Погрешности измерений при проведении школьного физического эксперимента

Ляпцев Александр Викторович

доктор физико-математических наук, профессор

Погрешность измерения — оценка отклонения измеренного значения величины от её истинного значения. Погрешность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения.

Абсолютная погрешность, запись в виде:

$k=1{,}380\ 6488(13)\times10^{-23}$ Дж/К, или $k=1{,}380\ 6488\times10^{-23}\pm0{,}000\ 0013\times10^{-23}$ Дж/К.
Здесь $\Delta k=0{,}0000013\cdot10^{-23}$ Дж/К $= 1{,}3\cdot10^{-29}$ Дж/К

Относительная погрешность:
$\Delta k/k=10^{-6} = 10^{-4}$ %

Классификация по причинам возникновения

Инструментальные / приборные погрешности — погрешности, которые определяются погрешностями применяемых средств измерений и вызываются несовершенством принципа действия, неточностью градуировки шкалы, ненаглядностью прибора

Простейшая оценка для приборов, имеющих шкалу – половина деления шкалы. Для цифровых приборов – удвоенное значение последнего (младшего) разряда индикатора.

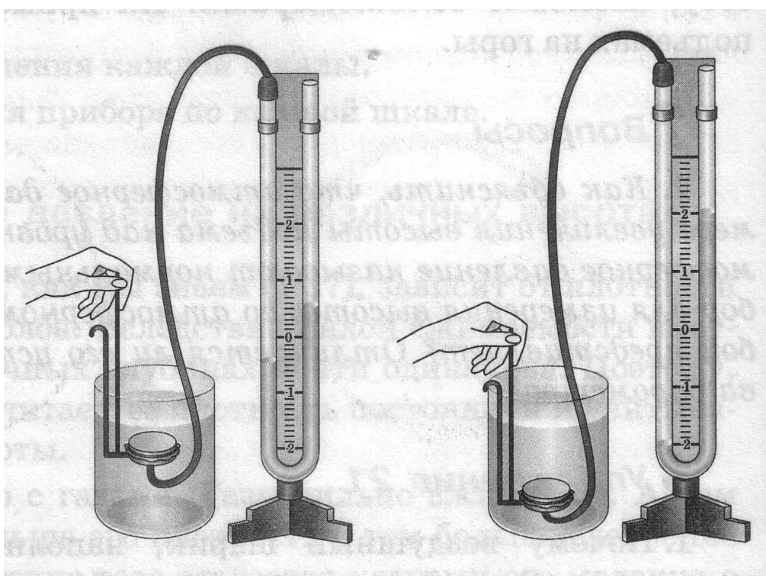
Более строго с использованием класса прибора, указанного в инструкции, например:

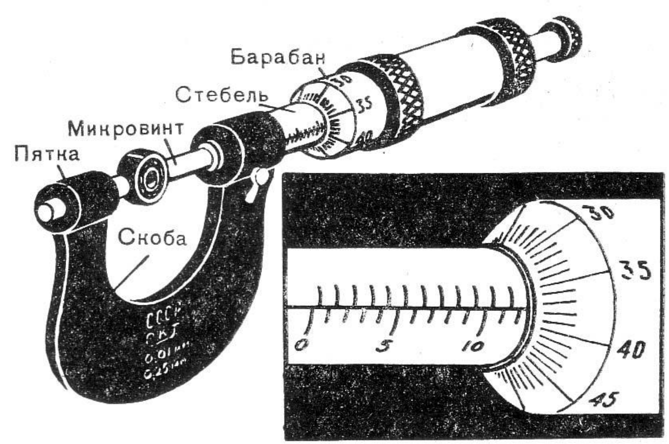
httphttp://http://lhttp://l-http://l-microhttp://l-micro.http://l-micro.ruhttp://l-micro.ru/http://l-micro.ru/indexhttp://l-micro.ru/index.http://l-micro.ru/index.phphttp://l-micro.ru/index.php?http://l-micro.ru/index.php?idhttp://l-micro.ru/index.php?id=1

