x отличных от x_0 из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.
(рисунок 2)

Точки максимума и точки минимума называются **точками экстремума**.

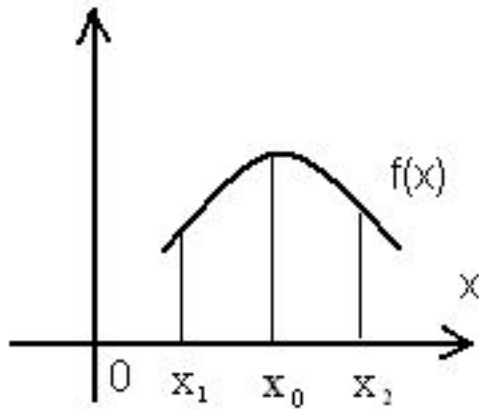


рисунок 1

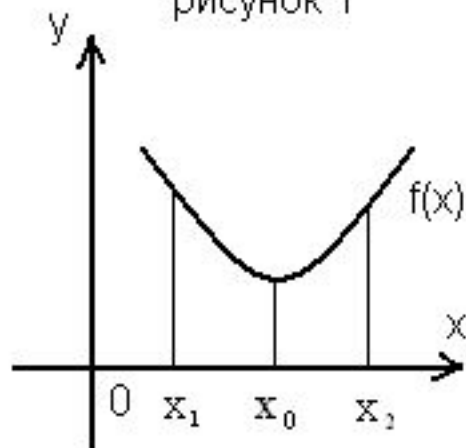
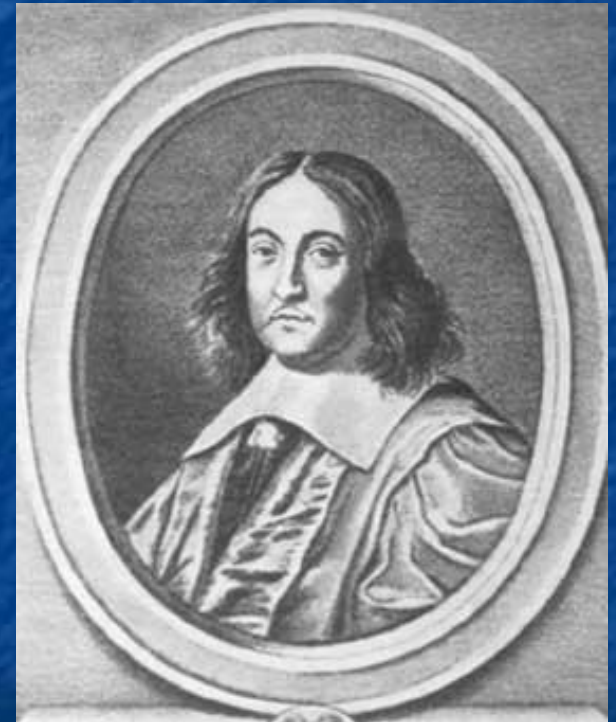


рисунок 2

Немного из истории математики:

Пьер Ферма.
(1601 – 1665)

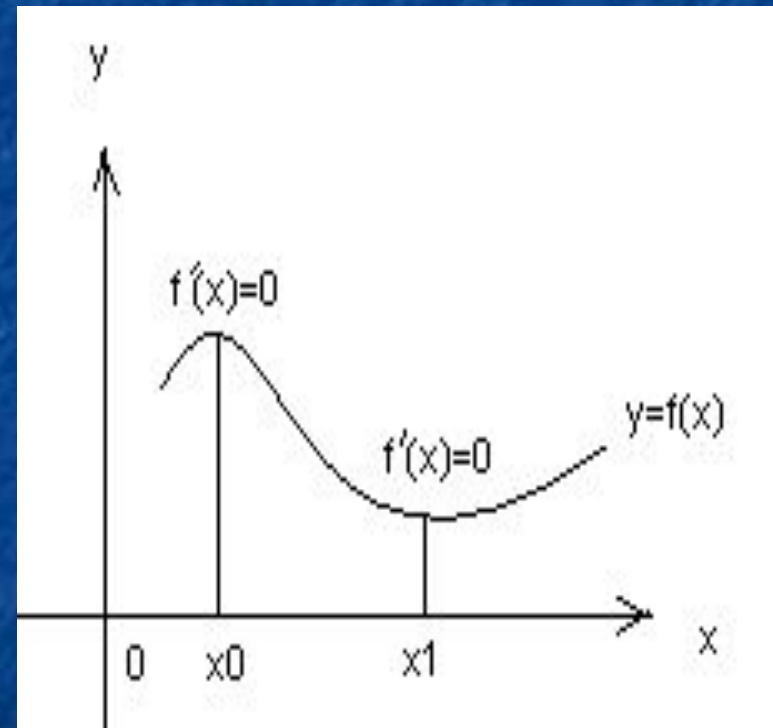
Работа советника в городском парламенте Тулузы не мешала Ферма заниматься математикой. Постепенно он приобрел славу одного из первых математиков Франции. Он соперничал с французским ученым Р. Декартом в создании аналитической геометрии, общих методов решения задач на максимум и минимум. Его приемы построения касательных к кривым, вычисления площадей криволинейных фигур, вычисления длин криволинейных прокладывали дорогу к созданию дифференциального и интегрального исчисления. С работ Ферма началась новая математическая наука - теория чисел.



