

Лектор Буганова
С.Н.

**Теория вероятностей. События.
Виды событий. Вероятностное
пространство. Вероятностные
схемы: классическая,
геометрическая**

Дисциплина Математика 2
Лекция 11

План лекции

1. Элементы комбинаторики.
2. Основные понятия.
3. Классификация событий.
4. Геометрические вероятности.
5. Примеры.

Элементы комбинаторики

Имеется совокупность n объектов, назовем ее **генеральной совокупностью**.

Из генеральной совокупности наудачу отбираем m объектов, эту отобранную совокупность назовем **выборкой**.

Выборка может быть **упорядоченной**, если порядок объектов (элементов) играет роль, и может быть **неупорядоченной**, если порядок элементов роли не играет.

Выборка может быть **без повторений**, если элементы повторяться не могут, и может быть **с повторениями**, если элементы в выборке повторяются.

Например, телефонный номер 60-61-51 - упорядоченная выборка с повторениями из десяти цифр по шести.

Основные элементы комбинаторики

1. Размещение $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Это любое упорядоченное подмножество m из элементов множества n .

(Порядок важен).

2. Перестановки

Если $m = n$, то эти размещения называются перестановками.

3. Сочетания $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Это любое подмножество из m – элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n – различных элементов.

(Порядок не важен).

Следствие. Число сочетаний из n элементов по $n - m$ равно
число

сочетаний из n элементов по m , т.е. $C_n^{n-m} = C_n^m$

Основные элементы комбинаторики



Задача 1.

Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять

$$P_6 = 6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \text{ способами.}$$

4 определенные книги можно переставлять

$$P_4 = 4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24 \text{ способами.}$$

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

$$P_6 * P_4 = 720 * 24 = 17280.$$

Теория вероятностей

раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при массовых повторениях испытаний

Основные понятия теории вероятностей

Испытание (опыт)	Осуществление некоторого комплекса условий (или действие, результат которого заранее неизвестен)
Эксперимент	Один или несколько опытов
Исход	Возможный результат эксперимента (Всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти)
Событие	Один или несколько исходов эксперимента

События обозначаются обычно большими латинскими буквами **A, B, D, F ...**

Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть классическим **классической вероятностью события A**