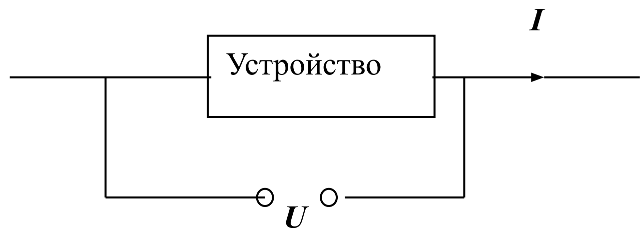
В этом случае рекомендуется учитывать как класс прибора, данный производителем, так и погрешность последних цифр. Например, если указано, что в данном диапазоне погрешность измерений составляет 0,25%, то, если прибор показывает значение *x*, абсолютную погрешность следует взять равной $\Delta x = 0{,}0025 \cdot x + 2D$

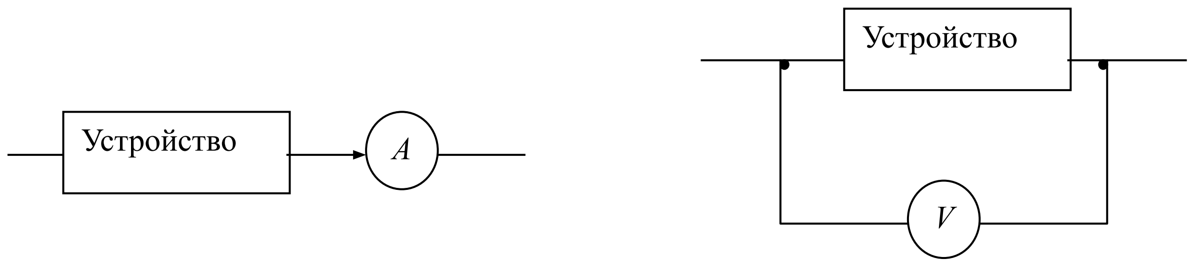
Классификация по причинам возникновения

Методические погрешности — погрешности, обусловленные несовершенством метода, а также упрощениями, положенными в основу методики. В частности, погрешности, обусловленные влиянием прибора на объект исследования. Примеры









а б

Прибор может быть сколь угодно точным, но при измерении оказывать существенное влияние на параметры измеряемого объекта. Квантовая теория утверждает, что существует предел возможности уменьшения такого влияния.

Классификация по причинам возникновения

Погрешности, обусловленные вероятностным характером явлений и процессов в природе.

Среднее (среднее арифметическое) значение:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Условно (!) берут в качестве оценки погрешности $\Delta x = \sqrt{(3S)^2 + (\Delta x_{device})^2}$

Классификация по причинам возникновения

- **Субъективные / операторные / личные погрешности** — погрешности, обусловленные степенью внимательности, сосредоточенности, подготовленности и другими качествами оператора.

Погрешности величин, определяемых косвенным методом

Если искомая величина определяется из измеренных величин по формуле:

$$y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$$

то абсолютная погрешность искомой величины связана с абсолютными погрешностями измеренных величин формулой:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

В частности для простейших формул:

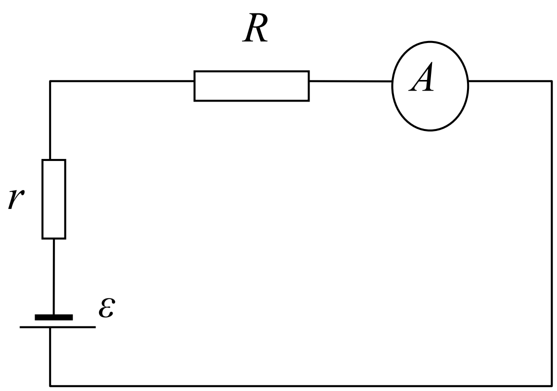
$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \Delta x_i$$

абсолютные погрешности складываются

$$y = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \sum \left| \frac{\alpha_i}{x_i} \right| \Delta x_i$$

относительные погрешности складываются

Погрешности величин, определяемых косвенным методом (пример)