Теорема Ферма.

Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x)=0$.

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x)$ равен нулю.



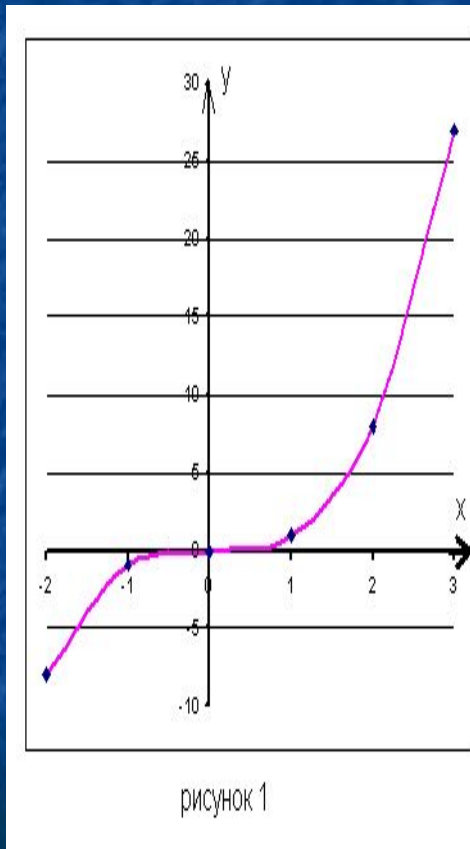
Стационарные и критические точки

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными**, т.е. если $f'(x)=0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x - точка экстремума.

Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называются **критическими точками** этой функции.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^3$. Ее производная $f'(x)=3x^2$, $f'(x)=0$. Однако $x=0$ не является точкой экстремума, так как функция возрастает на всей числовой оси (рисунок 1).

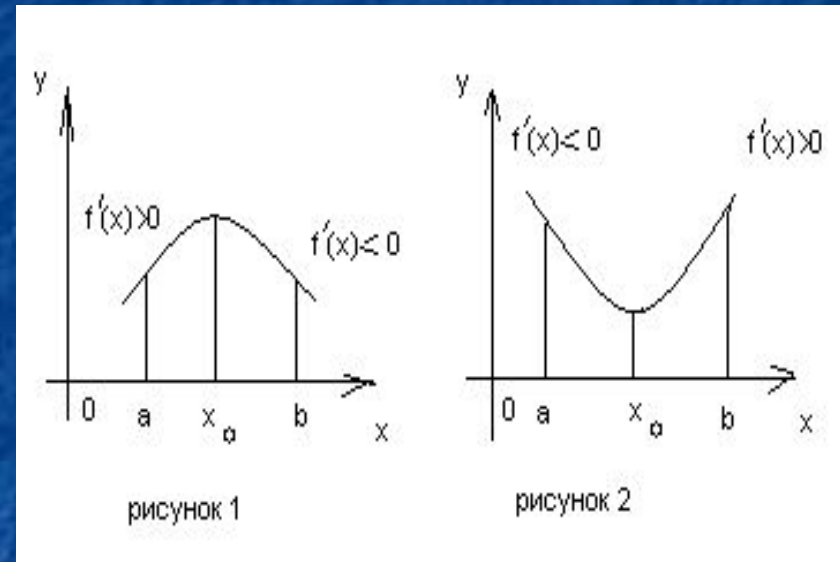
Сформулируйте достаточное условие того, что стационарная точка является точкой экстремума.



Теорема: Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$.

Тогда:

- 1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0 , то x_0 точка максимума функции $f(x)$ (рисунок 1).
- 2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 точка минимума функции $f(x)$ (рисунок 2).



План нахождения экстремум функции.

1. Найти производную функции.
2. Найти стационарные точки функции, т.е. производную приравнять к нулю.
3. Используя метод интервалов выяснить, как меняются знаки производной.
4. По знакам перехода функции определить точки минимума или максимума.

Рассмотрим задание 1:

Найти точки экстремума функции $f(x)=9x-3$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

$$f'(x)=9$$

2) Найдем стационарные точки:

Стационарных точек нет.

