

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Раздел №4
Солодухин Е.А.

Базовые преобразования проекций, используемые при решении задач начертательной геометрии

- **Преобразование прямой общего положения в прямую уровня (построение дополнительной проекции прямой на плоскости проекций ей параллельной).**
- **Преобразование прямой в проецирующую прямую (построение дополнительной проекции прямой в виде точки).**
- **Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость (построение дополнительной проекции плоскости в виде линии).**
- **Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня (построение дополнительной проекции плоской фигуры на плоскости проекций ей параллельной).**

Практически рассматриваются всего два варианта преобразования.

- **Вариант 1.** *Переход от общего положения объекта в параллельное положение по отношению к выбранной плоскости проекций*
- выполняется только на основе прямоугольного варианта метода проецирования.
- **Вариант 2.** *Переход от заданного положения объекта в проецирующее положение по отношению к выбранной плоскости проекций*
- может быть выполнено на основе любого из рассмотренных вариантов метода проецирования.

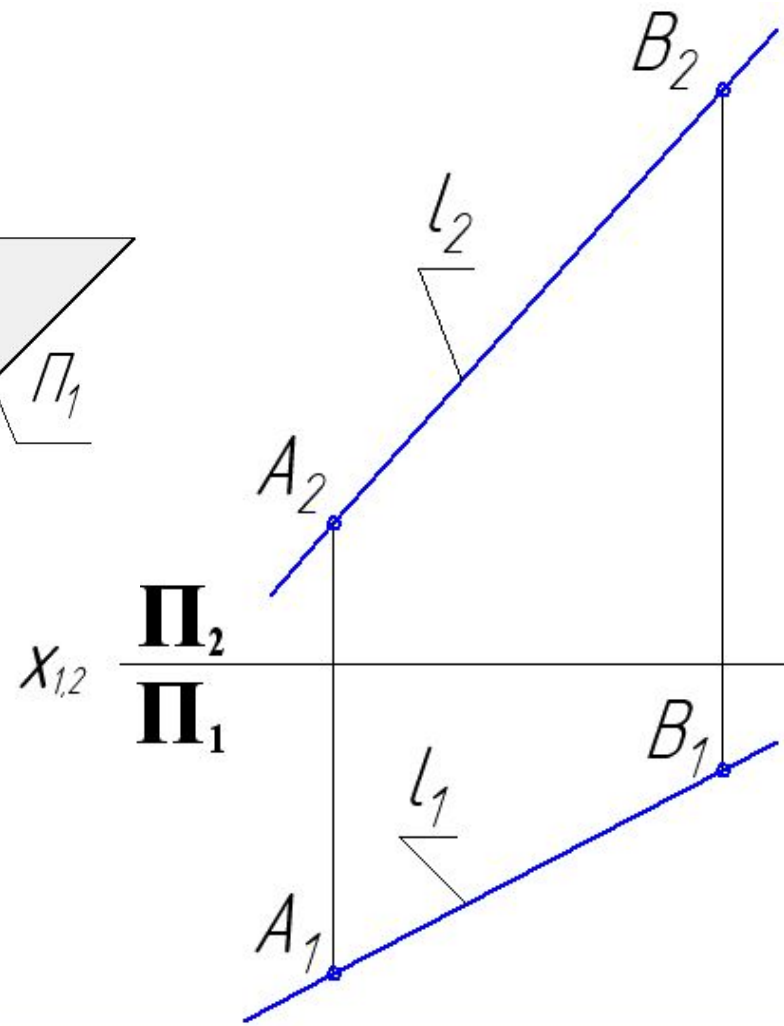
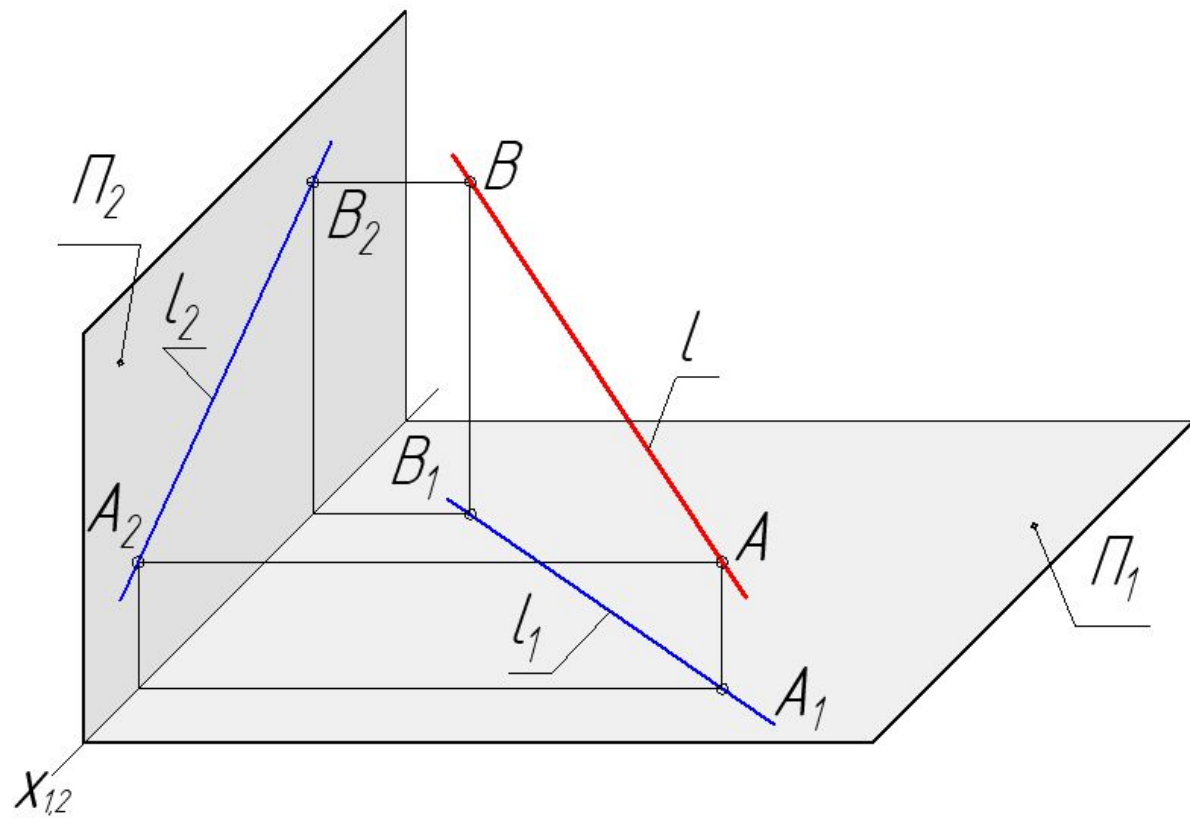
Базовая задача № 1.

**Построение дополнительной проекции
прямой линии на параллельной ей
плоскости проекций
(Преобразование прямой общего
положения в прямую уровня)**

Задача решается на основе прямоугольного варианта метода проецирования несколькими способами:

- Переменной плоскостей проекций - подбором дополнительной плоскости проекций параллельной заданной прямой.
- Плоскопараллельным перемещением – поворотом прямой до положения параллельного одной из основных плоскостей проекций (предпочтительно вращением вокруг проецирующей прямой, как с указанием оси вращения, так и без указания).

Решение задачи способом перемены плоскостей проекций

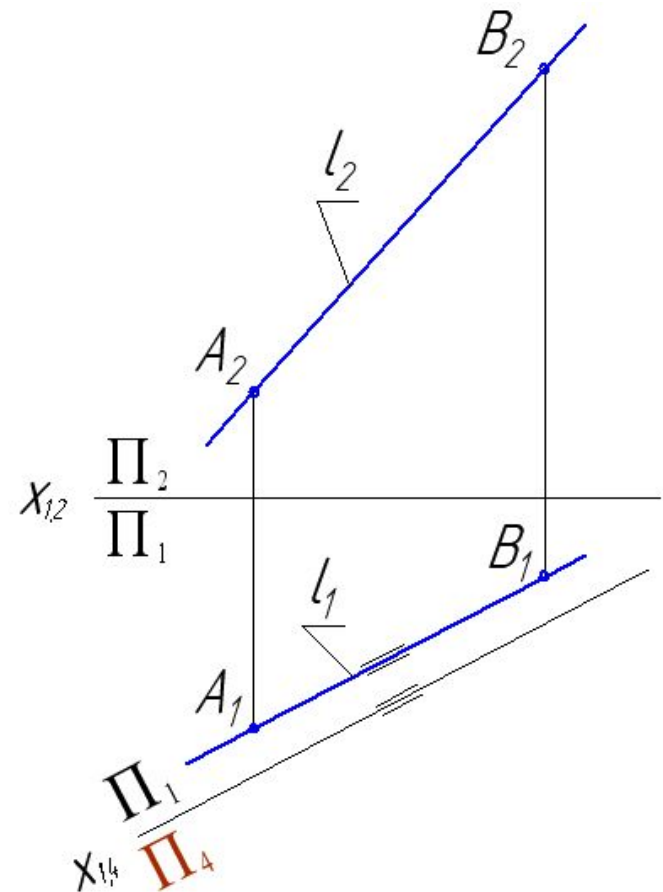
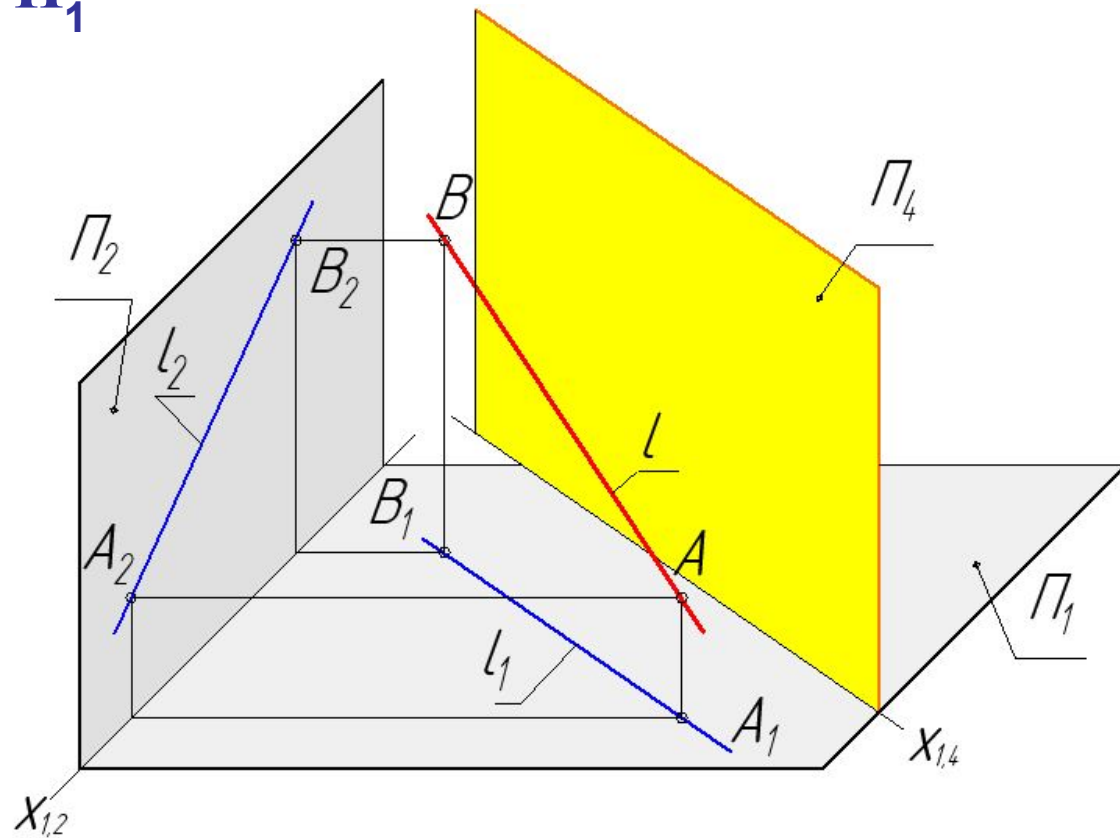


