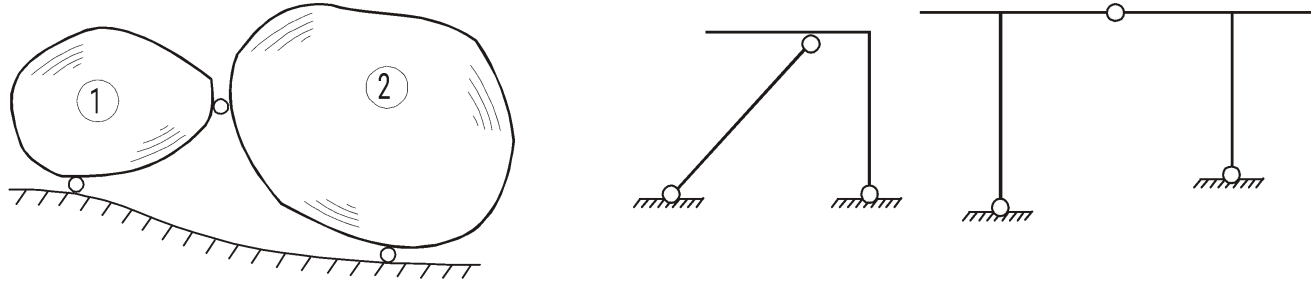


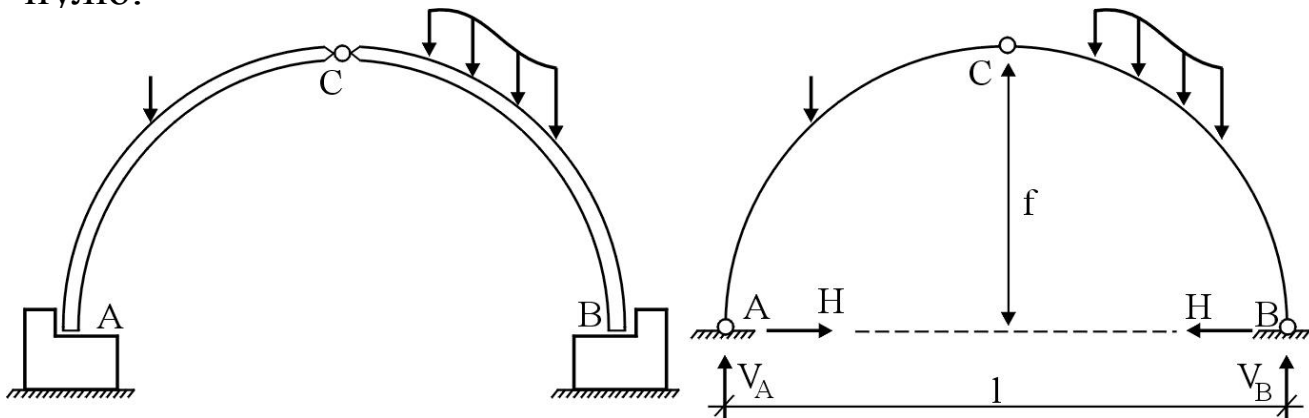
ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ

Трехшарнирные арки и рамы являются разновидностями трехшарнирной системы, состоящей из двух дисков и земли, соединенных между собой цилиндрическими шарнирами.