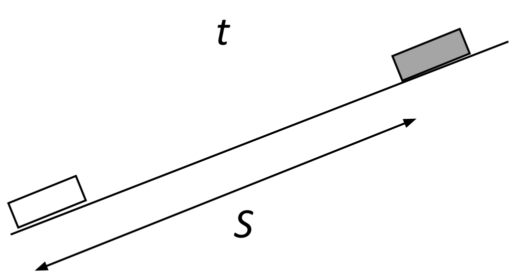
$$R = \frac{\varepsilon}{I} - r$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta I}{I}\frac{\varepsilon}{\varepsilon - Ir}$$

Если сопротивление *R* много меньше внутреннего сопротивления, относительная погрешность может оказаться значительной даже при малой абсолютной погрешности показаний амперметра.

Погрешности величин, определяемых косвенным методом (пример)

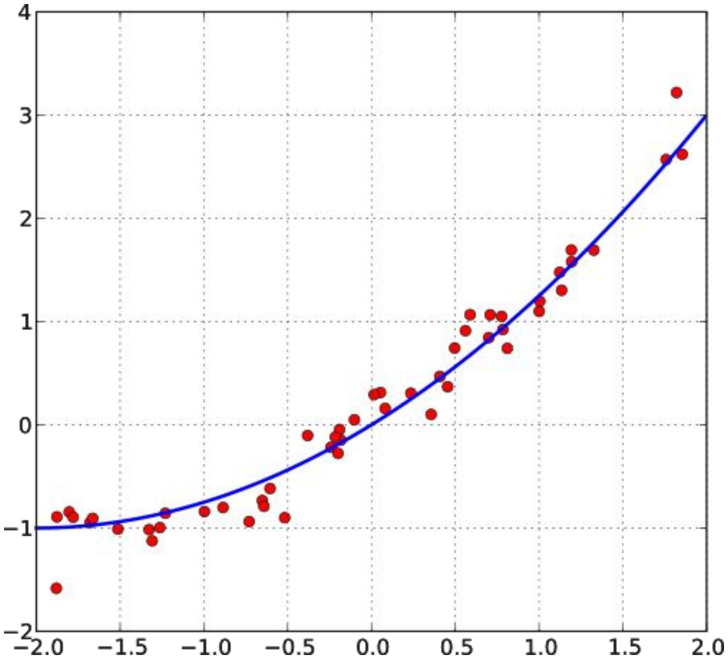
Определение ускорения тела на наклонной плоскости по пройденному пути и времени движения.



$$S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta S}{S} + 2\frac{\Delta t}{t}$$

Решение обратной задачи – нахождение теоретических параметров при подгонке экспериментальных результатов под известную теоретическую модель



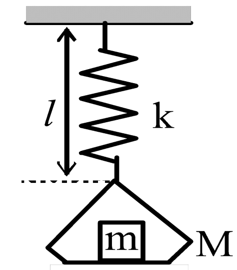
В общем случае сложная задача, не имеющая однозначного решения. Упрощается, если параметры теории входят в виде линейной функции.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

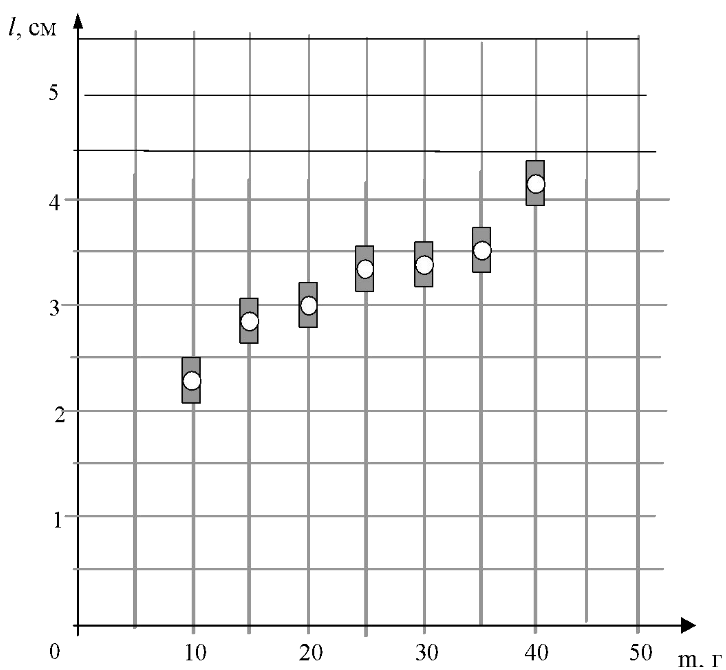
Здесь z_i – параметры теории, $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, которые задаются используемой теорией.