$$(\Pi_2 \perp \Pi_1)$$

$l(AB)$ - прямая общего положения

В качестве примера взята $\Pi_4 \perp \Pi_1$

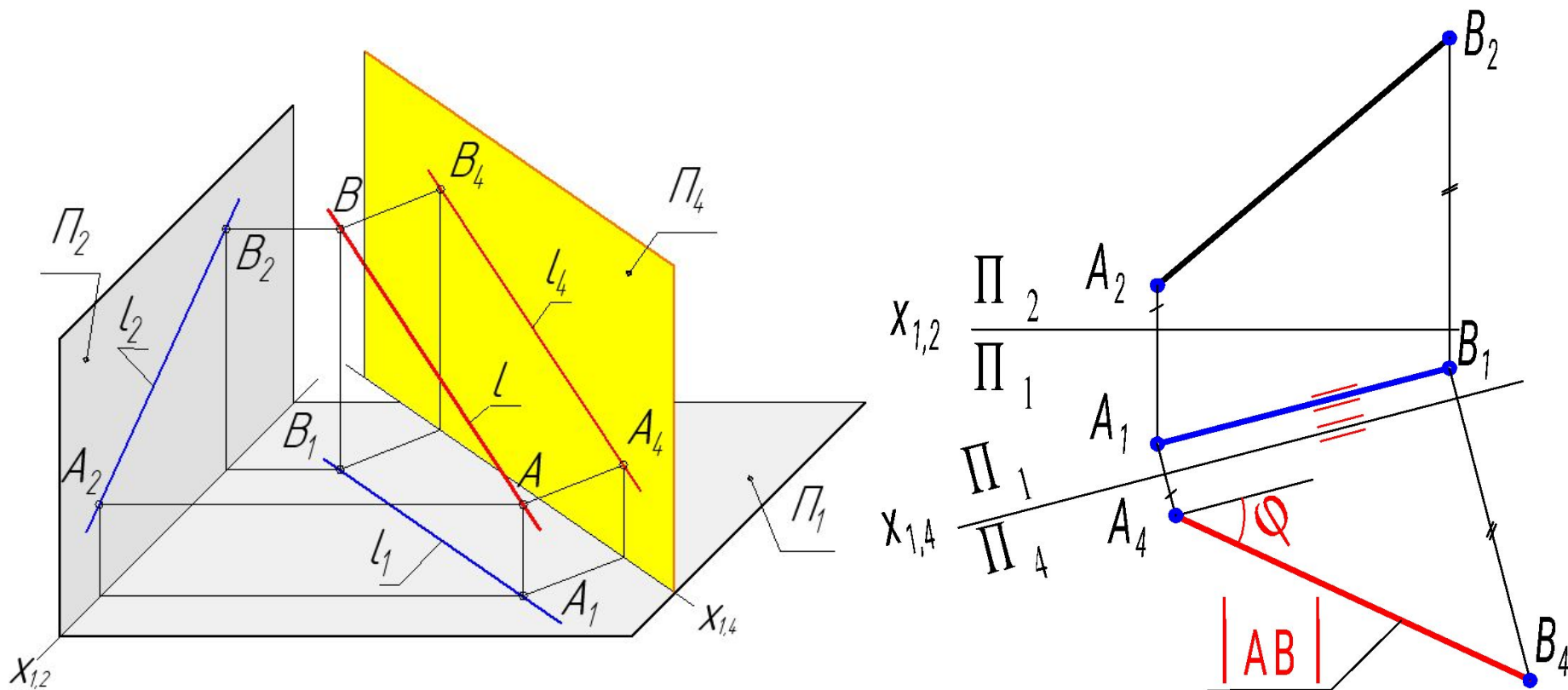
Следовательно, $x_{14} \parallel l_1$



Подбирается дополнительная плоскость проекций Π_4

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$$

$$\text{На эюре } (x_{14} \parallel l_1) \vee (x_{24} \parallel l_2)$$



Строится дополнительная проекция $l(AB)$ на поле плоскости Π_4 .

$$A_1 A_4 \perp x_{1,4} \text{ и } B_1 B_4 \perp x_{1,4},$$

$$(A_2 x_{1,2}) = (A_4 x_{1,4}) \text{ и } (B_2 x_{1,2}) = (B_4 x_{1,4})$$

**Построение дополнительной
проекции прямой линии в виде
точки на основе
дополнительного
прямоугольного варианта
способа проецирования –
перемены (замены) плоскостей
проекций**

При прямоугольном проецировании прямая является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций.

Следовательно, дополнительная плоскость проекций должна быть перпендикулярна заданной прямой

$$\Pi' \perp l,$$

Но, если прямая l – прямая общего положения, то и Π' – плоскость общего положения.

$$\text{Т.е. } \Pi' \not\perp \Pi_1 \text{ и } \Pi' \not\perp \Pi_2$$

Следовательно, чтобы получить проекцию прямой линии общего положения в виде точки способом перемены плоскостей проекций, нельзя сразу подобрать необходимую плоскость проекций.

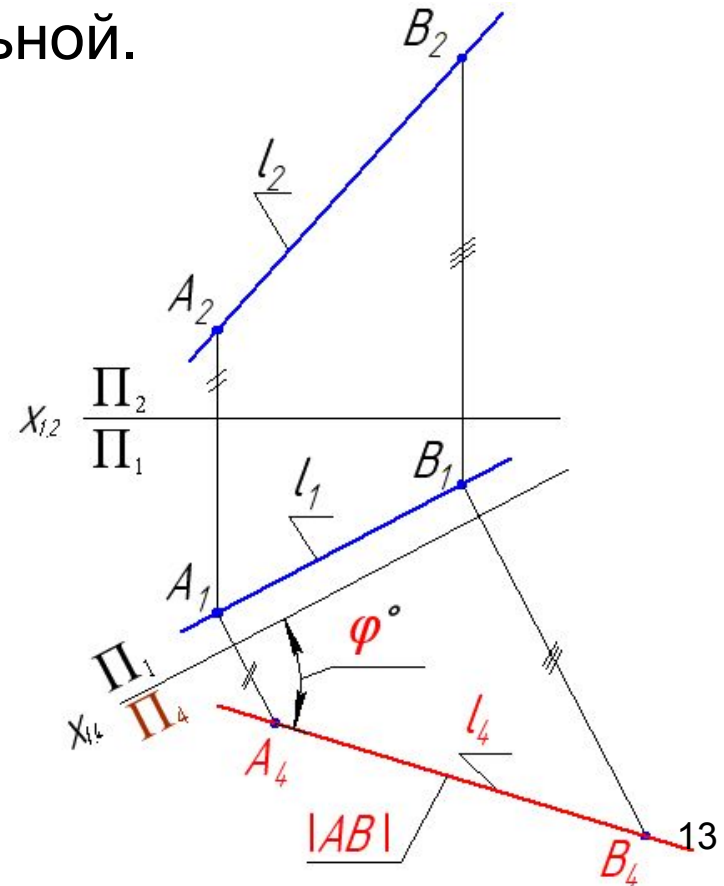
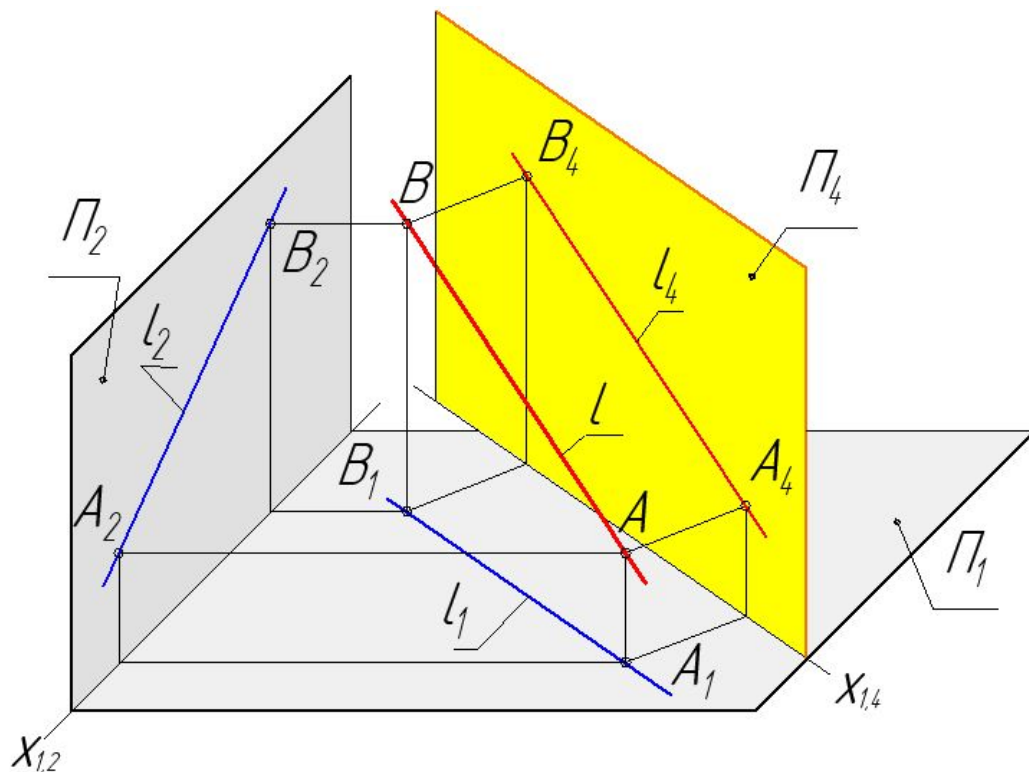
Данное преобразование выполняется в два этапа.