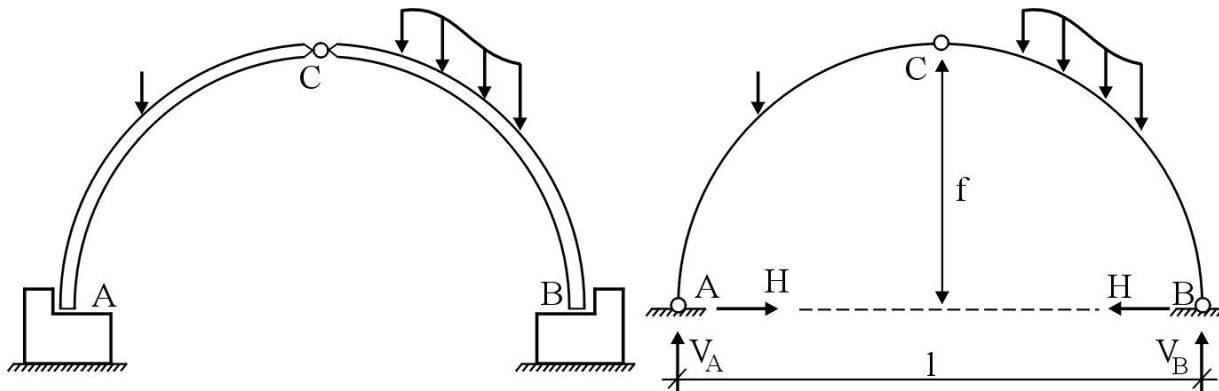


Если диски 1, 2 прямолинейные или ломаные стержни, то систему называют Трехшарнирной рамой, а если 1, 2 – криволинейные стержни, то – трехшарнирной аркой.

Трехшарнирные системы являются распорными, то есть при наличии лишь вертикальной нагрузки горизонтальные составляющие реакций опор H не равны нулю.



Таким образом арка стремится раздвинуть свои опоры, например, стены, на которые она опирается.



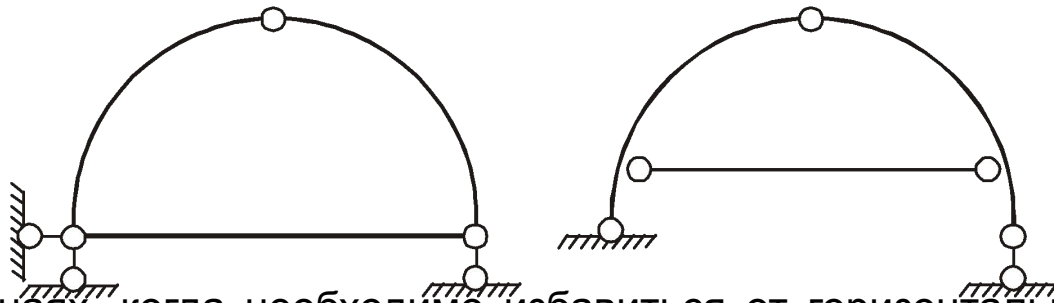
Арочные системы многие века были одной из основных архитектурно-строительных форм при возведении мостов, тоннелей, акведуков, перекрытий соборов, дворцов и т.п.

Опорные шарниры А и В арки называют **пятовыми**, а шарнир С – **ключевым**, просто **ключом** или **замком** арки. Прямая АВ – **линия пят**. Кратчайшее расстояние от линии пят до ключа – **стрела подъема** f . Если А и В находятся на разных уровнях, арку называют ползучей.

Различают пологие арки $f/l = 0.1 \div 0.2$, нормальные $f/l = 0.2 \div 0.3$

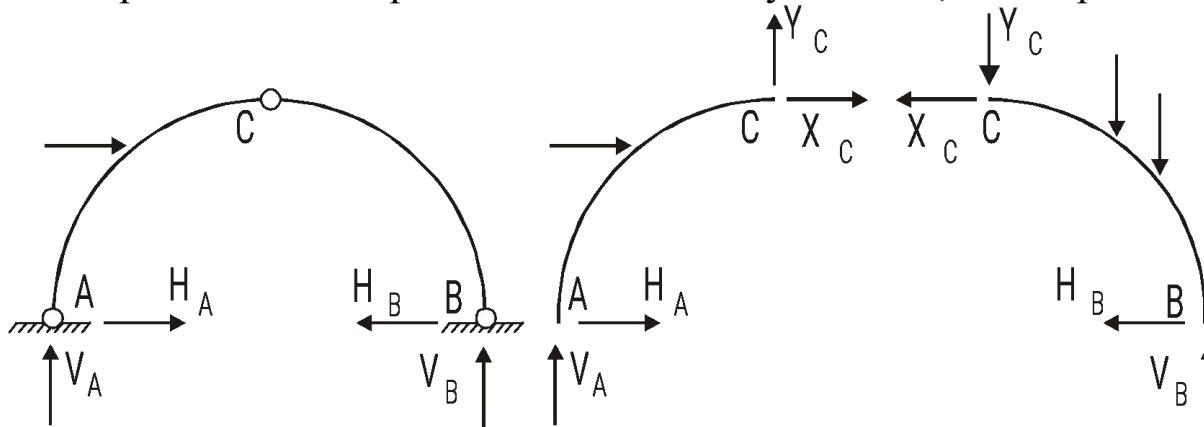
и подъемистые, для которых $f/l > 0.3$.