Пример 1

На графике представлены результаты измерения длины пружины при различных значениях массы грузов, лежащих в чашке пружинных весов (рисунок справа).



С учетом погрешностей измерений (Δm = ±1 г, Δ*l* = ± 0,2 см) жесткость пружины k приблизительно равна 1)7 Н/м 2) 10 Н/м 3) 20 Н/м 4)30 Н/м



$$k(l - l_0) = (m + M)g$$

$$l = gm \cdot \frac{1}{k} + \frac{gM}{k} + l_0$$

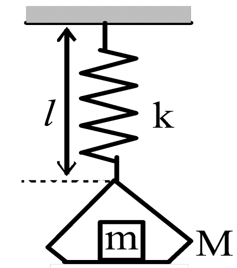
$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

$$x \to m \quad z_1 \to \frac{1}{k} \qquad z_2 = \frac{gM}{k} + l_0$$

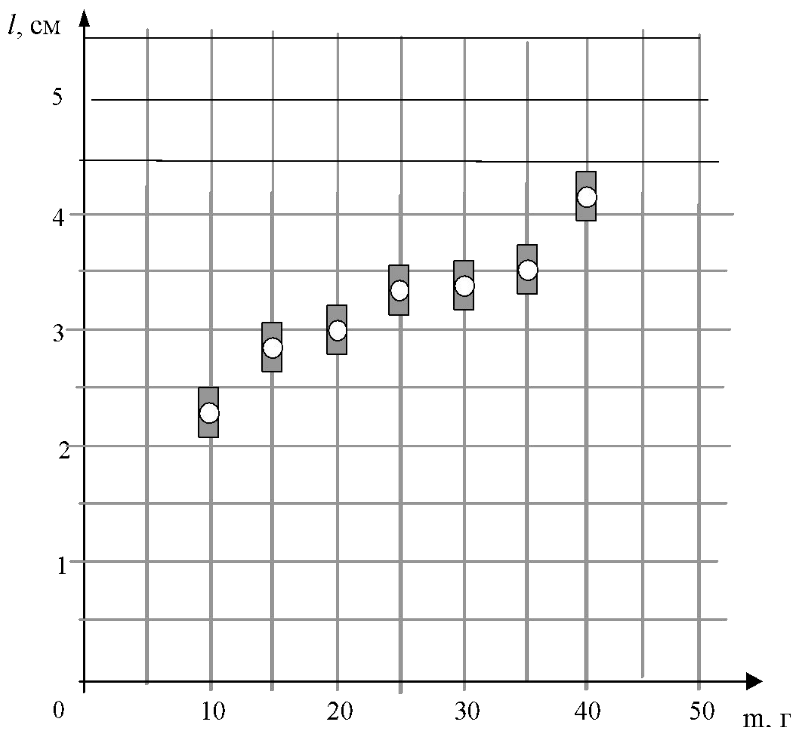
$$y \to l \quad f_1 \to gm \quad f_2 \to 1$$

Пример 1 (другая возможность)

На графике представлены результаты измерения длины пружины при различных значениях массы грузов, лежащих в чашке пружинных весов (рисунок справа).