1-й этап

Прямая преобразуется в прямую уровня

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$$

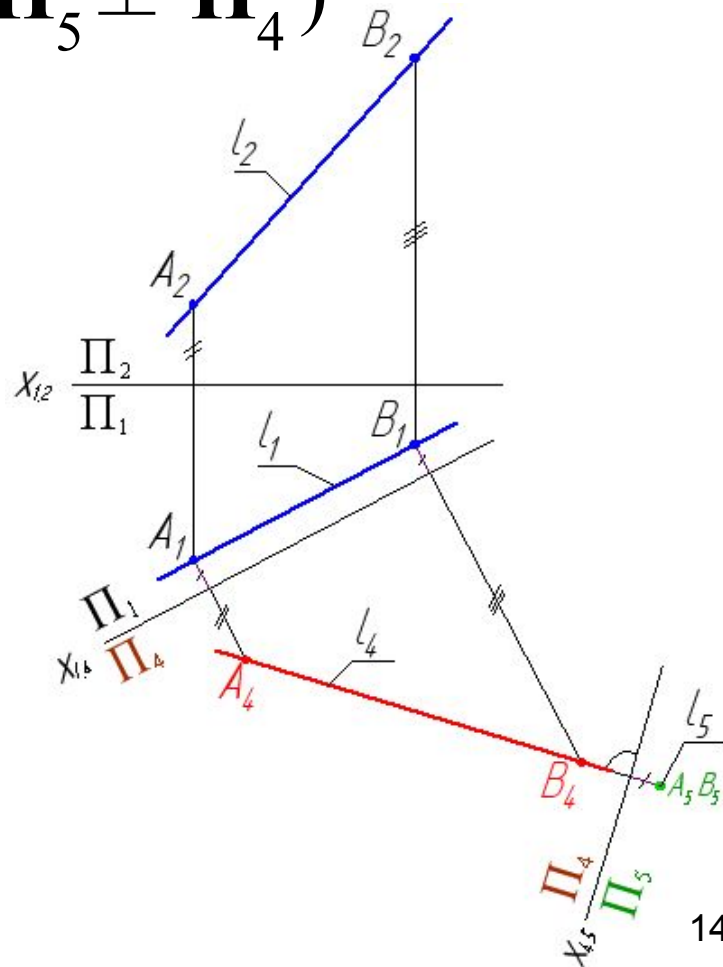
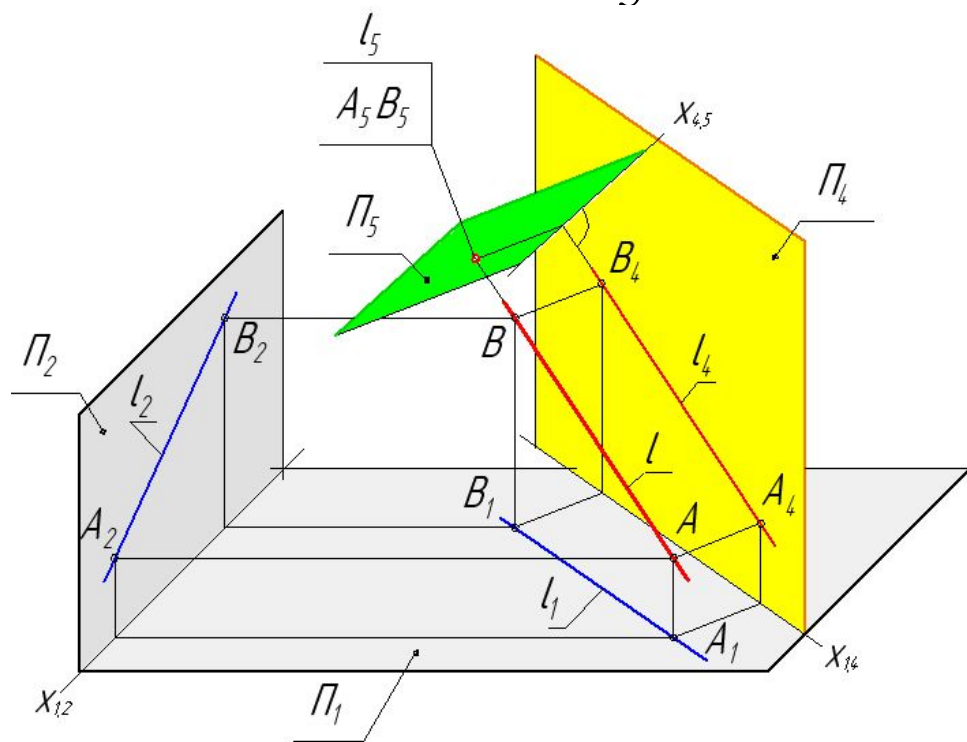
Это рассмотренная ранее базовая задача №1 на построение проекции прямой общего положения на плоскости проекций ей параллельной.



2-й этап

Из прямой уровня прямая преобразуется в проецирующую прямую

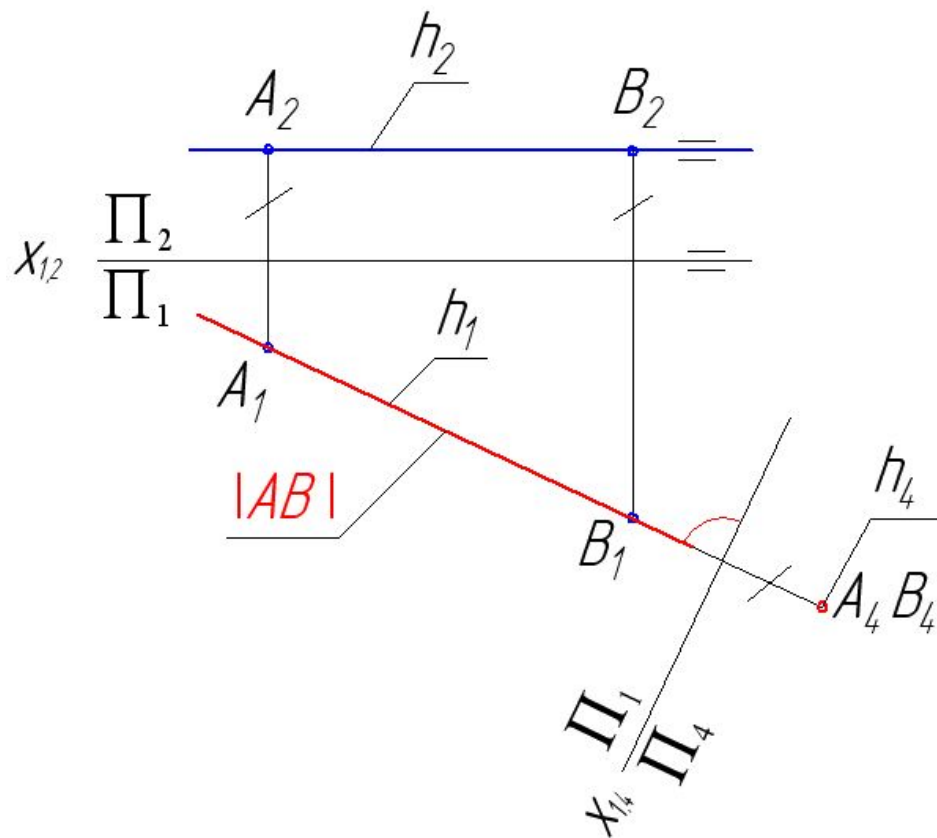
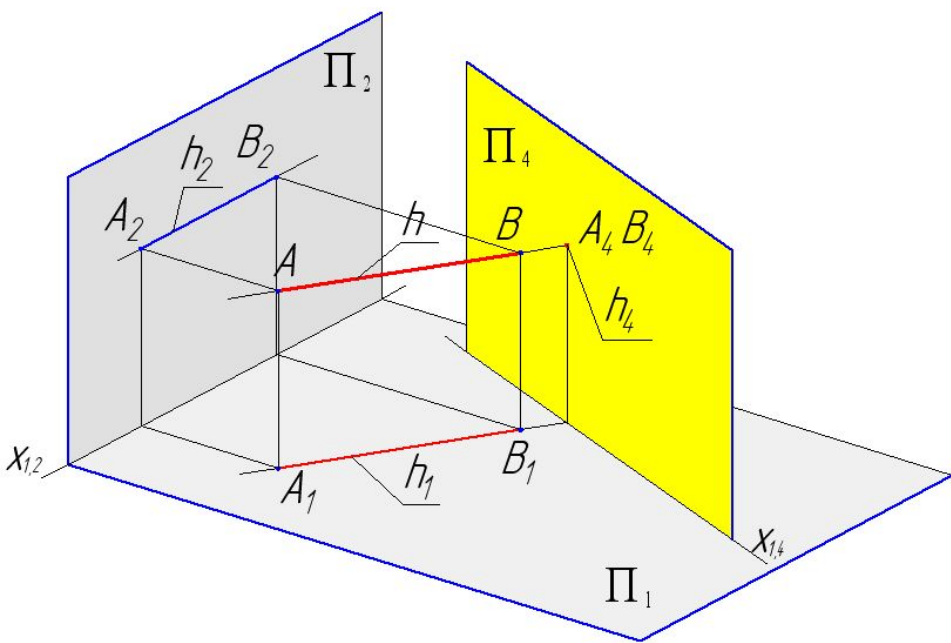
$$(\Pi_5 \perp l) \wedge (\Pi_5 \perp \Pi_4)$$