По очертанию оси арки бывают циркульными (круговыми), эллипсоидными, параболическими, стрельчатými, комбинированными и т.д.



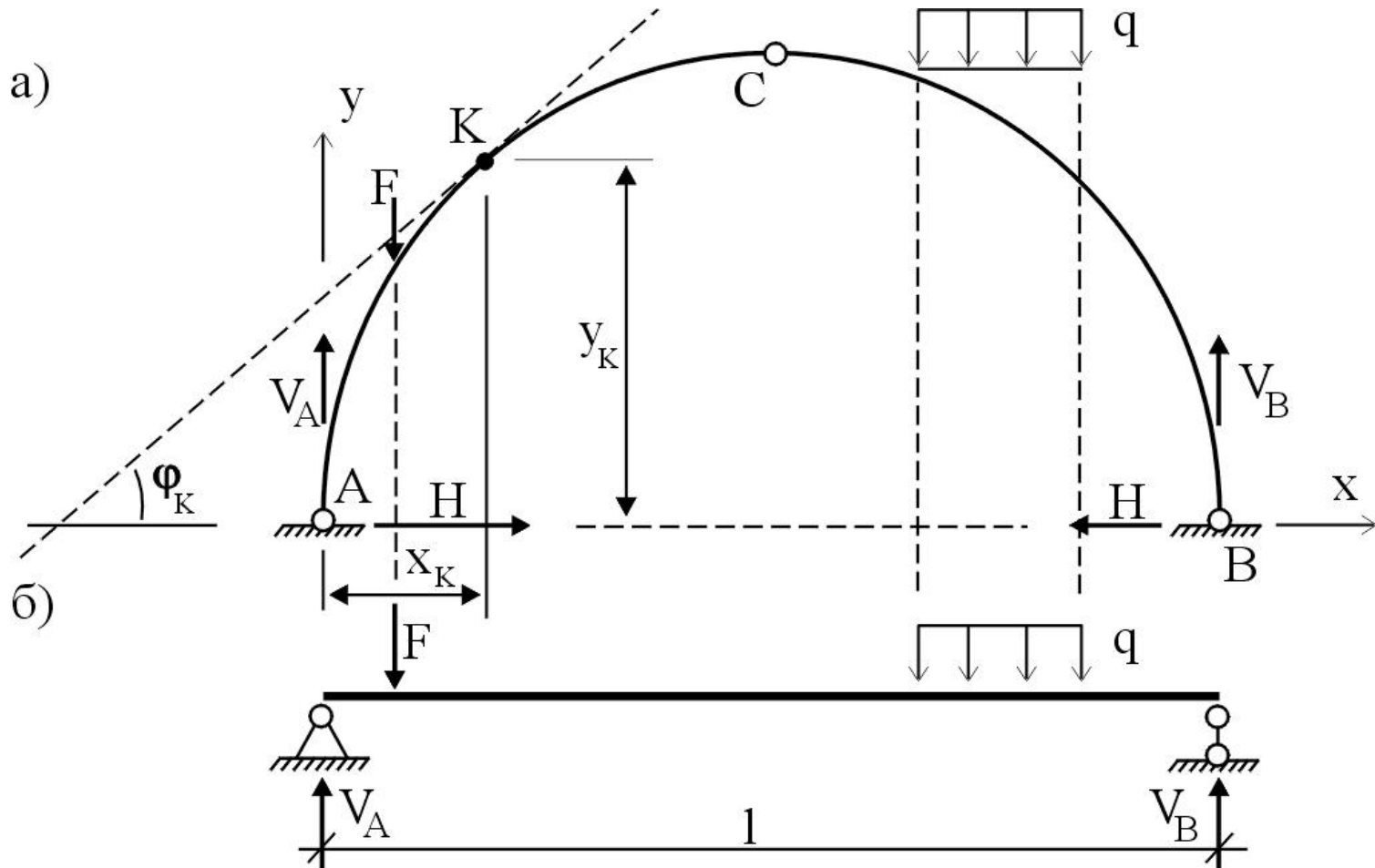
В тех случаях, когда необходимо избавиться от горизонтальных давлений арки или уменьшить их, одна из опор делается подвижной, а неизменяемость системы достигается