С учетом погрешностей измерений (Δm = ±1 г, Δ*l* = ± 0,2 см) жесткость пружины k приблизительно равна
1)7 Н/м 2) 10 Н/м 3) 20 Н/м 4)30 Н/м



$$1/k$$

$$gM/k + l_0$$

$$k(l - l_0) = (m + M)g$$

$$m = \frac{l}{g}k - M - \frac{l_0}{g}k$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

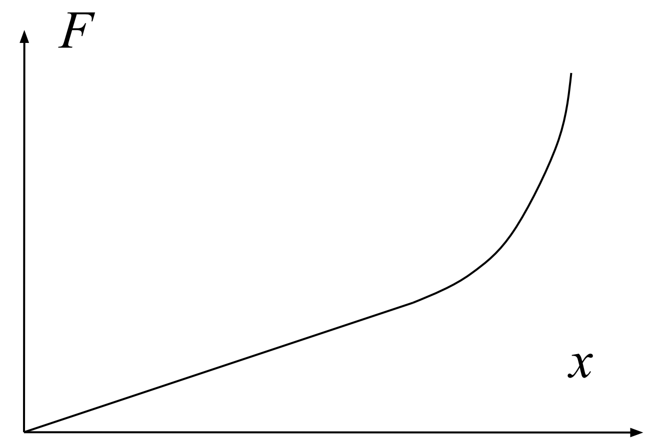
$$x \to l \qquad z_1 \to k \qquad z_2 \to M + \frac{l_0}{g}k$$

$$y \to m \quad f_1 \to \frac{l}{g} \quad f_2 \to -1$$

Пример 2

Исследование нелинейной зависимости упругости пружины

$$F = kx + \alpha x^2 + \beta x^3$$



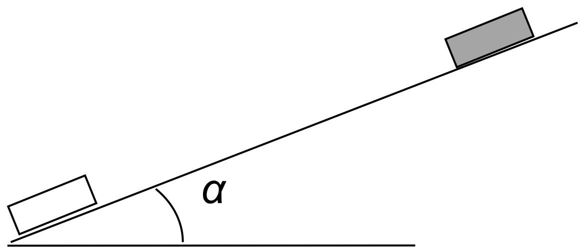
$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

$$x \to x \qquad y \to F$$

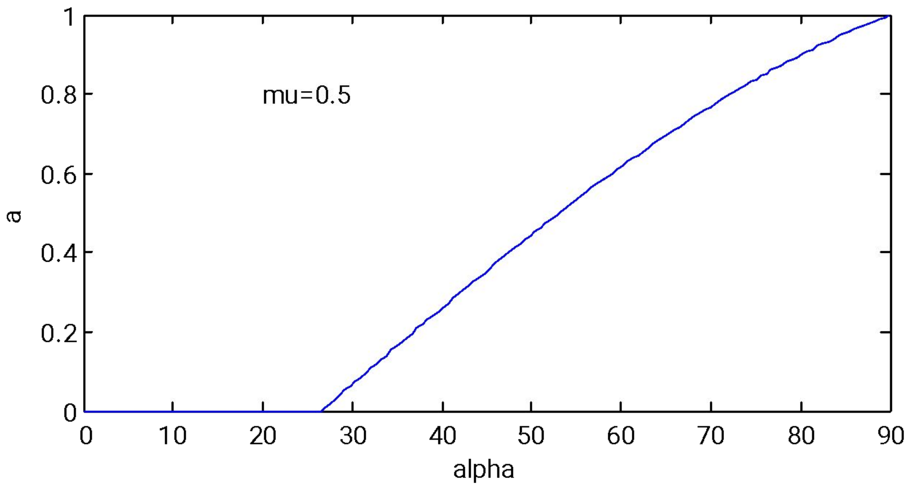
$$z_1 \to k \qquad z_2 \to \alpha \qquad z_3 \to \beta$$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x^3$$

Пример 3



Определение коэффициента трения по зависимости ускорения от угла наклона



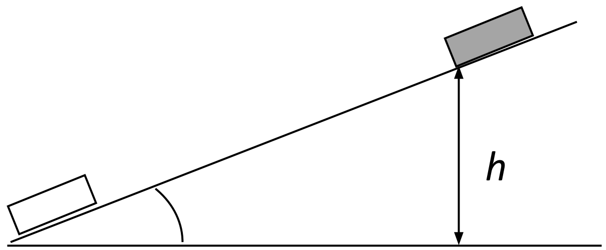
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

$$x \to \alpha \qquad y \to a \qquad z \to \mu$$

$$f \to -g\cos\alpha \qquad g \to g\sin\alpha$$

Пример 3



При другой постановке: измеряем время при нулевой начальной скорости и различных начальных высотах

