Уравнения Максвелла

Электростатика

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$$

– закон Кулона (полевая форма)

Электродинамика

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

– сила Лоренца

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

– уравнения Максвелла (в вакууме)

Уравнения Максвелла

Вещество изменяет внешнее поле, так как поле вещество поляризует и намагничивает.

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

– уравнения Максвелла в среде

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu\mu_0\boldsymbol{H}$$

– материальные уравнения

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$
$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

– граничные условия

Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии.

Мощность, развиваемая действующими на ток силами электромагнитного поля

$$\left[\quad P = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} = (q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\boldsymbol{v} = q\boldsymbol{E}\boldsymbol{v} \quad \right] \Longrightarrow$$

$$P_E = \int_V \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\, dV \Longrightarrow \left[\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \right]$$

$$P_E = \int_V \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H}\, dV - \int_V \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\, dV \Longrightarrow \quad \ldots\ldots$$

Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии.

$$P_E = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_V \left(\frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}\right) dV\right] - \oint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\, d\mathbf{S}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V w\,dV = -\oint_A \mathbf{S}\,dA - \int_V \mathbf{jE}\,dV$$

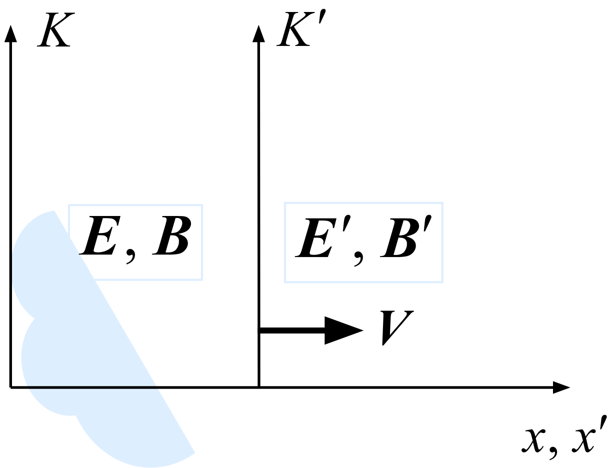
$$\boxed{w = \frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}}$$

– плотность электромагнитной энергии

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}}$$

– *вектор Пойтинга* (плотность потока энергии)

Законы преобразования *E* и *B*



Преобразования Лоренца

$$x' = \Gamma(x - Vt),$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = \Gamma(t - xV/c^2)$$

$$\Gamma = 1\Big/\sqrt{1-(V/c)^2}$$

Из законов преобразования силы $\Rightarrow$ $\left(\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \right)$

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$
$$E'_y = \Gamma(E_y - VB_z) \qquad B'_y = \Gamma(B_y + VE_z/c^2)$$
$$E'_z = \Gamma(E_z + VB_y) \qquad B'_z = \Gamma(B_z - VE_y/c^2)$$

Инварианты электромагнитного поля

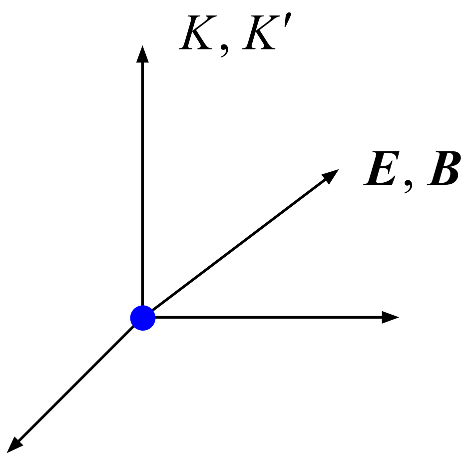
Из формул преобразования $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{EB} = \mathrm{inv}\,,$$
$$E^2 - c^2B^2 = \mathrm{inv}$$

Следствие 1. Если $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$ (т.е. $\boldsymbol{EB} = 0$) в одной ИСО,
то $\boldsymbol{E'} \perp \boldsymbol{B'}$ (т.е. $\boldsymbol{E'B'} = 0$) во всех ИСО.

Следствие 2. Если $E = cB$ (т.е. $E^2 - c^2B^2 = 0$) в одной ИСО,
то $E' = cB'$ (т.е. $E'^2 - c^2B'^2 = 0$) во всех ИСО.

Поле нерелятивистского заряда



K' – система отсчета, связанная с зарядом

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

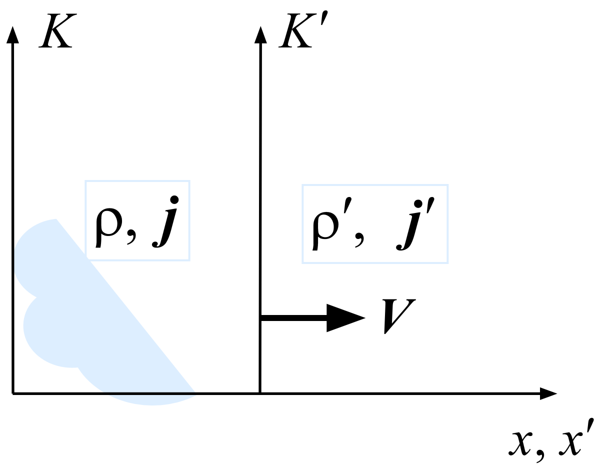
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}')/c^2$$

С учетом $\boldsymbol{B}' = 0,\ c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ ⇨

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

– закон Био-Савара (для дискретного элемента тока)

Преобразование зарядов и токов



$$\left.\begin{aligned}\rho &= \frac{dq}{dV}\\ \boldsymbol{j} &= \rho\boldsymbol{u}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ q = \mathrm{inv} \right\}$$

Формулы преобразования зарядов и токов

$$\boxed{\begin{aligned} j'_x &= \Gamma(j_x - V\rho),\\ j'_y &= j_y,\\ j'_z &= j_z,\\ \rho' &= \Gamma(\rho - j_x V/c^2)\end{aligned}}$$

$$\Gamma = 1\Big/\sqrt{1-(V/c)^2}$$