постановкой затяжки в виде троса или стержня. Расчет трехшарнирной системы начинается с определения реакций опор. С учетом того, что систему можно расчленить и представить в виде двух частей, для определения и проверки

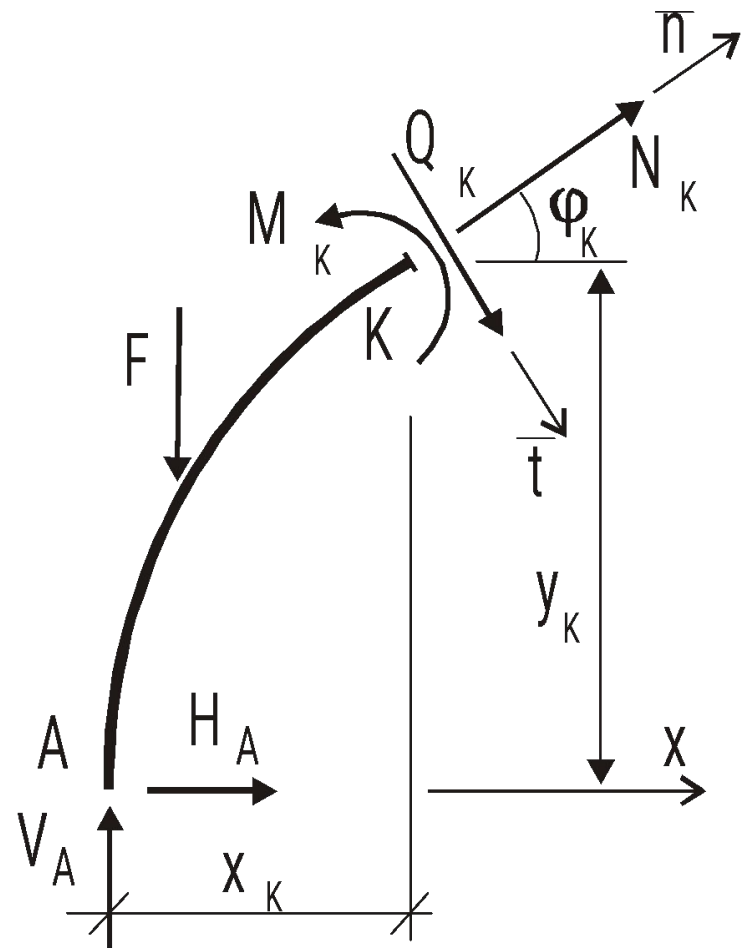
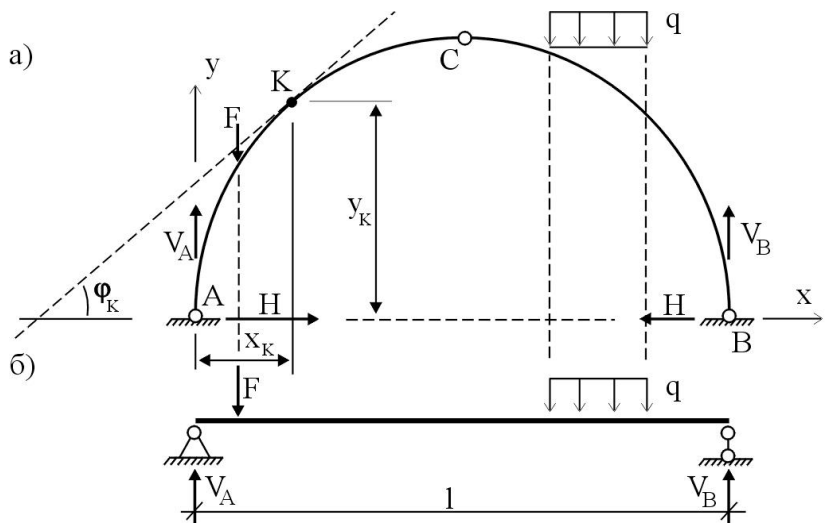


найденных значений реакций опор можно воспользоваться следующими условиями статического равновесия арки и ее частей:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C^{AC} = 0; \quad \sum M_C^{BC} = 0.$$



Реакции V_A , V_B , в случае действия на арку лишь вертикальной нагрузки, называют балочными, так как они равны опорным реакциям балки того же пролета l , что и арка и не зависят от очертания ее оси.