$$(A_1 B_1, x_{1,4}) = (A_5 B_5, x_{4,5})$$

Если прямая является прямой уровня, то преобразование в проецирующую прямую выполняется за один этап

Прямая уровня (h или f) параллельна плоскости проекций. Следовательно, если $\Pi' \perp (h \text{ или } f)$, то $\Pi' \perp (\Pi_1 \text{ или } \Pi_2)$, что удовлетворяет требованиям способа перемены плоскостей проекций.



Базовая задача № 3.

**Построение проекции плоскости в
виде линии**

**(Преобразование плоскости
общего положения в
проецирующую плоскость)**

***Построение
дополнительной проекции
плоскости общего
положения в виде прямой
линии способом перемены
(замены) плоскостей
проекций***

Так как данный способ преобразования основан на прямоугольном проецировании, то любая плоскость, например T , является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций. Следовательно $(\Pi_4 \perp T)$.

Если $(\Pi_4 \perp T)$, то $((\Pi_4 \perp l) ; (l \subset T))$.

В то же время дополнительная плоскость проекций Π_4 должна быть проецирующей по отношению к основным плоскостям проекций Π_1 или $\Pi_2 \square ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$

Следовательно, если $(l \perp \Pi_4)$ и $((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$,

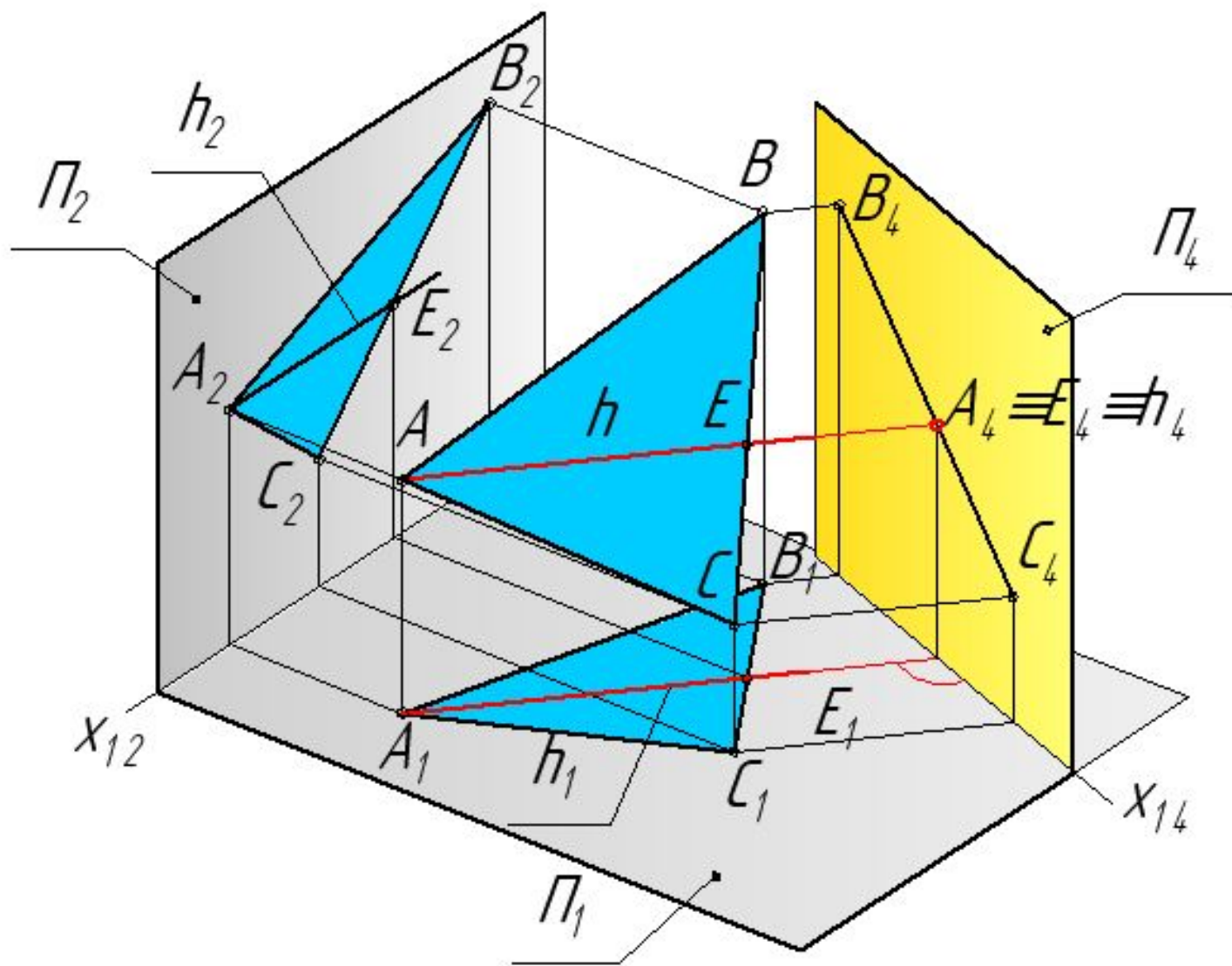
то $(l \parallel \Pi_1 \vee l \parallel \Pi_2)$ или $(l \equiv h) \vee (l \equiv f)$

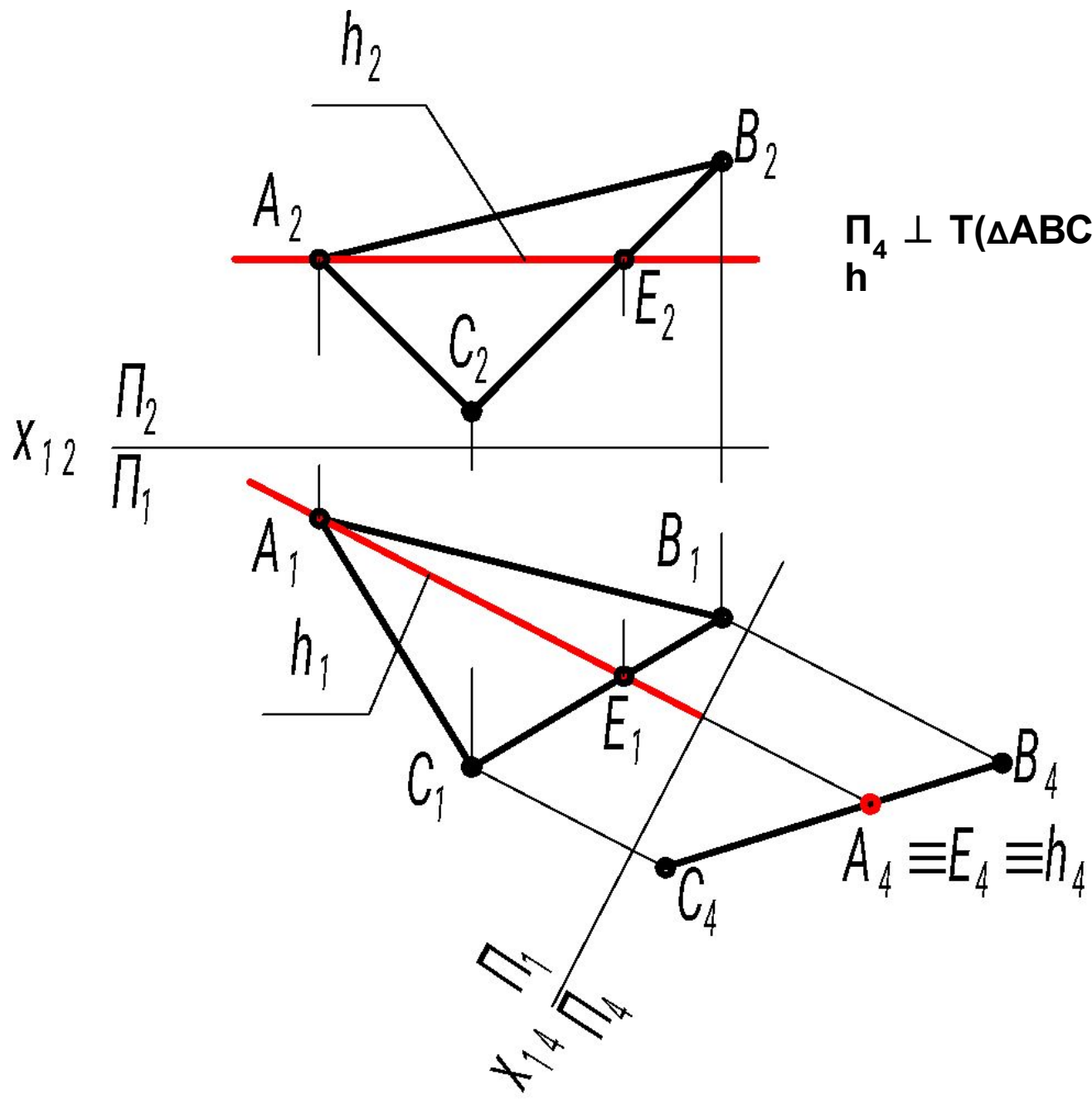
Следовательно,

если $(\Pi_4 \perp \Pi_1)$, то $(\Pi_4 \perp h, h \subset T)$ и $(x_{1,4} \perp h_1)$

если $(\Pi_4 \perp \Pi_2)$, то $(\Pi_4 \perp f, f \subset T)$ и $(x_{2,4}^{18} \perp f)$

В качестве примера $\Pi_4 \perp \Pi_1$





$$\Pi_4 \perp T(\triangle ABC), \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$$

$$\Rightarrow x_{1,4} \perp h_1$$

Базовая задача № 4.

