

## Уравнения Максвелла

Электростатика

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

— закон Кулона  
(полевая форма)

Электродинамика

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

— сила Лоренца

— уравнения Максвелла  
(в вакууме)

## Уравнения Максвелла

Вещество изменяет внешнее поле, так как поле  
вещество поляризует и намагничивает.



$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

— уравнения Максвелла в среде

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

— материальные уравнения

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

— граничные условия

## Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии.

Мощность, развиваемая действующими на ток силами электромагнитного поля

$$\left[ P = \mathbf{F}\mathbf{v} = (q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v} = q\mathbf{E}\mathbf{v} \right] \longrightarrow$$

$$P_E = \int_V \mathbf{j}\mathbf{E} dV \longrightarrow \left[ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

$$P_E = \int_V \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} dV \longrightarrow \dots\dots$$

**Закон сохранения энергии электромагнитного поля.  
Поток энергии.**

$$P_E = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \left( \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \right) dV \right] - \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{S} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = -\oint_A \mathbf{S} dA - \int_V \mathbf{j}\mathbf{E} dV$$

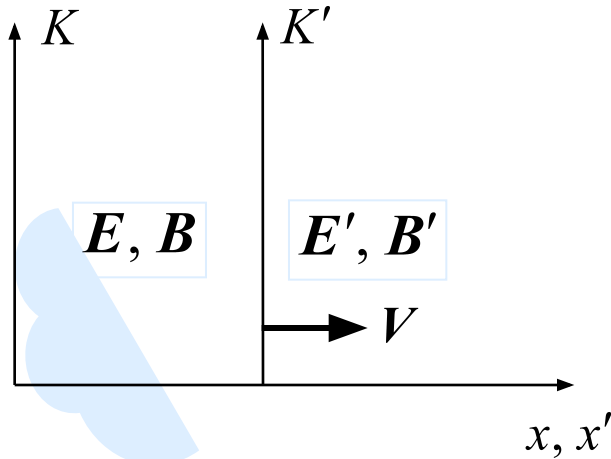
$$w = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}$$

– плотность электромагнитной энергии

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

– *вектор Пойтинга* (плотность потока энергии)

## Законы преобразования $E$ и $B$



### Преобразования Лоренца

$$x' = \Gamma(x - Vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \Gamma(t - xV/c^2)$$

$$\Gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$$

Из законов преобразования силы  $\Rightarrow$   $\left[ \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right]$

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \Gamma(E_y - VB_z)$$

$$E'_z = \Gamma(E_z + VB_y)$$

$$B'_x = B_x$$

$$B'_y = \Gamma(B_y + VE_z/c^2)$$

$$B'_z = \Gamma(B_z - VE_y/c^2)$$

## Инварианты электромагнитного поля

Из формул преобразования

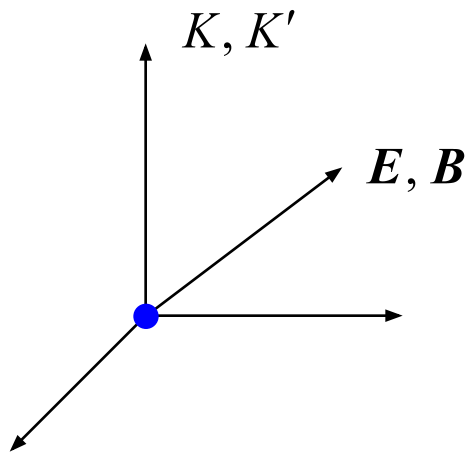


$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{B} &= \text{inv}, \\ E^2 - c^2 B^2 &= \text{inv} \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Если  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  (т.е.  $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$ ) в одной ИСО, то  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$  (т.е.  $\mathbf{E}'\mathbf{B}' = 0$ ) во всех ИСО.

**Следствие 2.** Если  $E = cB$  (т.е.  $E^2 - c^2 B^2 = 0$ ) в одной ИСО, то  $E' = cB'$  (т.е.  $E'^2 - c^2 B'^2 = 0$ ) во всех ИСО.

## Поле нерелятивистского заряда



$K'$  – система отсчета, связанная с зарядом

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

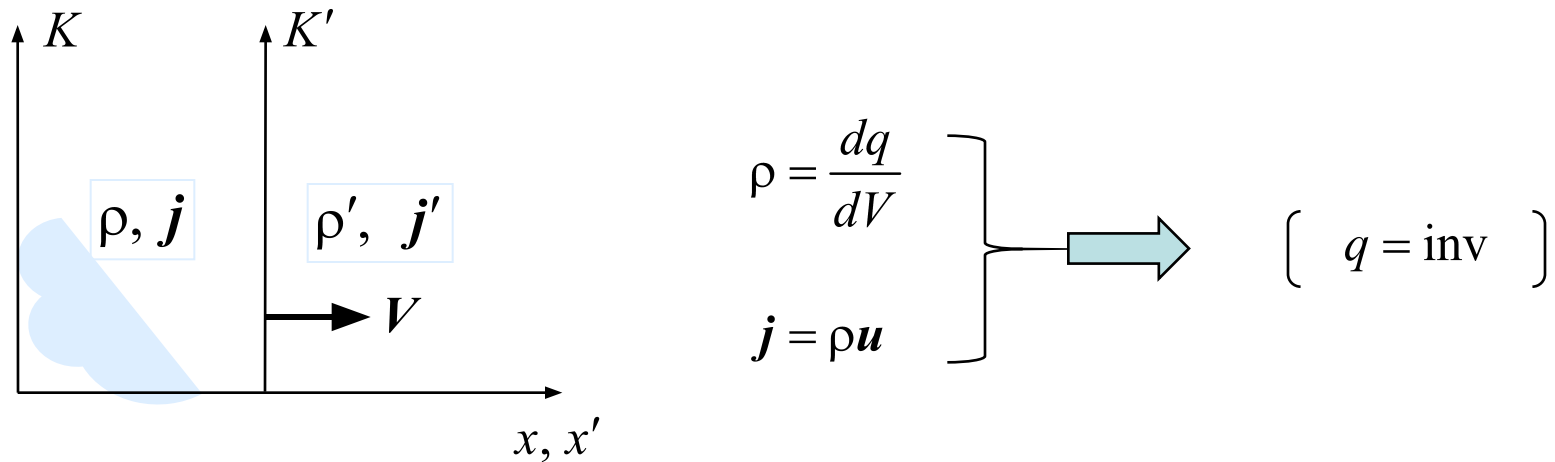
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + (\mathbf{v} \times \mathbf{E}')/c^2$$

С учетом  $\mathbf{B}' = 0$ ,  $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$   $\implies$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

– закон Био-Савара  
(для дискретного элемента тока)

## Преобразование зарядов и токов



## Формулы преобразования зарядов и токов

$$j'_x = \Gamma(j_x - V\rho),$$

$$j'_y = j_y,$$

$$j'_z = j_z,$$

$$\rho' = \Gamma(\rho - j_x V/c^2)$$

$$\Gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$$