Внутренние усилия M , Q , N определяют по правилам, сформулированным в разделе «сопротивление материалов». Внутренние усилия в произвольном сечении «К» арки следуют из условия равновесия ее отсеченной части:

из условия $\sum M_K = 0$ следует:

$$M_K = M_{B,K} - H \cdot y_K,$$

а из $\sum F_{i,t} = 0$ и $\sum F_{i,n} = 0$ следуют:

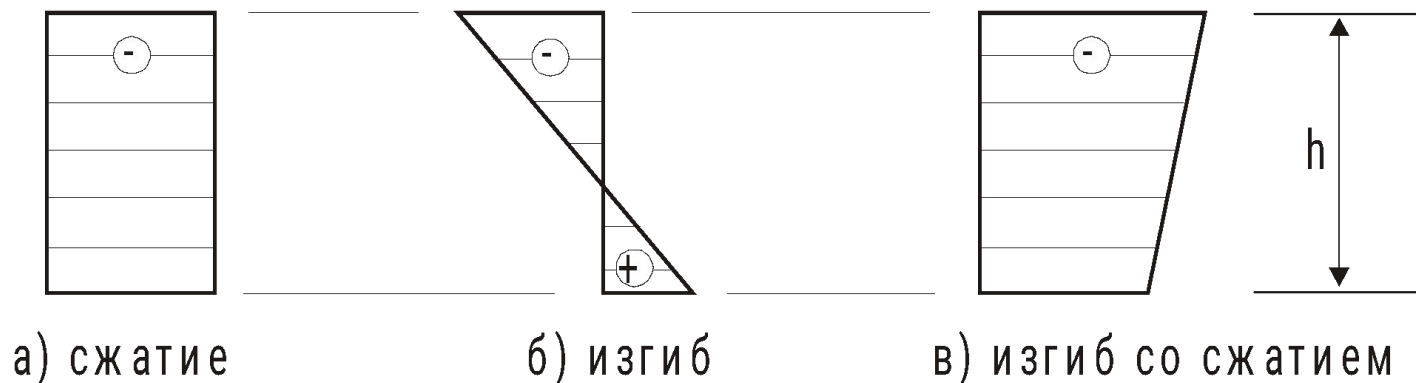
$$Q_K = Q_{B,K} \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K,$$

$$N_K = -Q_{B,K} \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K,$$

Трехшарнирные системы находят широкое применение в различных сооружениях: мосты, перекрытия зданий и т.д. Уже из выражений для Q и M видно, что

$$M_K \leq M_{B,K}, \quad Q_K \leq Q_{B,K}$$

то есть M и Q меньше, чем в балках. Если балка работает на изгиб, то арка – на изгиб и сжатие. Подбором очертания оси арки, то есть подбором зависимости $y = f(x)$, можно исключить наличие в ее сечениях изгибающих моментов $N \neq 0$. В случае когда $M = 0$, условия работы материала арки оказываются оптимальными, что следует из сравнения эпюр нормальных напряжений σ в ее поперечном сечении.