**Построение проекции плоской
фигуры на плоскости проекций
ей параллельной**

***Решение задачи способом
перемены (замены)
плоскостей проекций***

$$\Pi' \parallel T$$

Так как плоскость T – плоскость общего положения, то любая плоскость ей параллельная, в том числе и проекций Π' , также будет плоскостью общего положения, т.е. $\Pi' \not\perp \Pi_1$ и $\Pi' \not\perp \Pi_2$, что противоречит способу перемены (замены) плоскостей проекций.

Следовательно, задача должна быть решена в два этапа.

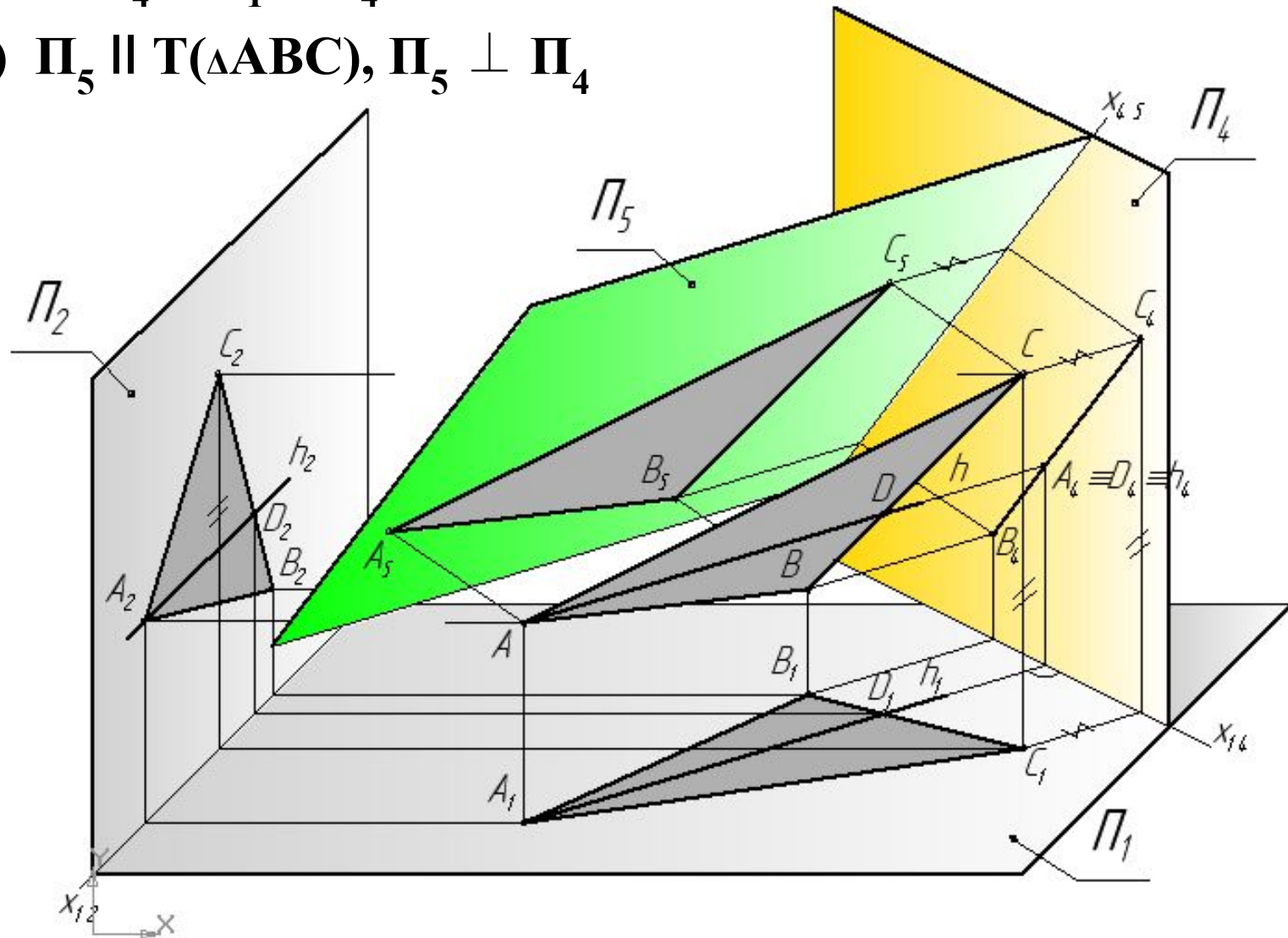
1-й этап. $\Pi_4 \perp T$ (базовая задача №3).

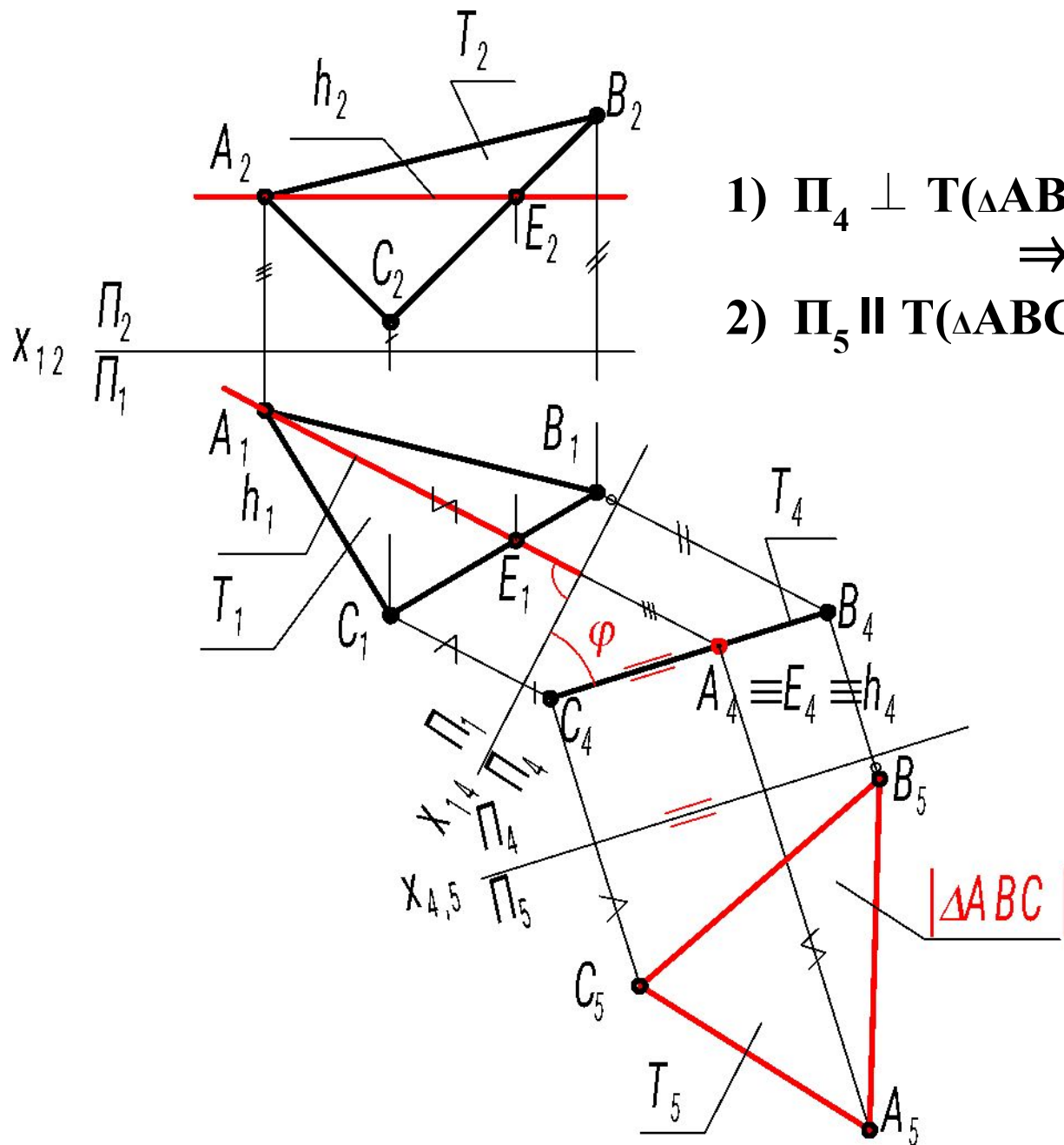
2-й этап. $\Pi_5 \parallel T$.

В качестве примера

$$1) \Pi_4 \perp T(\triangle ABC), \\ \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$$

$$2) \Pi_5 \parallel T(\triangle ABC), \Pi_5 \perp \Pi_4$$





Решение задачи способом вращения вокруг прямой уровня

В ходе решения задачи плоская фигура должна быть повернута вокруг оси, являющейся прямой уровня плоскости, в которой расположена заданная фигура, до положения параллельного плоскости проекций, параллельно которой расположена ось вращения.

Практически решение задачи сводится к повороту какой-либо одной точки или нескольких точек заданной фигуры (в зависимости от формы фигуры) до указанного положения.