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad s = \frac{at^2}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{h}{s}$$

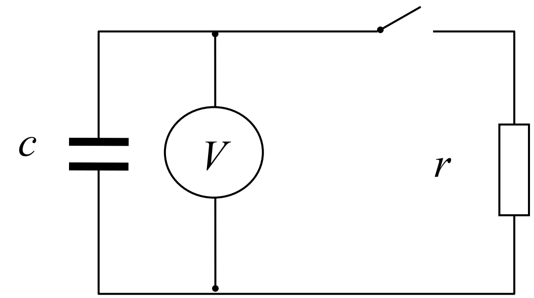
$$\frac{2s}{gt^2} = \frac{h}{s} - \mu\sqrt{1-\left(\frac{h}{s}\right)^2} \qquad y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)z_i + g(x)$$

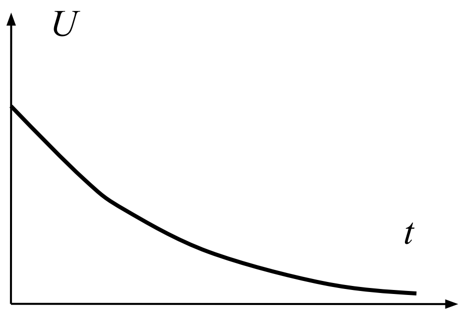
$$x \to h \qquad y \to \frac{2s}{gt^2} \qquad z \to \mu$$

$$f \to -\sqrt{1-\left(\frac{h}{s}\right)^2} \qquad g \to \frac{h}{s}$$

Пример 4

Определение емкости конденсатора по зависимости напряжения на конденсаторе от времени при разряде конденсатора





$$U = U_0 \exp\left(-\frac{t}{rc}\right)$$

$$\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = -\frac{t}{rc}$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

$$x \to t$$

$$y \to \ln\left(\frac{U}{U_0}\right)$$

$$z \to \frac{1}{c}$$

$$f(t) \to -\frac{t}{r}$$

Метод наименьших квадратов

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

Параметры теории z подбираются так, чтобы минимизировать функцию:

$$I = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - g(x_j) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_j) z_i \right)^2$$

Здесь *n* – число параметров, а *m* – число точек

Это квадратичная положительная функция от параметров *z*, следовательно при некотором наборе параметров она достигает минимума. Параметры определяются из условия равенства частных производных по этим параметрам нулю:

$$\frac{\partial I}{\partial z_i} = 0, \;\; i = 1, 2, ..., n$$

Это система линейных уравнений, причем число уравнений равно числу параметров

Метод наименьших квадратов

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x) \qquad I = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - g(x_j) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_j) z_i \right)^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial z_i} = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

После проведения вычислений получим систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} z_k = B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

где

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{m} f_i(x_j) f_k(x_j) \qquad B_i = \sum_{j=1}^{m} \big(y_j - g(x_j) \big) f_i(x_j)$$

Несмотря на то, что система уравнений выглядит громоздкой, в случае одного или двух параметров ее решение не вызывает сложности

Метод наименьших квадратов. Оценка «погрешности»

О погрешности можно говорить лишь условно, поскольку экспериментальные данные могут совершенно не соответствовать какой-либо теоретической функции. Поэтому однозначной оценки не сделать. В случае, когда число точек *m* превосходит число параметров *n* для оценки погрешности параметра z_n можно воспользоваться формулой:

$$\Delta z_j = \sqrt{\left(\frac{I_{\min} \left(A^{-1} \right)_{jj}}{m-n} \right)}$$

