Теория принятия решений в условиях риска и неопределенности

Типы неопределенности

В случае если лицо, принимающее решение, имеет лишь представление о *возможных вариантах* развития событий в будущем, то говорят о принятии решения ***в условиях полной неопределенности***

Если лицо, принимающее решение, имеет не только представление о *возможных вариантах* развития событий в будущем, но и имеет объективные оценки вероятностей реализации различных сценариев будущего, то говорят о принятии решения ***в условиях риска***

Особенности принятия решения

- наличие не менее двух взаимоисключающих вариантов, из которых должен быть выбран только один
- наличия критерия, позволяющего количественно оценивать имеющиеся варианты, и по этим оценкам осуществлять выбор

Этапы исследования задач принятия решений

- 1-й этап - построение математической модели ЗПР
- 2-й этап — формулировка принципа оптимальности и нахождение оптимального решения
- 3-й этап - анализ полученных результатов

Принятие решений в условиях неопределенности

1-й этап: построение математической модели ЗПР

Набор объектов $< X, Y, F >$ составляет реализационную структуру задачи принятия решения, где

X – множество допустимых вариантов (решений) (контролируемые факторы)

Y – множество возможных состояний среды (неконтролируемые факторы)

$F: X \times Y \to R$ – целевая функция (математический эквивалент цели операции)

Пример 1

Энергетическая компания должна выбрать проект электростанции. Всего имеется 4 типа электростанций: А1 — тепловые, А2 — приплотинные, А3 — бесшлюзовые, А4 — шлюзовые.

Последствия, связанные со строительством и дальнейшей эксплуатацией электростанции каждого из этих типов, зависят от ряда неопределенных факторов (состояния погоды, возможности наводнения, цены топлива, расходы по транспортировке топлива и т.п.).

Предположим, что можно выделить четыре варианта сочетаний данных факторов — они выступают в качестве состояний среды и обозначаются здесь через В1, В2, В3, В4.

Экономическая эффективность электростанции определяется в данном случае как процент прироста дохода в течение одного года эксплуатации электростанции в сопоставлении с капитальными затратами; зависит как от типа электростанции, так и от состояния среды и определяется следующей таблицей

Пример 1

Прирост дохода, %

	B1	B2	B3	B4
A1	7	5	1	10
A2	5	2	8	4
A3	1	3	4	12
A4	8	5	1	10

Какую альтернативу следует считать оптимальной?

Принцип доминирования

- Говорят, что альтернатива i_1 доминирует альтернативу i_2 ($i_1 \geq i_2$), если при любом состоянии среды выигрыш принимающего решение при выборе им альтернативы i_1 будет не меньше, чем его выигрыш при выборе альтернативы i_2, т. е. выполняется условие

$$a_{i_1}^{j} \geq a_{i_2}^{j}, \ \textit{при всех} \ \ j = 1,\dots,\mathrm{m}$$

Пример 1

	B1	B2	B3	B4
A1	7	5	1	10
A2	5	2	8	4
A3	1	3	4	12
A4	8	5	1	10

	B1	B2	B3	B4
A2	5	2	8	4
A3	1	3	4	12
A4	8	5	1	10

Основной метод выбора оптимальной альтернативы

Формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать каждой альтернативе единую числовую оценку

Оптимальной будет та альтернатива, которая является наиболее предпочтительной, то есть имеет наибольшую числовую оценку (для случая функции потерь — наименьшую числовую оценку)

Типы критериев

- Критерий Вальда (гарантированного результата)
- Критерий Лапласа
- Критерий Сэвиджа
- Критерий Гурвица

Критерий Вальда

Гипотеза: "При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант"

- Задача на max

Оценка альтернативы: $W(i) = \min_j a_i^j$

Оптимальная стратегия:

$$W(i^*) = \max_i W(i) = \max_i \min_j a_i^j$$

- Задача на min

Оценка альтернативы: $W(i) = \max\limits_{j} a_i^j$

Оптимальная стратегия:

$$W(i^*) = \min_i W(i) = \min_i \max_j a_i^j$$

Решение примера 1

	B1	B2	B3	B4	min	
A2	5	2	8	4	2	max
A3	1	3	4	12	1	
A4	8	5	1	10	1	

Оптимальная альтернатива – А2 (строительство приплотинной электростанции)

Критерий Лапласа

Гипотеза: "Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными"

Оценка альтернативы: $$W(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j$$

Оптимальная стратегия в задаче на max:

$$W(i^*) = \max_{1 \le i \le n} W(i)$$

Пример 1

	B1 (1/4)	B2 (1/4)	B3 (1/4)	B4 (1/4)	W(i)
A2	5	2	8	4	19/4
A3	1	3	4	12	20/4
A4	8	5	1	10	24/4

max

$$W(2) = 5*\frac{1}{4} + 2*\frac{1}{4} + 8*\frac{1}{4} + 4*\frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