В представленном далее примере в качестве оси вращения взята горизонталь. Следовательно, заданная фигура должна быть повернута вокруг выбранной оси до положения параллельного горизонтальной плоскости проекций.

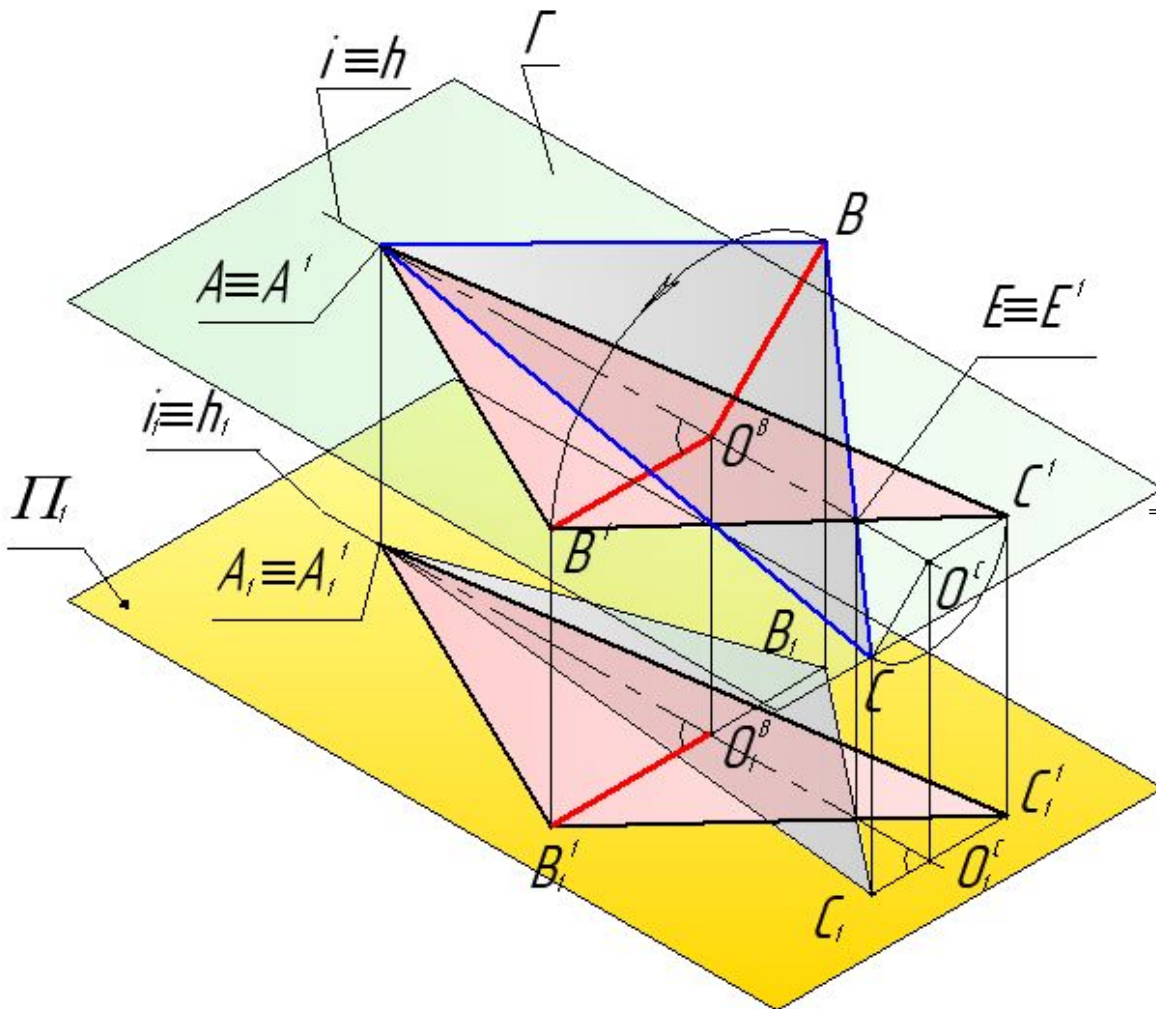
В плоскости треугольника ABC проведена горизонталь $h(AE)$, которая принята как ось вращения i .

$$h \subset \triangle ABC; i \equiv h$$

Плоскость $\triangle ABC$ должна быть повернута вокруг оси i до совмещения с плоскостью уровня Γ , в которой располагается ось вращения.

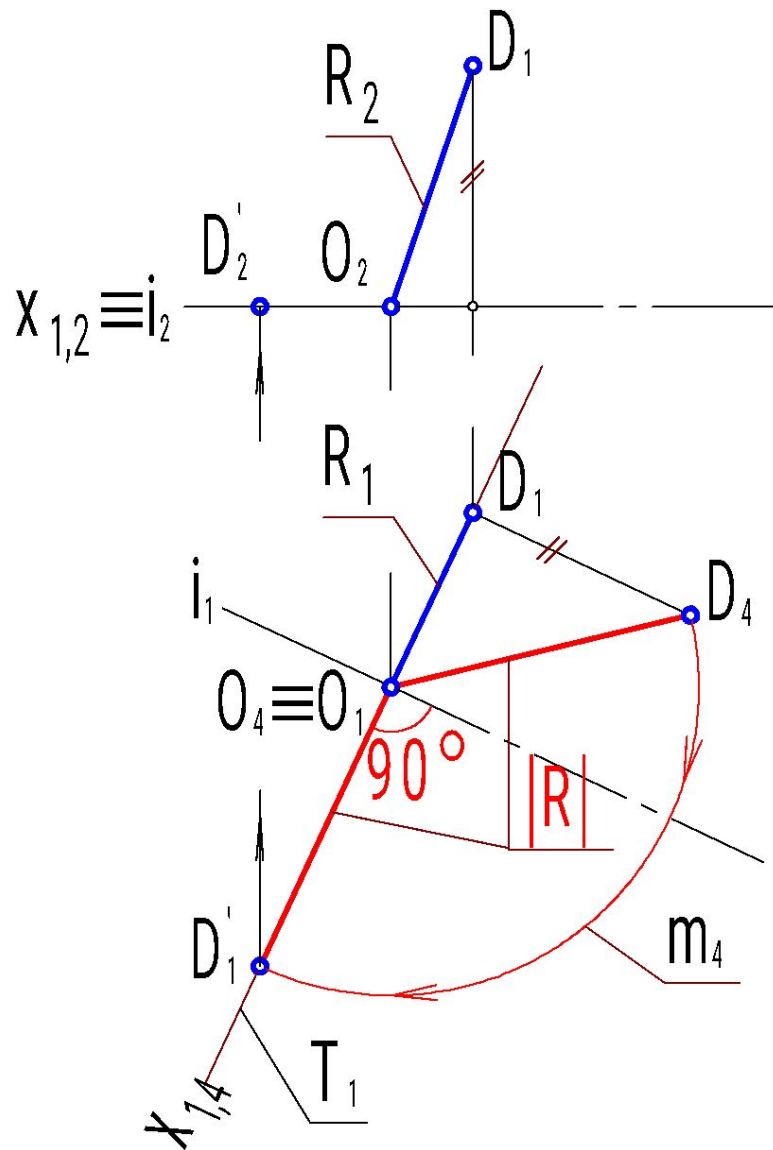
$$i \subset \Gamma, \Gamma \parallel \Pi_1; \triangle A'B'C' \subset \Gamma \Rightarrow \triangle A'B'C' \parallel \Pi_1 \Rightarrow \triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$$

Для выполнения поворота выбрана вершина B треугольника ABC , которая должна быть повернута вокруг оси i до совмещения с плоскостью уровня Γ .



Вспомним рассмотренный ранее
метод поворота точки вокруг прямой
уровня

Пример: $i \parallel \Pi_1$



Алгоритм решения.

Задаем плоскость вращения T .