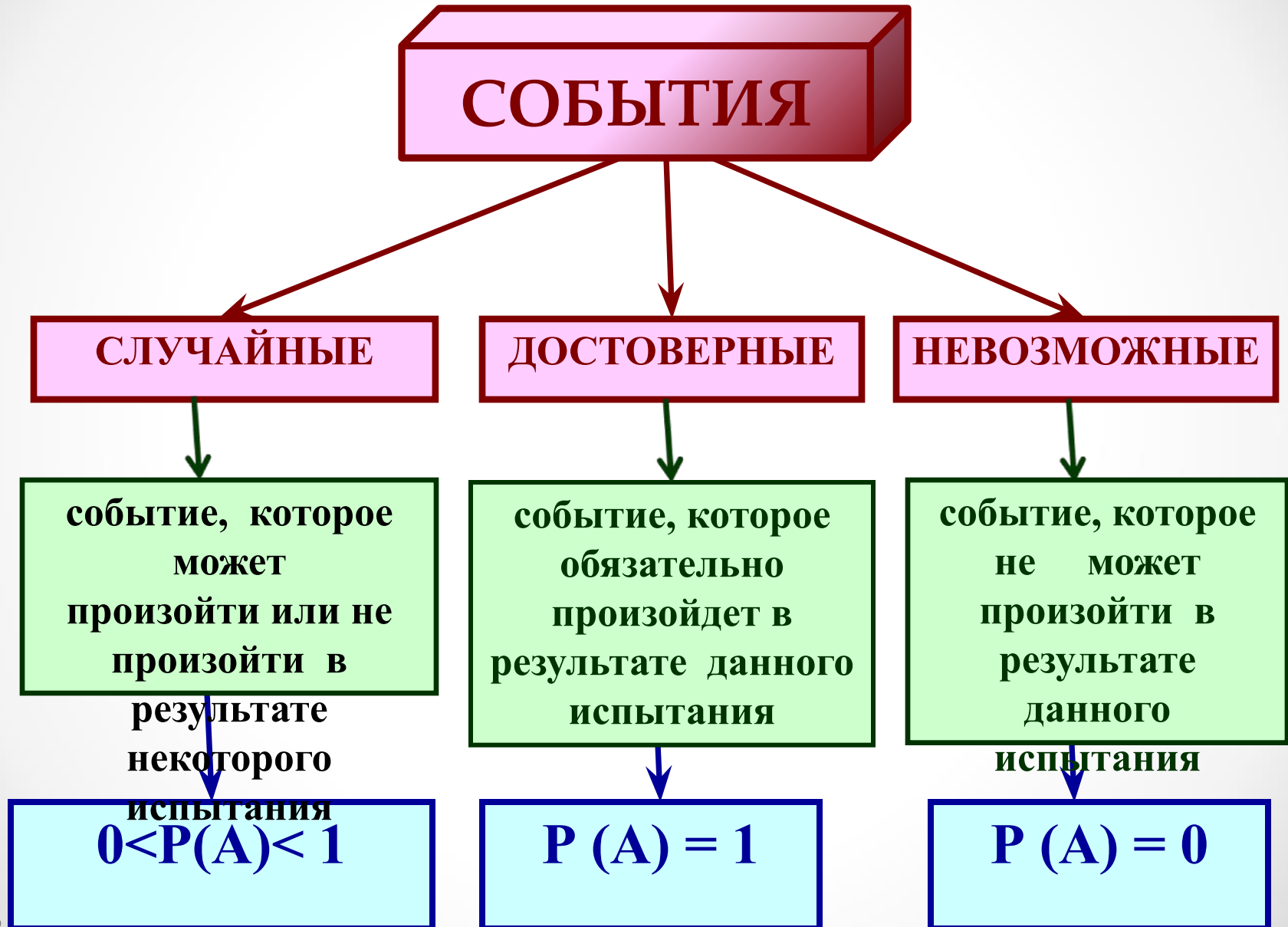
называется отношение числа благоприятных исходов (обязательно наступивших) к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов.

$$P(A) = m/n$$

m – число исходов, благоприятных для события A;
 n – общее число несовместных единственно возможных и равновозможных исходов.

ВЕРОЯТНОСТЬ ИЗМЕРЯЕТСЯ ЧИСЛОМ!

Классификация событий



Распредели события по их типам

СЛУЧАЙНЫЕ

ДОСТОВЕРНЫЕ

НЕВОЗМОЖНЫЕ

1. После зимы наступает весна.
2. После ночи приходит утро.
3. Камень падает вниз.
4. Вода становится теплее при нагревании .
5. Получить диплом после завершения обучения и успешной защиты дипломного проекта.
6. Бутерброд падает маслом вниз.
7. В понедельник отменили занятия.
8. Поэт пользуется велосипедом
9. В доме живет кошка.
10. 30 февраля день рождения у моего друга
11. При подбрасывании кубика выпадает 7 очков.
12. Человек рождается старым и становится с каждым днем моложе.

Взаимосвязь событий

Совместные события	События A и B совместны, если появление одного из них не исключает появления другого. Несколько событий совместны, если совместны хотя бы 2 из них
Несовместные события	События A и B несовместны, если появление одного из них исключает появление другого. Несколько событий несовместны, если они попарно несовместны
Зависимые события	События A и B зависимы, если появление события B зависит от появления события A .