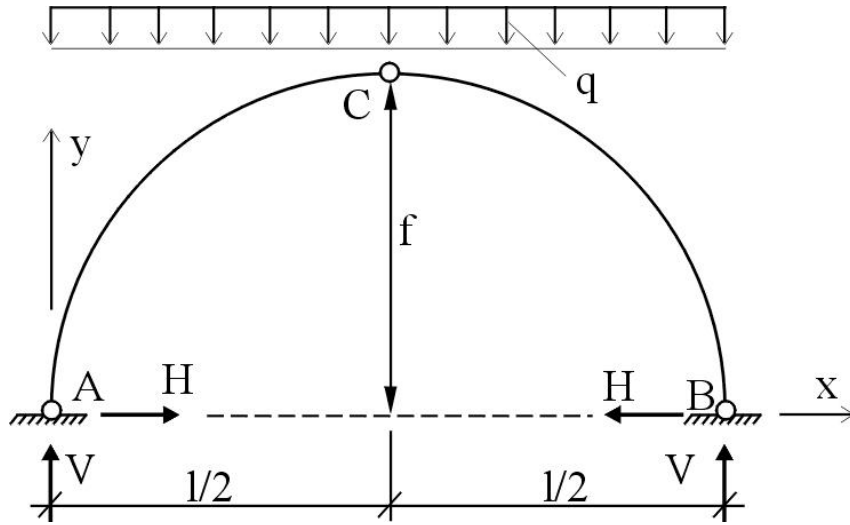
Более рациональная работа материала арки по сравнению с работой материала балки делает первую более приемлемой при перекрытии больших пролетов, когда балка становится экономически невыгодной. К минусам же арки следует отнести необходимость увеличения размеров ее опорных устройств для оказания сопротивления распору.

Уравнение рациональной оси арки, то есть когда $M = 0$, следует при заданной вертикальной нагрузке из выражения для M :

$$y = M_B / H.$$

Таким образом, при наличии лишь вертикальной нагрузки очертание оси арки будет рациональной, если оно меняется по закону изменения балочного момента.

Рассмотрим, например, арку под действием равномерно распределенной нагрузки.



$$M_B = \frac{ql}{2} \cdot x - q \frac{x^2}{2} = \frac{qx}{2} \cdot (l - x),$$

$$H = M_{B,C} / f = \frac{ql^2}{8f},$$

$$y = M_B / H = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - x)x$$

или

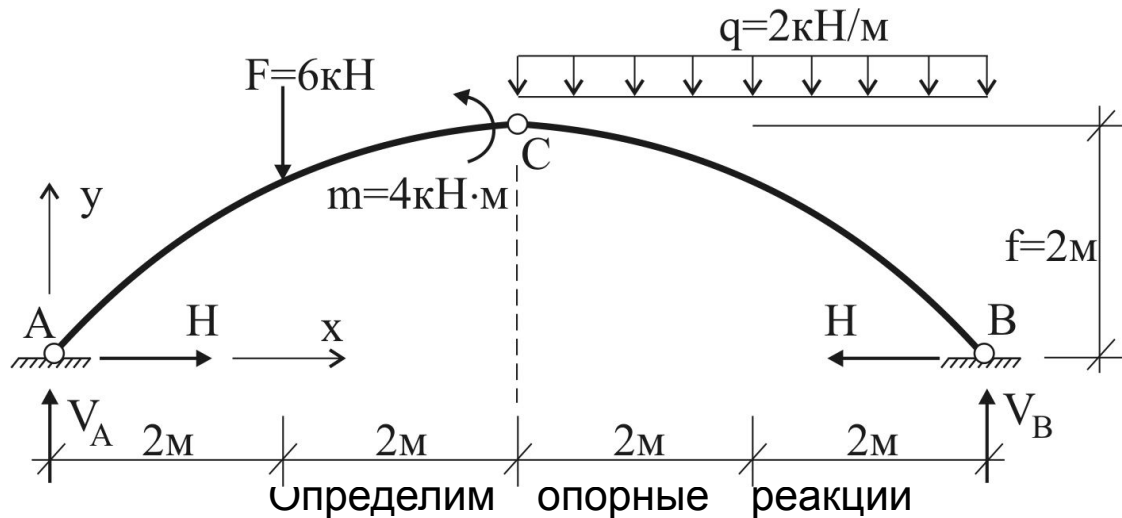
$$(y - f) = -\frac{4f}{l^2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

То есть, рациональная ось арки в данном случае – квадратная парабола с вершиной в т.