$$D \in T; T \perp i; i \parallel \Pi_1 \Rightarrow T \perp \Pi_1$$

$$\Rightarrow T_1 \perp i_1; D_1 \in T_1$$

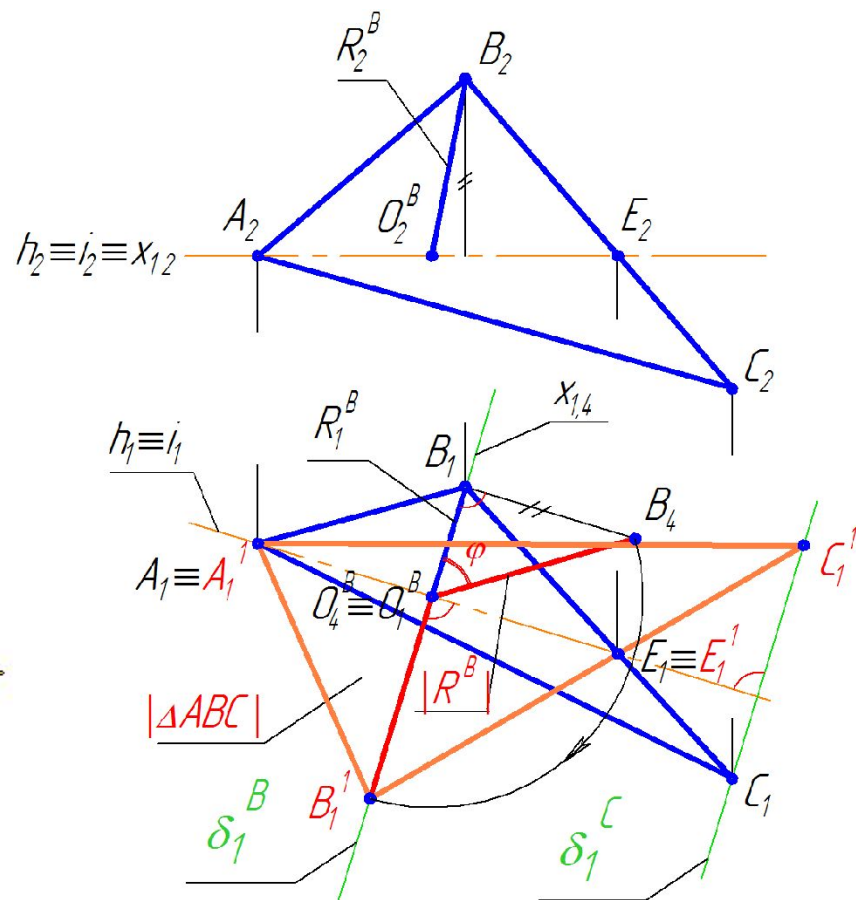
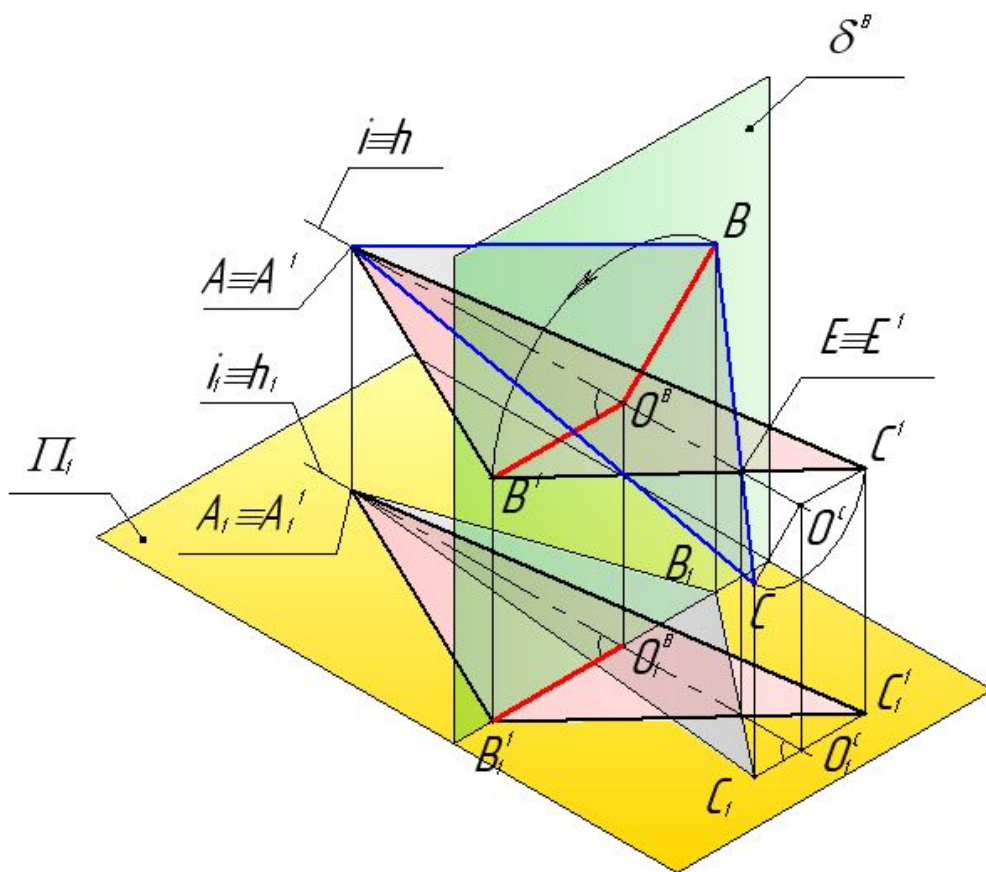
Определяем центр вращения точки A .
Точку O .

$$O \in T; O \in i \Rightarrow O = T \cap i$$

Определяем радиус вращения R^D
точки D ($R^D = OD$), используя
способ перемены плоскостей
проекций.

$$\Pi_4 \equiv T; O_4 D_4 \cong OD$$

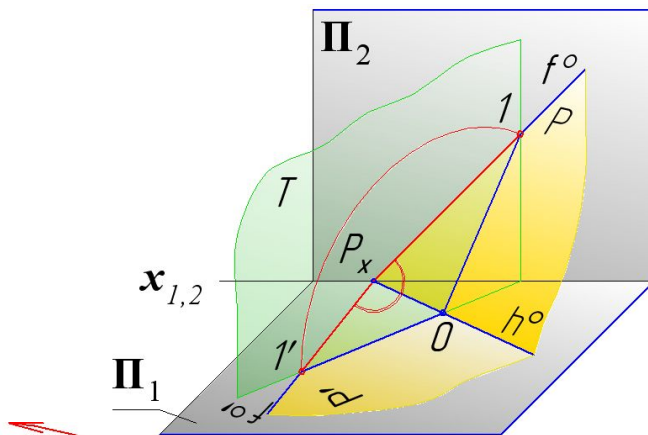
Строим новую горизонтальную
проекцию D^1 точки D .



1. Вводится плоскость δ^B , в которой выполняется поворот точки B вокруг оси i .
2. Способом перемены плоскостей проекций определяется истинная величина длины радиуса вращения точки B – $|R^B|$.
3. Строится новое положение точки B – B' и всего треугольника ABC – $A'B'C'$.

***Решение задачи способом
совмещения плоскости
общего положения с какой-
либо плоскостью проекций
(вращение вокруг следа плоскости)***

Вспомним рассмотренный ранее метод совмещения плоскости общего положения с плоскостью проекций путем ее поворота вокруг следа этой плоскости



Пример.

Совместить плоскость $P(h^0, f^0)$ с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 поворотом вокруг горизонтали h^0 .

Задаем на плоскости P точку, например, точку 1 . $1 \in f^0$.

Отмечаем ось вращения i . $i \equiv h^0$.

Задаем плоскость T – плоскость вращения точки 1 .

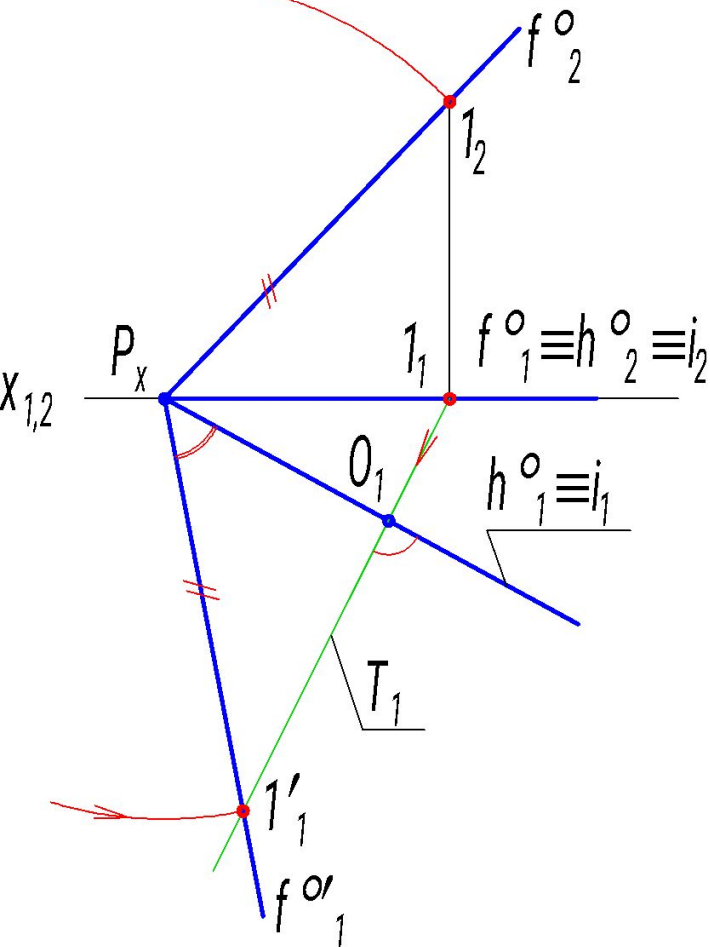
$$1 \in T; T \perp (i \equiv h^0); (i \equiv h^0) \subset \Pi_1 \Rightarrow T \perp \Pi_1 \\ \Rightarrow T_1 \perp (i_1 \equiv h^0_1); 1_1 \in T_1$$