Взаимосвязь событий

<p>Независимые события</p>	<p>События A и B независимы, если появление одного из них никак не влияет на возможность появления другого.</p>
<p>Равновозможные события</p>	<p>События в опыте называются равновозможными, если условия их появления одинаковы и нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое</p>
<p>Элементарные события</p>	<p>Если события A и B более простые события их называют <i>элементарными событиями</i> (элементарными исходами)</p>

Взаимосвязь событий

Полная группа событий -

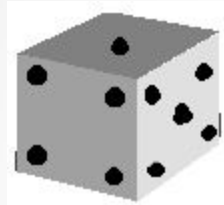
несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Противоположные события - 2 несовместных события , образующих полную группу событий. Обозначение - \bar{A}

Пример 2:

Опыт - бросание игральной кости

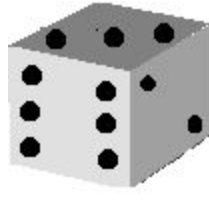
События:



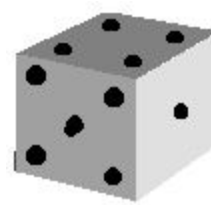
A_1



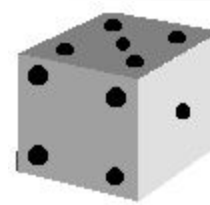
A_2



A_3



A_4



A_5



A_6

B - выпадение четного числа очков

C - выпадение более 7 очков

D - выпадение не более 3 очков

E - выпадение не более 6 очков

F - выпадение не менее 4 очка

Анализ событий опыта:

C - невозможное событие

E - достоверное событие

$A_1 - A_6$ - элементарные события

- полная группа несовместных равновозможных событий

B, C, D - можно выразить через более простые (элементарные) события

Например:

B - наступит либо A_2 , либо A_4 , либо A_6

Алгебра событий

Сумма (объединение) событий A_1, A_2, \dots, A_n - событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий

Обозначение: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

Произведение (пересечение) событий A_1, A_2, \dots, A_n - событие, состоящее в появлении всех этих событий

Обозначение: $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

Пример 3: Опыт - два выстрела по мишени

Обозначим

A_1 - попадание в мишень при первом выстреле

A_2 - попадание в мишень при втором выстреле

Сформулируйте события:

$$B = A_1 + A_2, \quad C = A_1 \cdot A_2, \quad D = A_1 A_2, \quad E = A_1 A_2 + A_1 \bar{A}_2$$

Решение примера:

$B = A_1 + A_2$ - хотя бы одно попадание,

$C = A_1 \cdot A_2$ - хотя бы один промах,

$D = A_1 \cdot A_2$ - попадание в цель дважды,

$E = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot \bar{A}_2$ - ровно одно попадание. \square

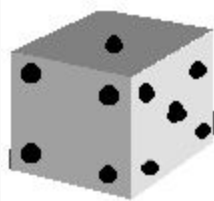
Пример 4:

Опыт - бросание игральной кости

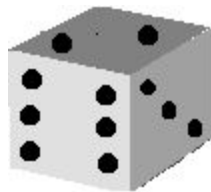
Событие A - выпадение числа очков, кратного 3.

Найдем вероятность события A .

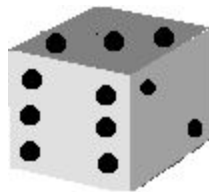
Решение:



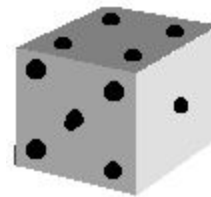
A_1



A_2



A_3



A_4



A_5



A_6

Всего случаев 6. Благоприятных из них 2,

следовательно, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Геометрические вероятности

- Пусть отрезок I составляет часть отрезка L . На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок I пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L , то вероятность попадания точки на отрезок I определяется равенством

- $P = \text{Длина } I / \text{Длина } L$

- Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G . На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G , ни от формы g , то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