Оптимальная альтернатива – А4 (строительство шлюзовой электростанции)

Критерий Сэвиджа

Пусть целевая функция *F*(*x,y*) есть функция выигрыша ОС. Следовательно, ОС стремится максимизировать целевую функцию

Составим *функцию сожаления для задачи на max*:

$$\varphi(x, y) = \max_x F(x, y) - F(x, y)$$

Функция сожаления для задачи на min:

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - \min_x F(x, y)$$

Затем для функции $\varphi(x, y)$ применяется критерий наилучшего гарантированного результата, то есть

$$W(x^*) = \min_x \max_y \varphi(x, y)$$

Пример 1

Исходная матрица

	B1	B2	B3	B4
A2	5	2	8	4
A3	1	3	4	12
A4	8	5	1	10

Матрица сожалений

	B1	B2	B3	B4	max
A2	3	3	0	8	8
A3	7	2	4	0	7
A4	0	0	7	2	7

Оптимальные альтернативы – A3 и A4 (строительство приплотинной или бесшлюзовой электростанции)

Критерий Гурвица

ГИПОТЕЗА: при выборе альтернативы необходимо руководствоваться средним результатом, характеризующем состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом

$$0 \le \alpha \le 1$$

Оценка альтернативы для задачи на max:	$W(i) = \alpha \min\limits_j a_i^j + (1-\alpha)\max\limits_j a_i^j$

Оценка альтернативы для задачи на min:	$W(i) = \alpha \max\limits_j a_i^j + (1-\alpha)\min\limits_j a_i^j$

Критерий Гурвица

Оптимальная стратегия в задаче на max:

$$W(i^*) = \max_{1 \le i \le n} W(i)$$

Оптимальная стратегия в задаче на min:

$$W(i^*) = \min_{1 \le i \le n} W(i)$$

Пример 1

	B1	B2	B3	B4	max	min	W(i)
A2	5	2	8	4	8	2	6
A3	1	3	4	12	12	1	8,3
A4	8	5	1	10	10	1	7

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

$$W(2) = \frac{2}{3} * 8 + \frac{1}{3} * 2 = \frac{18}{3} = 6$$

Оптимальная альтернатива – А3 (строительство бесшлюзовой электростанции)

Выводы

Критерий Вальда – альтернатива 2

Критерий Лапласа – альтернатива 4

Критерий Сэвиджа – альтернативы 3 и 4

Критерий Гурвица – альтернатива 3

Принятие решений в условиях риска

Типы критериев

- Ожидаемое значение

$$W(i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * P_j, \quad i=\overline{1,m}$$

- Ожидаемые упущенные возможности

$$W(i)=\sum_{j=1}^{n} r_{ij} * P_j, \; i=\overline{1,m}$$

- Ожидаемое значение - Риск

$$W(i)=M(x)-\sqrt{D(x)}$$

$$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2$$

Пример. Ожидаемое значение

Pi	0,2	0,3	0,4	0,1
	B1	B2	B3	B4
A2	5	2	8	4
A3	1	3	4	12
A4	8	5	1	10

$$W(A_2) = 0{,}2*5 + 0{,}3*2 + 0{,}4*8 + 0{,}1*4 = 5{,}2$$

$$W(A_3) = 3{,}9$$

$$W(A_4) = 4{,}5$$

Пример. Ожидаемые упущенные возможности

Pj	0,2	0,3	0,4	0,1
	B1	B2	B3	B4
A2	3	3	0	8
A3	7	2	4	0
A4	0	0	7	2

$$W(A_2) = 0{,}2*3 + 0{,}3*3 + 0{,}4*0 + 0{,}1*8 = 2{,}3$$

$$W(A_3) = 3{,}6$$

$$W(A_4) = 3{,}0$$

Пример. Ожидаемое значение - риск

Pi	0,2	0,3	0,4	0,1
	B1	B2	B3	B4
A2	5	2	8	4
A3	1	3	4	12
A4	8	5	1	10

$$W(A_2) = M(A_2) - \sqrt{D(A_2)} = 5{,}2 - \sqrt{6{,}36} = 2{,}67$$

$$M(A_2) = 5{,}2$$

$$D(A_2) = (5{,}2-5)^2 * 0{,}2 + (5{,}2-2)^2 * 0{,}3 + (5{,}2-8)^2 * 0{,}4 + (5{,}2-4)^2 * 0{,}1 = 6{,}36$$