$$C\left(\frac{l}{2}; f\right)$$

Рассмотрим пример построения эпюр M , Q , N в трехшарнирной арке, ось которой очерчена по квадратной параболе. В принятой системе координат уравнение оси арки имеет вид

$$y = x \cdot (1 - x / 8).$$



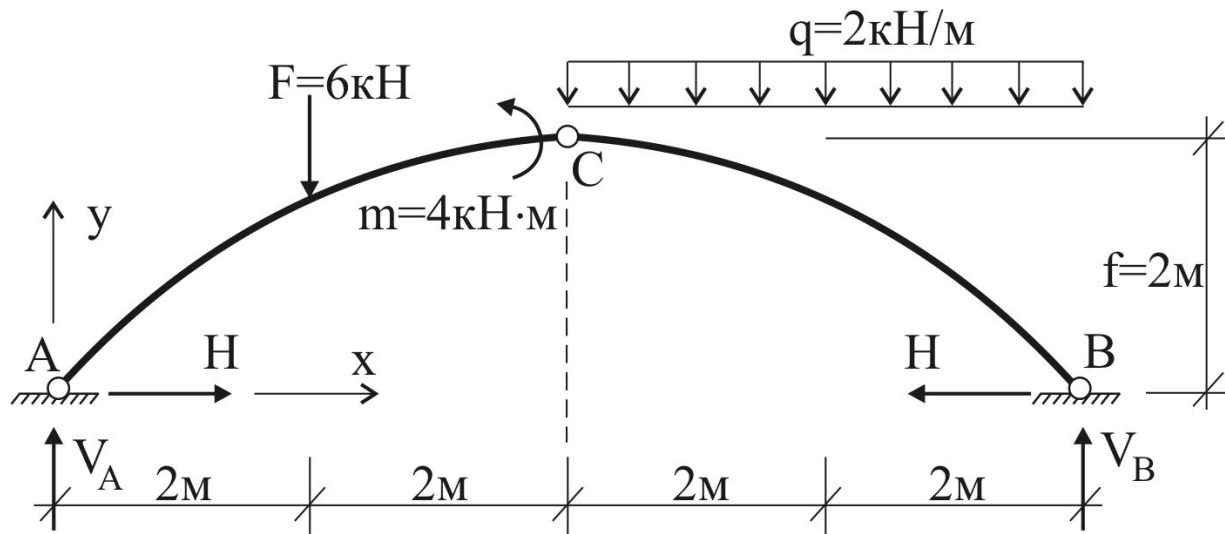
$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 8 - F \cdot 6 - m - q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_A = 7 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 6 + m - F \cdot 2 = 0, \quad V_B = 7 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{AC} = 0: V_A \cdot 4 - H \cdot f - F \cdot 2 - m = 0, \quad H = 6 \text{ кН},$$

Проверка:

$$\sum M_C^{CB} = -V_B \cdot 4 + H \cdot f + q \cdot 4 \cdot 2 = -7 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 28 - 28 = 0$$



Рассматриваемая арка имеет три грузовых участка, в пределах каждого из которых имеем:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -V_A \cdot \sin \varphi - H \cdot \cos \varphi, \\ Q_1 &= V_A \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi, \\ M_1 &= V_A \cdot x - H \cdot y; \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq 2$$