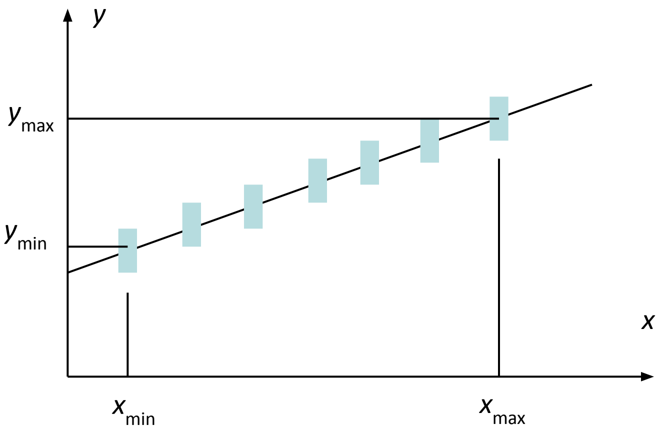
где

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{m} f_i(x_j) f_k(x_j)$$

$I_{\min}$ - минимальное значение функции I, которое достигается при подстановки полученных решений

Следует также учесть погрешность, обусловленную погрешностью измерений

Допустим, что все точки хорошо ложатся на прямую



Тангенс угла наклона в этом случае вычисляется по формуле:

$$k = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

Если абсолютные погрешности определения величин x_i и y_i равны dx и dy, то относительная погрешность определения k вычисляется по формуле:

$$\delta k' = \frac{2dx}{x_{\max} - x_{\min}} + \frac{2dy}{y_{\max} - y_{\min}}$$

В результате следует брать в качестве относительной погрешности максимальное значение из δk и $\delta k'$

В предыдущем примере эти значения оказываются приблизительно равны.

Погрешности при использовании метода наименьших квадратов при нелинейной зависимости от параметров

При линейной зависимости

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i + g(x)$$

$$\Delta z_j = \sqrt{\left(\frac{I_{\min} \left(A^{-1} \right)_{jj}}{m-n} \right)}$$

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{m} f_i(x_j) f_k(x_j)$$

При нелинейной зависимости

$$y(x) = F(x, z_1, z_2, ..., z_n)$$

Допустим, что найдены оптимальные параметры z_{0i}

Тогда при варьировании параметров вблизи оптимальных

$$f_i(x) \approx \frac{\partial F(x, z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_i}$$

так, что после вычисления параметров их значения следует взять оптимальными

Погрешности при использовании метода наименьших квадратов при нелинейной зависимости от параметров

$$I = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - g(x_j) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_j) z_i \right)^2 \Rightarrow I = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - \sum_{i=1}^{n} F_i(x_j, z_i) \right)^2$$

$$f_i(x) \approx \frac{\partial F(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_i}$$

Далее при вычислении погрешности можно использовать предыдущие формулы

$$\Delta z_j = \sqrt{\left(\frac{I_{\min} \left(A^{-1} \right)_{jj}}{m-n} \right)}$$

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{m} f_i(x_j) f_k(x_j)$$

В частном случае одного параметра

$$\Delta z = \sqrt{\frac{I_{\min}}{m-1} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F(x_j, z)}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1}}$$

Погрешности при использовании метода наименьших квадратов при нелинейной зависимости от параметров

Пример: вертикальное падение тела с учетом сопротивления воздуха.

Линейная зависимость силы сопротивления от скорости

$$y(t,\tau) = F(t,\tau) = g\left(t\tau + \tau^2\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)\right)$$

где смысл параметра *τ* - время, за которое устанавливается постоянная скорость падения.

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = g\left(t - 2\tau + \left(2\tau + t\right)\exp(-t/\tau)\right)$$

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{I_{\min}}{m-1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F(t_j,\tau)}{\partial z}\right)^2\right)^{-1}}$$

Погрешности при использовании метода наименьших квадратов при нелинейной зависимости от параметров

Пример: вертикальное падение тела с учетом сопротивления воздуха.

Квадратичная зависимость от силы сопротивления скорости

$$y(t,\tau) = F(t,\tau) = g\tau \ln\left(\mathrm{ch}(t/\tau)\right)$$

где смысл параметра *τ* - время, за которое устанавливается постоянная скорость падения.

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = g\left(\ln\left(\mathrm{ch}(t/\tau)\right) + \mathrm{th}(t/\tau)\right)$$

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{I_{\min}}{m-1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F(t_j,\tau)}{\partial z}\right)^2\right)^{-1}}$$