3) Данная функция линейная и возрастает на всей числовой оси, поэтому точек экстремума функция не имеет.

Ответ: функция $f(x)=9x-3$ не имеет точек экстремума.

Рассмотрим задание 2:

Найти точки экстремума функции $f(x)=x^2-2x$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

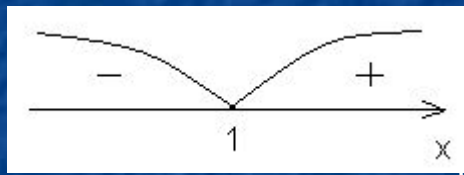
$$f'(x)=2x-2$$

2) Найдем стационарные точки:

$$2x-2=0$$

$$x=1.$$

3) Используя метод интервалов, найдем, как меняется знак производной (см. рисунок):



4) При переходе через точку $x=1$ знак производной меняется со знака с «-» на «+», поэтому $x=1$ – является точкой минимума.

Ответ: точка $x=1$ является точкой минимума функции $f(x)=x^2-2x$.

Рассмотрим задание 3:

Найти точки экстремума функции $f(x)=x^4-4x^3$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

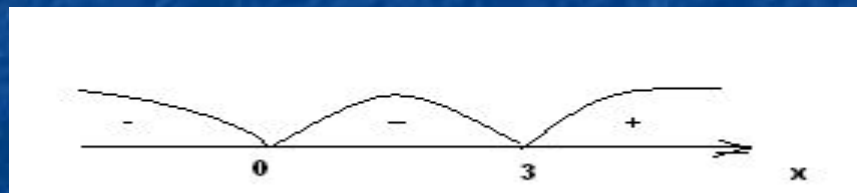
$$f'(x)=4x^3-12x^2$$

2) Найдем стационарные точки:

$$4x^3-12x^2=0$$

$$x_1=0, x_2=3.$$

3) Используя метод интервалов, найдем, как меняется знак производной (см. рисунок):

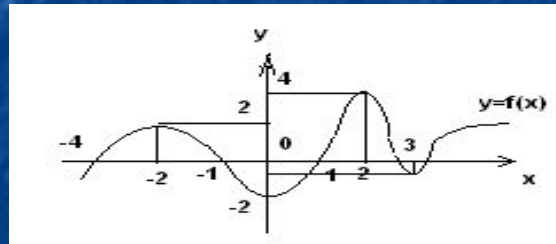


4) При переходе через точку $x=0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума, а при переходе через точку $x_1=3$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому $x_2=3$ – является точкой минимума.

Ответ: точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x)=x^4-4x^3$.

Самостоятельно выполнить следующие задания:

1) По данному рисунку определить точки максимума и минимума функции $y=f(x)$.



2) Найти стационарные точки:

а) $y=e^2 - 2e$;

б) $y=2x^3-15x^2+36x$;

в) $y=\sin x - \cos x$;

г) $y=(2+x^2)/x$.

3) Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=x^3-x$;

б) $f(x)=x^4-8x^2+3$;

в) $f(x)=x+\sin x$;

г) $f(x)=x-\cos 2x$.

Физкультминутка.

Для учащихся предлагается выполнить несколько физических упражнений, чтобы снять усталость и напряжение за длительную работу на компьютере.

1. Сидя на стуле:

- руки за голову;
- локти развести пошире, голову наклонить назад;
- локти вперед, голову вперед;
- руки расслабленно вниз;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.

2. Сидя на стуле:

- голову плавно отвести назад;
- наклонить плавно голову вперед;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.

3. Упражнение для глаз:

- быстро поморгать;
- закрыть глаза и посидеть спокойно;
- медленно сосчитать до пяти;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.

4. Упражнение для глаз:

- крепко зажмурить глаза;
- медленно сосчитать до пяти;
- открыть глаза и посмотреть вдаль;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.

5. Упражнение для глаз:

- посмотреть на указательный палец вытянутой руки;
- посмотреть вдаль;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.

Тестирование:

Для выполнения теста необходимо открыть файл, который находится в папке «Экстремумы функции» на диске С: под названием «Тест № 1». В результате выполнения работы вы получаете оценку за свои знания. Также для систематизации знания вы можете выполнить следующие тесты на повторение изученного ранее материала («Тест №2», «Тест №3», «Тест №4», «Тест №5»).

Домашнее задание:

1. Найти экстремумы функции:

а) $y=x^3-4x^2$;

б) $y=3x^4-4x^3$;

2. Найти стационарные точки:

а) $y=x^4-4x^3-8x^2+1$;

б) $y=\cos 2x+2\cos x$.

Спасибо за внимание!