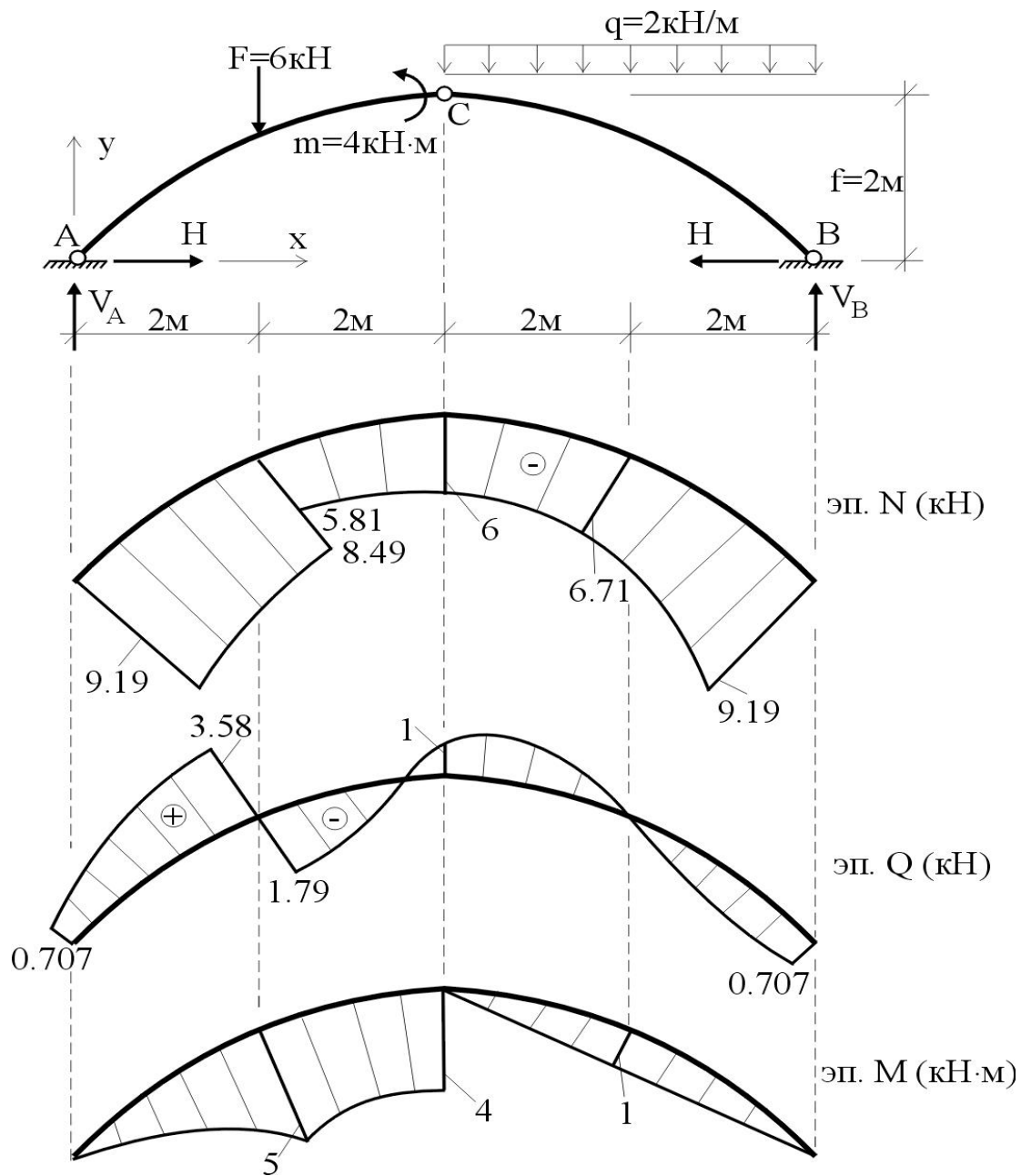
$$\left. \begin{aligned} N_2 &= (-V_A + F) \cdot \sin \varphi - H \cdot \cos \varphi, \\ Q_2 &= (V_A - F) \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi, \\ M_2 &= V_A \cdot x - H \cdot y - F(x - 2); \end{aligned} \right\} 2 \leq x \leq 4$$

$$\left. \begin{aligned} N_3 &= [-V_A + F + q(x - 4)] \cdot \sin \varphi - H \cdot \cos \varphi, \\ Q_3 &= [V_A - F - q(x - 4)] \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi, \\ M_3 &= V_A \cdot x - H \cdot y - F(x - 2) - m - q \cdot \frac{(x - 4)^2}{2}. \end{aligned} \right\} 4 \leq x \leq 8$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi = y' = 1 - x/4$, нетрудно получить и значения $\sin\varphi, \cos\varphi$.

Результаты вычислений $y, \operatorname{tg}\varphi, \varphi, \sin\varphi, \cos\varphi$ и N, Q и M для сечений, отстоящих друг от друга по горизонтали на 2м, приведены в таблице.

x (м)	y (м)	tgφ	φ град	sinφ	cosφ	N (кН)	Q (кН)	M (кНм)
0	0	1	45	0.707	0.707	-9.19	0.707	0
2	1.5	0.5	≈26.6	0.447	0.894	-8.49	3.58	5
						-5.81	-1.79	
4	2	0	0	0	1	-6	1	4
								0
6	1.5	-0.5	-26.6	-0.447	0.894	-6.71	0	1
8	0	-1	-45	0.707	0.707	-9.19	-0.70	0



АРКА