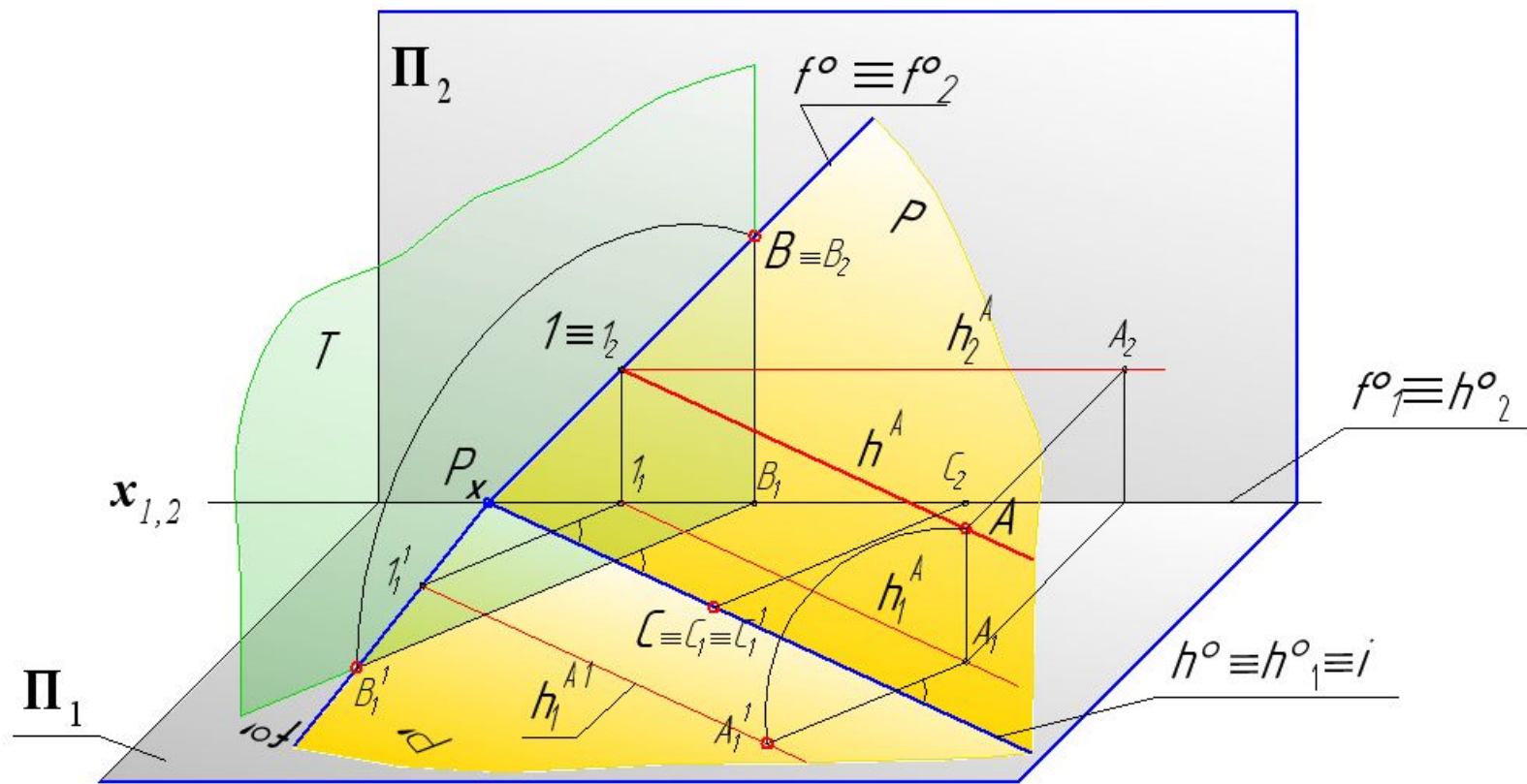
Так как $1 \in T$, то и после перемещения точка 1 остается в плоскости T , т.е. $1' \in T$ и $1'_1 \in T_1$.

Определяем положение точки $1'_1$.

Так $P_x 1_2 = P_x 1$ – истинная величина отрезка, то с помощью циркуля переносим точку 1 на горизонтальную проекцию плоскости T .

Через точки P и $1'_1$ проводим прямую и обозначаем f^{01}_1 – новая проекция фронтали f^0 .





Задана плоскость $P (h^\circ, f^\circ)$.

Заданы три точки A, B, C , принадлежащие плоскости $P (\{A, B, C\} \subset P)$.

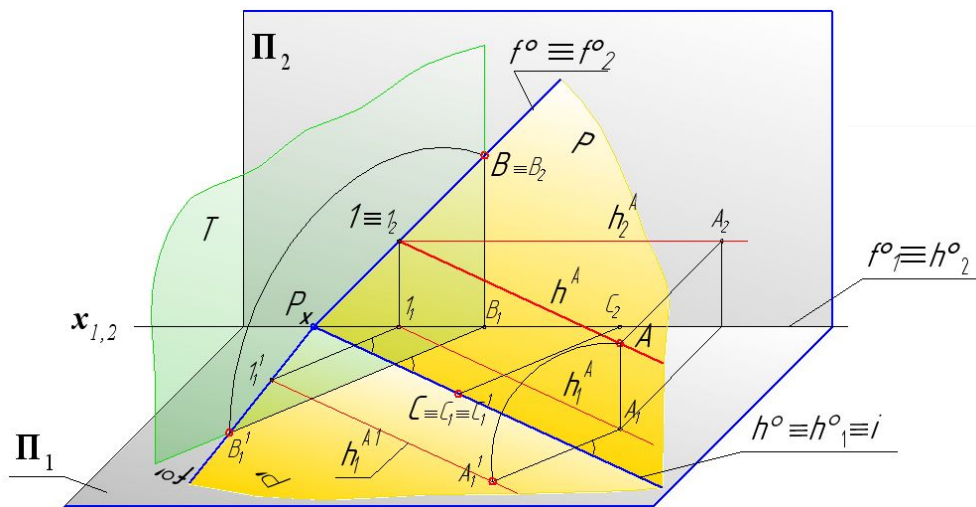
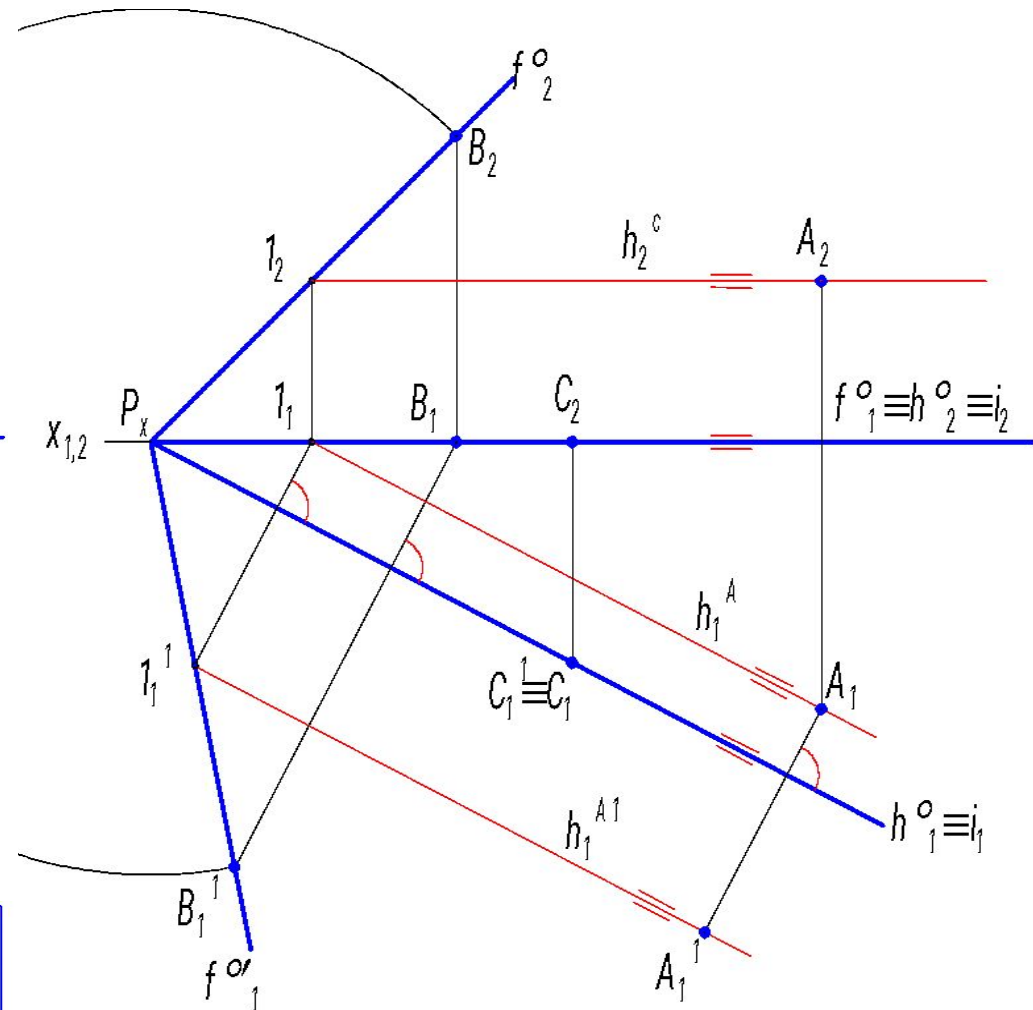
A – общее положение; $B \in f^\circ$; $C \in h^\circ$.

Строятся горизонтальная и фронтальная проекции точек A, B, C .

$A \in P \Rightarrow A \in h^A, h^A \subset P$.

Выполняется совмещение плоскости P с плоскостью проекций Π_1 . ($i \equiv h^\circ$).

$B \in f^\circ \Rightarrow B^1 \in f^{\circ 1}, C \in (i \equiv h^\circ) \Rightarrow C^1 \equiv C, A \in h^A \Rightarrow A^1 \in h^{A1}$



Метрические задачи

Метрическими называются задачи, в ходе решения которых определяется значение измеряемой величины – расстояния между двумя точками (длина отрезка), величины линейного угла или истинной формы и размеров плоской фигуры.

При решении метрических задач применяется только прямоугольный вариант метода проецирования.

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Определение истинных величин

Расстояний

Между двумя точками
(длина отрезка)

БЗ №1

От точки до прямой;
Между параллельными
прямыми;
Между скрещивающимися
прямыми.

БЗ №2

От точки до плоскости;
Между параллельными
плоскостями.

БЗ №3

Углов

Наклона прямой к плоскости
проекций.

БЗ №1

Двугранных углов.

БЗ №2

Наклона плоскости к
плоскости проекций.

БЗ №3

Между пересекающимися прямыми;
Между скрещивающимися прямыми;
Между прямой и плоскостью;
Между плоскостями.

БЗ №4

Форм плоских фигур

БЗ №4

Примечание: **БЗ** – базовая задача

Базовая задача	Метрическая задача
№1	Определение истинной величины расстояния между двумя точками (длины отрезка прямой). Определение истинной величины угла наклона прямой к плоскости проекций.
№2	Определение истинной величины расстояния от точки до прямой. Определение истинной величины расстояния между параллельными прямыми. Определение истинной величины расстояния между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины двугранного угла.
№3	Определение истинной величины расстояния от точки до плоскости. Определение истинной величины расстояния между параллельными плоскостями. Определение истинной величины угла наклона плоскости к плоскости проекций.
№4	Определение истинной величины угла между пересекающимися прямыми (истинной величины плоской фигуры). Определение истинной величины угла между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины угла между прямой и плоскостью. Определение истинной величины угла между двумя плоскостями.