- $P = \text{Площадь } g / \text{Площадь } G$

Геометрическая вероятность

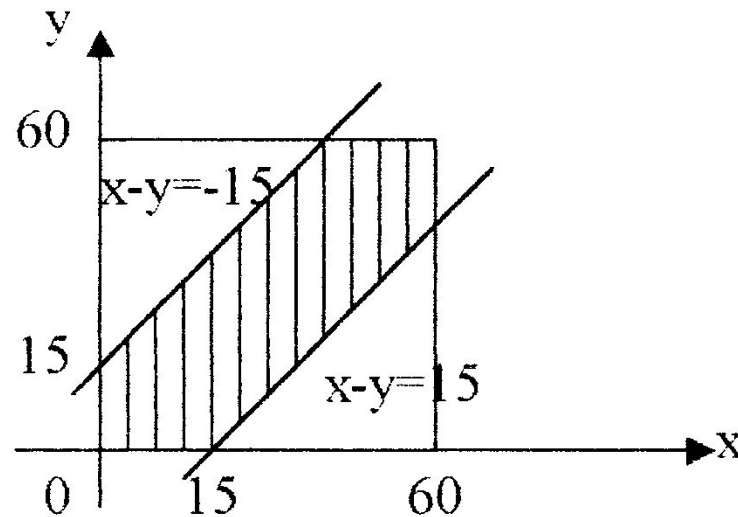
На практике часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно.

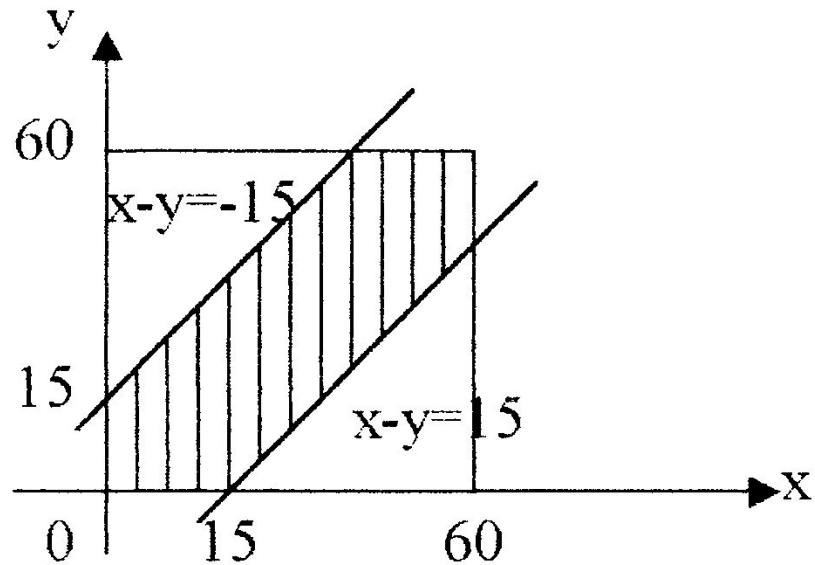
Пример 6:

Два студента условились встретиться в определенном месте между 18 и 19 часами. Пришедший первым ждет 15 мин и уходит. Определить вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равномерно в течение указанного часа.

Решение примера 6:

Пусть x - время прихода одного студента, y - время прихода второго. Чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \leq 15$, т.е. $-15 \leq x - y \leq 15$. Область возможных значений - квадрат со стороной, равной 60. \square





Область D- часть квадрата между прямыми $x - y = -15$ и $x - y = 15$. Следовательно,

$$p = \frac{S_D}{S} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}$$

Задания на СРС

1. События и их вероятности [1,3].

Задания на СРСП

1. Решение задач по теме [2. ИДЗ – 18.1].

Глоссарий

№	Қазақша	Русский	English
1.	Оқиға	Событие	Event
2.	Өзара бірігетін оқиға	Совместное событие	Joint event
3.	Өзара бірікпейтін оқиға	Несовместное событие	Not joint event
4.	Ақиқат оқиға	Достоверное событие	Reliable event
5.	Мүмкін емес оқиға	Невозможное событие	Impossible event
6.	Ықтималдылық	Вероятность	Probability
7.	Геометриялық ықтималдылық	Геометрическая вероятность	Geometric Probability
8.	Салыстырмалы жиілік	Относительная частота	Relative frequency

Литература

Основная:

1. Гмурман В.М. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.,2006.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие в 4 частях / Под общей редакцией А.П. Рябушко. - Мн.: Выш. шк., 2011, часть 4.

Дополнительная:

3. Д.К. Сыдыкова Математика-2. Сборник заданий для СРС. КазГАСА, 2009.